مدرسان شریف

کارشناسی ارشد

معادلات دیفرانسیل

مؤلف: رضا آقایان

خلاصه درس، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۸-۷۸

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

سرشناسه: آقایان، رضا.

عنوان و پدیدآور: معادلات دیفرانسیل کارشناسی ارشد / مولف: رضا آقایان ؛

مشخصات نشر: تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۸ .

مشخصات ظاهری: ۶۱۶ ص.: مصور.

شابک : 978 – 964 – 2838 – 57 – 8

وضعیت فهرست نویسی : فیپا

موضوع : دانشگاه‌ها و مدارس عالی ــ ایران ــ آزمون‌ها.

موضوع : معادله‌های دیفرانسیل ـ راهنمای آموزش (عالی).

موضوع : معادله‌های دیفرانسیل ــ آزمونها و تمرینها (عالی).

موضوع : آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی ــ ایران.

رده بندی کنگره: ۶ م ۶۸۱۴ آ/۲۳۵۳ LB

رده بندی دیویی: ۱۶۶۴ / ۳۷۸

شماره کتابخانه ملی: ۴۶۹۹۴ ـ ۸۵ م

نام کتاب: معادلات دیفرانسیل

مؤلف: رضا آقایان

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

چاپ پنجم: بهار ۱۳۸۸

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی ـ مینو

قیمت: ۱۱۰۰۰ تومان

شابک: 978 – 964 – 2838 – 57 – 8

تمام حقوق محفوظ و مخصوص سفارش دهندهٔ مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد.

هر گونه کپی، چاپ و نسخه‌برداری از مطالب این کتاب پیگرد قانونی دارد.

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبرکبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو می‌باشد، لذا مؤسسه علمی ـ فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی ـ آموزشی خود اقدام به ارایه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این‌که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «معادلات دیفرانسیل» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت موسسه مدرسان شریف

« بنام خدا »

به نام آنکه زکات علم را در نشر آن، تسخیر علم را در نگارش آن، معلم را وارث انبیاء و انبیاء را حقیقی‌ترین معلمین تاریخ مقدر کرد.و حمد و سپاس بیکران بر او که گرد هم آورد تا مجموعه‌ای ناچیز از علم بیکرانش به نگارش مجدد، از قلم حقیری تراوش کند. شاید گرهی چند بگشاید.

درس معادلات دیفرانسیل معمولی، یکی از دروس مهم دوره کارشناسی است، که در رشته‌های علوم پایه و مهندسی هم به جهت تئوری و هم کاربرد در سایر مباحث درون رشته‌ای از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این درس به دلیل تنوع در دسته‌های معادلات مورد بررسی و پیچیدگیهایی که معمولاً در حل آنها رخ می‌دهد، همواره مورد گله دانشجویان می‌باشد. در این کتاب سعی بر آن بوده، که با نظام بندی مجدد در روش ارائه مطالب، الگوریتم بندی در روشهای حل و طرح مثالهای فراوان، هدفدار و متنوع تا حد امکان از مشکلات مذکور کاسته و کتابی جامع برای آمادگی آزمون کارشناسی ارشد فراهم گردد. لازم بذکر است، با توجه به یک دهه تدریس در دانشگاه و تجربه لازم در ارائه درس معادلات دیفرانسیل، این کتاب از هر جهت بعنوان یک کتاب درسی و آمادگی مطمئن برای کنکور کارشناسی ارشد و امتحانات پایان ترم توصیه می گردد.

کتاب مذکور، مشتمل است بر چهار فصل، که در هر فصل چکیده مبسوطی از سرفصلهای مصوب آموزش عالی، همراه با هدفمندترین مثالها و مناسب‌ترین چیدمان در جهت فهم دقیق و گام به گام بحث مورد مطالعه گنجانده شده است. حدوداً ۱۲۰۰ مسأله با راه حل تشریحی همراه با ۴۲۰ تمرین با حل کلیدی فراهم گردیده که در ارائه پاسخ‌های تشریحی، روشهای حل با نظام خاصی طبقه‌بندی گردیده است. بگونه‌ای که با مطالعه چند مسأله از یک بحث، حل سایر سؤالات از این دست بسادگی امکان‌پذیر می‌شود.

لازم به ذکر است سؤالات معادلات دیفرانسیل رشته‌های مختلف کنکورهای سراسری و آزاد ۸۵ ـ ۷۸ در هر فصل به صورت طبقه‌بندی شده با پاسخنامه کاملاً تشریحی وجود دارد و نیز سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد ۸۸ ـ ۸۶ در انتهای کتاب با پاسخنامه تشریحی ارائه گردیده است.

در پایان لازم است، به رسم تقدیم و تقدیر به یادمان چند بزرگ اشاره‌ای داشته باشم:

ـ اساتید بزرگوار جنابان دکتر سیاوش شهشهانی، دکتر مهدی نجفی‌خواه، دکتر سعید صالحی پور مهر و دکتر حسن امامی راد.

ـ دکتر مجید کرمی بواسطه زحماتی که در نگارش این کتاب متحمل شده‌اند.

ـ سردار شهید حاج حسین بصیر و استاد شهید علی اصغر ربیع نتاج.

ـ دوستان از دنیا جدا شده و به ابدیت پیوسته، زنده یادان کمال اختیاری و کیارش تسلیمی.

در پایان لازم است از مدیریت محترم مؤسسه مدرسان شریف که رهنمودهای ایشان باعث ارتقای کتاب شده است کمال تشکر و امتنان را داشته باشم.

همچنین از واحد تألیف و تایپ مؤسسه مدرسان شریف که در هر چه بهتر شدن این کتاب از هیچ کوششی دریغ نورزیدند کمال تشکر را دارم.

بـه یقـین هـر اثـری تـوأم بـا خطـایی اسـت لـذا از تمـامی صـاحب نظـران و دانـشجویان تقاضـا دارم هرگونـه اشـکالی را از طریـق شـماره پیـام کوتـاه ۱۰۰۰۸۳۸۷ اطـلاع دهنـد و یـا بـا شـماره تلفـن‌هـای ۵۰ ـ ۶۶۹۴۶۹۶۰ (روابـط عمـومی مؤسـسه مدرسان شریف) تماس حاصل نمایند. پیشاپیش از همکاری شما کمال تشکر را دارم.

با آرزوی موفقیت

رضا آقایان

« فهرست مطالب »

عنوان — **صفحه**

فصل پیشگفتار: آشنایی با مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی

مقدمه ۱
مفهوم جواب در معادلات دیفرانسیل ۲
رابطه بین معادلات دیفرانسیل و دسته منحنی ۴
تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی ۱ـ پارامتری ۷

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مقدمه ۱۰
معادلات دیفرانسیل جدا شونده ۱۱
معادلات همگن ۱۷
معادلات دیفرانسیل با یک متغیر خطی ۲۲
معادلات دیفرانسیل کامل ۳۱
معادلات قابل تبدیل به معادلات کامل ۳۵
معادلات دیفرانسیل خطی و برنولی ۴۳
معادلات دیفرانسیل ریکاتی ۵۲
حالتهای دوم و سوم در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۵۲
وجود یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۶۱
تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول ۶۴
پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول ۸۴
تستهای تکمیلی فصل اول ۱۴۰

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

۲ـ۱ـ مقدمه ۱۴۶
۲ـ۲ـ حالات خاص حل معادلات مرتبه دوم ۱۴۶
۲ـ۳ـ معادلا خطی مرتبه دوم ۱۵۰
۲ـ۳ـ۱ـ قضیه ۱۵۰
۲ـ۴ـ جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن ۱۵۱
۲ـ۴ـ۱ـ تعریف ۱۵۱
۲ـ۴ـ۲ـ قضیه ۱۵۲
۲ـ۴ـ۳ـ قضیه ۱۵۲
۲ـ۵ـ حل معادله خطی مرتبه دوم همگن ۱۵۳
۲ـ۵ـ۱ـ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت ۱۵۳
۲ـ۵ـ۲ـ معادله خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت ۱۵۸

« فهرست مطالب »

عنوان	صفحه
۲ـ۵ـ۳ـ معادله لژاندر مرتبه دوم همگن	۱۵۹
۲ـ۵ـ۴ـ معادله لژاندر مرتبه n همگن	۱۶۱
۲-۵-۵- روش کاهش مرتبه	۱۶۱
۲-۶- جواب خصوصی معادله خطی غیرهمگن	۱۶۴
۲-۷- روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)	۱۶۴
۲-۸- روش اپراتور معکوس	۱۶۵
۲-۹ روش ضرایب نامعین	۱۷۶
۲-۹-۱ تذکر	۱۷۶
۲-۱۱- روش حذف ضریب مشتق	۱۸۰
تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم	۱۸۲
پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم	۲۰۶
تستهای تکمیلی فصل دوم	۲۷۳
فصل سوم: سریها	
مفاهیم مقدماتی	۲۸۱
I. حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن حول نقاط عادی	۲۸۴
II. حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط غیرعادی	۲۹۸
معادله دیفرانسیل لژاندر و توابع لژاندر	۳۱۳
تابع گاما	۳۲۲
معادله دیفرانسیل بسل و توابع بسل	۳۲۵
معادله بسل پیراسته	۳۳۸
تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم	۳۴۱
پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم	۳۵۸
تستهای تکمیلی فصل سوم	۳۹۵
فصل چهارم: تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن	
I. تبدیل لاپلاس	۴۰۴
تبدیل لاپلاس تابع پله واحد	۴۱۳
تبدیل لاپلاس تابع دلتای دیراک	۴۱۶
تبدیل لاپلاس توابع متناوب	۴۱۸
تبدیل لاپلاس و انتقال	۴۲۳
تبدیل لاپلاس و مشتق	۴۳۱
تبدیل لاپلاس و انتگرال	۴۳۵

« فهرست مطالب »

عنوان	صفحه
تبدیل لاپلاس و تغییر مقیاس	۴۴۳
تبدیل لاپلاس و حل معادلات دیفرانسیل	۴۴۵
تبدیل لاپلاس و معادلات انتگرال	۴۵۶
تبدیل لاپلاس و حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی	۴۶۴
تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم	۴۶۶
پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم	۴۸۶
تستهای تکمیلی فصل چهارم	۵۲۶
آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰)	۵۳۴
پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی (۱ تا ۱۰)	۵۴۶
سئوالات آزمون سراسری ۸۶	۵۴۷
پاسخنامه سئوالات آزمون سراسری ۸۶	۵۵۲
سئوالات آزمون آزاد ۸۶	۵۶۴
پاسخنامه سئوالات آزمون آزاد ۸۶	۵۶۷
سئوالات آزمون سراسری ۸۷	۵۷۵
پاسخنامه سئوالات آزمون سراسری ۸۷	۵۷۸
سئوالات آزمون آزاد ۸۷	۵۸۴
پاسخنامه سئوالات آزمون آزاد ۸۷	۵۸۷
سئوالات آزمون سراسری ۸۸	۵۹۲
پاسخنامه سئوالات آزمون سراسری ۸۸	۵۹۶
پاسخنامه تستهای تکمیلی	۶۰۵

اولین و قویترین مرکز برگزاری کلاسهای کنکور
و
دوره‌های مکاتبه‌ای کارشناسی ارشد
و
کاردانی به کارشناسی در سطح ایران

مؤسسه علمی - فرهنگی **مدرسان شریف** برای آمادگی هر چه بیشتر دانشجویان عزیز جهت آزمونهای کارشناسی ارشد و کاردانی به کارشناسی کلاسهای حضوری زیر را با زمان‌بندی ذیل هر ساله برگزار می‌کند.

تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال کلاسهای آمادگی آزمون **کارشناسی ارشد**	تاریخ شروع ثبت‌نام در هر سال کلاسهای آمادگی **کاردانی به کارشناسی**
دوره اول: بیستم اردیبهشت ماه لغایت بیستم تیر ماه	**دوره اول:** بیستم آذر ماه لغایت بیستم دی‌ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه سراسری)
دوره دوم: بیستم مرداد ماه لغایت بیستم مهر ماه	**دوره دوم:** بیست و پنجم دی ماه لغایت پانزدهم اسفند ماه (دوره عادی ویژه دانشگاه سراسری)
دوره سوم: سی‌ام مهر ماه لغایت دهم آذر ماه	**دوره سوم:** بیستم اسفندماه ماه لغایت دهم اردیبهشت ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه سراسری)
مراکز تشکیل کلاسها: سیدخندان - انقلاب - آریاشهر ونک - کرج **تلفنهای مشاوره و ثبت‌نام:** ۶۶۹۴۶۹۶۰-۵	**دوره چهارم:** پانزدهم اردیبهشت ماه لغایت سی ام خرداد ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد) **دوره پنجم:** پنجم خرداد ماه لغایت پانزدهم تیرماه (دوره عادی ویژه دانشگاه آزاد) **دوره ششم:** بیستم تیرماه لغایت بیستم مرداد ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد) **دوره هفتم:** بیستم مرداد ماه لغایت اول مهر ماه (دوره فشرده ویژه دانشگاه آزاد)

تذکر: با توجه به استقبال بی‌نظیر دانشجویان گرامی از کلاسهای مذکور کلاسهای فوق در کدهای مجزای زمانی **روزهای زوج ، روزهای فرد** و همچنین کلاسها صرفاً **پنج‌شنبه و جمعه ویژه شاغلین و داوطلبین شهرستانی** در نقاط مختلف تهران و کرج برگزار می‌گردد.

مدرسان شریف

پیشگفتار

آشنایی با مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی

مقدمه.

تعریف. هر معادله که در ضابطه آن علاوه بر متغیر مستقل و متغیر تابعی، مشتقات مراتب مختلف متغیر تابعی نسبت به متغیر مستقل نیز حاضر باشند، ***معادله دیفرانسیل معمولی*** نامیده می‌شوند.

تعریف. بالاترین مرتبه مشتقگیری حاضر در ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را ***مرتبه*** آن ***معادله دیفرانسیل*** گویند.

به عنوان مثال معادله دیفرانسیل مرتبه n، با متغیر مستقل x و متغیر تابعی y دارای نمایش عمومی $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ است.

تعریف. اگر بتوان ضابطه یک معادله دیفرانسیل معمولی را نسبت به مرتبه مشتقگیری بصورت یک چند جمله‌ای نوشت، بزرگترین توان حاضر در" جملات تعیین کننده مرتبه " را ***درجه*** آن ***معادله دیفرانسیل*** گویند. به عنوان مثال؛

ـ معادله دیفرانسیل $xy'+y=\sec x$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۱ ، با درجه ۱ و نسبت به y برحسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $u''+u=\sec x$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲ ، با درجه ۱ و نسبت به u بر حسب x است.

ـ معادله دیفرانسیل $v''+2v'+v=t$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲ ، با درجه ۱ و نسبت به v بر حسب t است.

ـ معادله دیفرانسیل $y'''^{2}-y'''+y''-y-e^{x}=0$ ، یک معادله دیفرانسیل از مرتبه ۳ ، با درجه ۲ و نسبت به y بر حسب x است.

مفهوم جواب در معادلات دیفرانسیل

تعریف. هر تابع که در ضابطه یک معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند ***جواب*** آن ***معادله دیفرانسیل*** خوانده می‌شود. لازم بذکر است، تابع جواب می‌تواند به هر سه نمایش صریح، ضمنی و پارامتری بیان گردد.

بعنوان مثال. ثابت کنید تابع $y = \sin x$ ، یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است.

حل.

$$(y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

پس $y = \sin x$ در معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ صدق می‌کند.

جواب یک معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان به یکی از صورتهای زیر محاسبه کرد:

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، توسط یک رابطه با ثابتهای دلخواه بیان گردد ***جواب عمومی*** آن معادله نامیده میشود. در واقع، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل بصورت یک دسته منحنی n ـ پارامتری با نمایش عمومی $g(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ ارائه می‌گردد.

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، فاقد هرگونه ثابت دلخواه و با اِعمال شرایط اولیه بر جواب عمومی بدست آید، ***جواب خصوصی*** یا به تعبیر هندسی ***خم انتگرال*** نامیده می‌شود.

لازم بذکر است، شرایط موجود در یک معادله دیفرانسیل، که منجر به تعیین ثابتهای حاضر در نمایش جواب عمومی می‌گردند، ***شرایط اولیه*** نامیده می‌شوند. و هم چنین یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را، ***مساله با مقدار اولیه*** می‌نامیم.

بعنوان مثال، دسته منحنی ۱ـ پارامتری $y = ce^x$ ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' - y = 0$ است. جوابی از این معادله، با شرط اولیه $y(0) = 1$ ، اینگونه بدست می‌آید:

$$y = ce^x \xrightarrow{x=0} y(0) = ce^0 \xrightarrow{y(0)=1} c = 1$$

که در اینصورت $y = e^x$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y' - y = 0$ می‌باشد که از نقطه $(0, 1)$ نیز می‌گذرد.

ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل، به ازاء هیچ شرایط اولیه‌ای، از جواب عمومی محاسبه نگردد، ***جواب غیرعادی*** نامیده می‌شود. می‌توان بررسی کرد منحنی نمایش یک جواب غیرعادی، بر تمام منحنی‌های جواب عمومی در یک و فقط یک نقطه مماس می‌باشد.

تذکر.

۱ـ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ، یک دسته منحنی با حداقل n ـ پارامتر است، بنابراین هر گردایه از جوابها، با کمتر از n ثابت دلخواه ، دسته‌ای از جوابهای غیرعادی معادله می‌باشد. همچنین لزومی ندارد، تعداد ثابتهای دلخواه جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مرتبه آن برابر باشد.

۲ـ هر معادله دیفرانسیل با نمایش $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ ، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ، نامیده می‌شود. این دسته از معادلات فقط دارای جواب عمومی بوده و جواب غیرعادی ندارند.

۳ـ یک معادله دیفرانسیل می‌تواند بدون جواب، با تعداد معینی جواب، دارای یک جواب عمومی یا نامتناهی جواب عمومی و غیرعادی باشد.

مثال ۱. *چنانچه $y = (x^2 - 1)^n$ باشد، داریم:*

۱) $(x^2-1)y' = 2n^2xy$ ۲) $(x^2-1)^n y' = 2nxy$ ۳) $(x^2-1)y' = 2nxy$ ۴) $(x^2-1)y' = 2nx^2y$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y = (x^2-1)^n \Rightarrow y' = n(2x)(x^2-1)^{n-1} \Rightarrow y' = 2nx(x^2-1)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{(x^2-1)\times \text{(طرفین)}} (x^2-1)y' = 2nx(x^2-1)^n \xrightarrow{(x^2-1)^n = y} (x^2-1)y' = 2nxy$$

مثال ۲. *تابع با ضابطه $y = \sqrt{2x - x^2}$ در کدام معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟*

۱) $y^2y'' + y' = 0$ ۲) $y^2y'' + 1 = 0$ ۳) $y^3y'' + y' = 0$ ۴) $y^3y'' + 1 = 0$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \xrightarrow{\sqrt{2x-x^2} = y} y' = \frac{1-x}{y} \quad ; (1) \Rightarrow y'y = 1 - x$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}} y''y + y'^2 = -1 \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} y''y + (\frac{1-x}{y})^2 = -1 \xrightarrow{y^2 \times \text{(طرفین)}} y''y^3 + (1-x)^2 = -y^2 \Rightarrow$$

$$y''y^3 + (1 - 2x + x^2) = -y^2 \Rightarrow y''y^3 + 1 - (2x - x^2) = -y^2 \xrightarrow{\sqrt{2x-x^2} = y} y''y^3 + 1 - y^2 = -y^2 \Rightarrow$$

$$y''y^3 + 1 = 0$$

مثال ۳. *جواب معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از:*

$$xy'' + 3y' + 4x^3y = 0$$

۱) $\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = x^{-2} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = e^x \ln x \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} y_1 = x^{-2}\sin x^2 \\ y_2 = x^{-2}\cos x^2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y_1 = x\sin x \\ y_2 = x\cos x \end{cases}$

☑ **حل.** گزینه «۳». با توجه به اینکه هیچ یک از جوابهای y_1 و y_2 در چهار گزینه داده شده، مشترک نیستند. بنابراین کافیست از هر گزینه تنها یک تابع y_1 یا y_2 را مورد بررسی قرار گیرد:

گزینه (۱): $(y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \quad \& \quad y'' = 2)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy'' + 3y' + 4x^3y = x \times 2 + 3 \times 2x + 4x^3 \times x^2 = 8x + 4x^5 \neq 0$$

گزینه (۲): $(y = e^x \Rightarrow y' = e^x \quad \& \quad y'' = e^x)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy'' + 3y' + 4x^3y = xe^x + 3e^x + 4x^3e^x \neq 0$$

گزینه (۳): $(y = x^{-2}\sin x^2 \Rightarrow y' = -2x^{-3}\sin x^2 + 2x^{-1}\cos x^2 \ \& \ y'' = 6x^{-4}\sin x^2 - 6x^{-2}\cos x^2 - 4\sin x^2)$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy'' + 3y' + 4x^3y = 6x^{-3}\sin x^2 - 6x^{-1}\cos x^2 - 4x\sin x^2 - 6x^{-3}\sin x^2$$

$$+ 6x^{-1}\cos x^2 + 4x\sin x^2 = 0$$

برای اطمینان بیشتر می‌توان گزینه (۴) را نیز بررسی کرد.

مثال ۴. *به ازاء چه مقدار m یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y'' - y = 0$ برابر $y = x^m$ است؟*

۱) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$(y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1} \quad \& \quad y'' = m(m-1)x^{m-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله معروض}} x^2y'' - y = x^2 \times m(m-1)x^{m-2} - x^m = 0 \Rightarrow m(m-1)x^m - x^m = 0 \Rightarrow$$

$$(m^2 - m - 1)x^m = 0 \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

مثال ۵. *معادله دیفرانسیلی که $y = e^x \sin x$ جواب آن باشد عبارتست از:*

۱) $y'' - 2y' - 2y = 0$ ۲) $y'' + 2y' - 2y = 0$ ۳) $y'' + 2y' + 2y = 0$ ۴) $y'' - 2y' + 2y = 0$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y = e^x \sin x \quad ;(1) \Rightarrow \begin{cases} y' = e^x \sin x + e^x \cos x & ;(2) \\ y'' = 2e^x \cos x \Rightarrow e^x \cos x = \frac{y''}{2} & ;(3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساویهای (۱) و (۳) در (۲)}} y' = e^x \sin x + e^x \cos x = y + \frac{y''}{2} \Rightarrow y'' - 2y + 2y = 0$$

رابطه بین معادلات دیفرانسیل و دسته منحنی

تعیین معادله دیفرانسیل متناظر با یک دسته منحنی.

می‌دانیم جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، نمایشی به صورت یک دسته منحنی n ـ پارامتری دارد. حال سئوالی که در ذهن مطرح می‌گردد این است که به ازاء یک دسته منحنی چند پارامتری، آیا می‌توان معادله دیفرانسیلی پیدا کرد که ضابطه دسته منحنی مفروض جواب عمومی آن باشد؟

به طور کلی، برای تعیین معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی n ـ پارامتری $g(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ کافی است، به تعداد ثابتهای دلخواه موجود، از معادله مفروض نسبت به x مشتقگیری کرده و سپس با حذف n پارامتر c_1 ، ... تا c_n در $n+1$ معادلهٔ دستگاه زیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ، بدست آوریم:

$$\begin{cases} g(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0 \\ g'_x(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ g^{(n)}_x(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0 \end{cases}$$

تذکر. ۱ـ در مورد دسته منحنی ۱ـ پارامتری، جهت تعیین معادله دیفرانسیل متناظر کافیست c را از معادله $g(x, y, c) = 0$ محاسبه کرده و سپس نسبت به x مشتقگیری کنیم.

تذکر. ۲ـ اگر معادله یک دسته منحنی بصورت $y = c_1g_1(x) + \cdots + c_ng_n(x)$ بیان شود، ضابطه معادله دیفرانسیل متناظر را می‌توان از بسط دترمینان زیر بدست آورد:

$$\begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) \ldots\ldots g_n(x) & y \\ g'_1(x) & g'_2(x) \ldots\ldots g'_n(x) & y' \\ \vdots & & \\ g^{(n)}_1(x) & g^{(n)}_2(x) \ldots\ldots g^{(n)}_n(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل متناظر دسته منحنی $y = Ax + BLnx$ کدام است؟

حل. حل اول.

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابتها به کمک مشتقگیری}} \begin{cases} y = Ax + BLnx & ;(1) \\ y' = A + \frac{B}{x} \Rightarrow A = y' - \frac{B}{x} & \\ y'' = \frac{-B}{x^2} \Rightarrow B = -x^2y'' & ;(2) \end{cases} \Rightarrow A = y' + \frac{x^2y''}{x} = y' + xy'' \quad ;(3)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (۲) و (۳) در تساوی (۱)}} y = (y' + xy'')x - x^2y''Lnx \Rightarrow y = xy' + x^2(1 - Lnx)y''$$

حل دوم. طبق تذکر ۲. کافیست بسط دترمینان زیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & Lnx & y \\ 1 & \frac{1}{x} & y' \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{بسط دترمینان نسبت به ستون اول}} x\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & y' \\ \frac{-1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Lnx & y \\ \frac{-1}{x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{x}y'' + \frac{1}{x^2}y'\right) - \left(Lnx \times y'' + \frac{1}{x^2}y\right) = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - y''Lnx - \frac{1}{x^2}y = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 \times (\text{طرفین})} x^2(1 - Lnx)y'' + xy' - y = 0$$

مثال ۶. *معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های به معادله $y = ae^{-x} - bx$ کدام است؟*

۱) $y''(1-x) + xy' - y = 0$ ۲) $y''' = y'' + 1$

۳) $y''x - xy' - y = 0$ ۴) $y'' - y = 0$

☑ **حل.** گزینه «۱». حل اول.

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابتها به کمک مشتقگیری}} \begin{cases} y = ae^{-x} - bx & ;(1) \\ y' = ae^{-x} - b \Rightarrow b = ae^{-x} - y' & \\ y'' = ae^{-x} \Rightarrow a = \frac{y''}{e^{-x}} \Rightarrow ae^{-x} = y'' & ;(2) \end{cases} \Rightarrow b = y'' - y' \quad ;(3)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (۲) و (۳) در تساوی (۱)}} y = ae^{-x} - bx = y'' - (y'' - y')x \Rightarrow y = y'' - y''x + y'x \Rightarrow$$

$$y''(1-x) + xy' - y = 0$$

حل دوم.

$$\begin{vmatrix} c^x & x & y \\ e^x & 1 & y' \\ e^x & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بسط دترمینان نسبت به سطر سوم}} \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy' - y + y''(1-x) = 0$$

مثال ۷. *معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله $y = cx^2 + d$ کدام است؟*

۱) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$
۲) $y'' + (x^2 - 2x)y' - y = 0$
۳) $xy'' - y' = 0$
۴) $2xy'' - x^2y' + y = 0$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابتها به کمک مشتقگیری}} (y = cx^2 + d \quad \Rightarrow \quad y' = 2cx \quad \& \quad y'' = 2c) \quad \Rightarrow \quad xy'' - y' = 0$$

مثال ۸. *معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت A در معادله توابع $y = A\cos^2 x + \sin^2 x$ کدام است؟*

۱) $(2\sin 2x)y' + (\cos 2x)y = 2$
۲) $(2\cos 2x)y' + (\sin 2x)y = 2$
۳) $(\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2$
۴) $(\sin 2x)y' + (2\cos 2x)y = 2$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابتها به کمک مشتقگیری}} \begin{cases} y = A\cos 2x + \sin 2x & ;(1) \\ y' = -2A\sin 2x + 2\cos 2x & ;(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{2\sin 2x \times (\text{معادله } 1) + \cos 2x \times (\text{معادله } 2)} (\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) \quad \Rightarrow$$

$$(\cos 2x)y' + (2\sin 2x)y = 2$$

مثال ۹. *معادله دیفرانسیلی که جواب آن $y = c\sin x + x$ باشد کدام است؟*

۱) $y = x - (y' - 1)\tan x$
۲) $y = (y' - 1)\tan x + x$
۳) $y = (y' + 1)\tan x + x$
۴) $y' = (y - 1)\tan x + x$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y = c\sin x + x \quad \Rightarrow \quad c = \frac{y - x}{\sin x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} 0 = \frac{(y' - 1)\sin x - \cos x(y - x)}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow$$

$$(y' - 1)\sin x = (y - x)\cos x \quad \Rightarrow \quad y - x = (y' - 1)\tan x \quad \Rightarrow \quad y = x + (y' - 1)\tan x$$

مثال ۱۰. *معادله دیفرانسیل سهمی‌ها به معادله $x = c_1y^2 + c_2$ عبارتست از:*

۱) $y'^2 + yy'' = 0$
۲) $yy'' - y'^2 = 0$
۳) $y'^2 - yy'' = 0$
۴) $y'^2 - y^2y'' = 0$

☑ **حل.** گزینه «۱». کافیست ثابتها به کمک مشتقگیری حذف گردند:

$$x = c_1y^2 + c_2 \xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} 1 = 2c_1yy' \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2yy'} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} 0 = \frac{-2(y'^2 + yy'')}{(2yy')^2} \quad \Rightarrow \quad y'^2 + yy'' = 0$$

تعیین مسیرهای متعامد یک دسته منحنی ۱ـ پارامتری

I تعیین مسیرهای متعامد در دستگاه مختصات دکارتی.

تعریف. دو دسته منحنی ۱ـ پارامتری $g(x,y,c) = 0$ و $g^{\perp}(x,y,c) = 0$ را متعامد گوییم، هر گاه هر منحنی از یک دسته، بر کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود باشد.

برای تعیین مسیرهای متعامد بر دسته منحنی مفروض $g(x,y,c) = 0$، کافیست گامهای زیر را برداریم:

گام اول: معادله دیفرانسیل متناظر $g(x,y,c) = 0$ را تعیین می‌کنیم. به عبارت دیگر، پارامتر c را به کمک مشتقگیری حذف می‌کنیم.

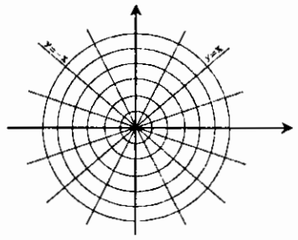
گام دوم: در معادله دیفرانسیل بدست آمده، به جای y'، $(-\frac{1}{y'})$ قرار می‌دهیم.

گام سوم: معادله دیفرانسیل حاصل از گام دوم را حل می‌کنیم.

جواب عمومی بدست آمده، دسته منحنی‌های متعامد بر دسته $g(x,y,c) = 0$ می‌باشد.

بعنوان مثال. مسیرهای متعامد دسته خطوط $y = cx$ را بیابید.

حل.



$$\xrightarrow{\text{تعیین معادله دیفرانسیل متناظر : گام اول}} c = \frac{y}{x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} xy' - y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم : } y' \mapsto (-\frac{1}{y'})} x(-\frac{1}{y'}) - y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{y'} = y \quad \Rightarrow \quad yy' + x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل بدست آمده : گام سوم}} yy' = -x \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = -x \quad \Rightarrow \quad ydy = -xdx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} y^2 = -x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = c$$

همانگونه‌که از شکل نیز مشخص است دسته منحنی بدست آمده، بردسته خطوط $y = cx$ متعامد است.

II . تعیین مسیرهای متعامد دسته منحنی ۱ـ پارامتری در دستگاه قطبی.

لازم بذکر است، تمامی مفاهیمی که تا کنون در دستگاه مختصات دکارتی بیان گردید، در دستگاه مختصات قطبی نیز قابل طرح است.

برای تعیین مسیرهای متعامد بر یک دسته منحنی ۱ـ پارامتری در دستگاه مختصات قطبی، کافیست گامهای زیر را بر داریم:

گام اول: معادله دیفرانسیل متناظر $g(\theta,r,c) = 0$ را تعیین می‌کنیم.

گام دوم: در معادله دیفرانسیل بدست آمده، به جای $\frac{rd\theta}{dr}$، $(-\frac{dr}{rd\theta})$ قرار می‌دهیم.

گام سوم: معادله دیفرانسیل حاصل از گام دوم را حل می‌کنیم. جواب عمومی بدست آمده، دسته منحنی متعامد بر دسته $g(\theta,r,c) = 0$ می‌باشد.

بعنوان مثال. مسیرهای متعامد بر دسته منحنی ۱ـ پارامتری $r = a\cos 2\theta$ را تعیین کنید.

حل.

$$\xrightarrow{\text{تعیین معادله دیفرانسیل متناظر : گام اول}} \begin{cases} r = a\cos 2\theta \\ \dfrac{dr}{d\theta} = -2a\sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\left(\frac{\cos 2\theta}{-2\sin 2\theta}\right) \Rightarrow \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{1}{2}\cot g\, 2\theta$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم: } \frac{d\theta}{dr} \mapsto \left(-\frac{dr}{r\,d\theta}\right)} -\frac{dr}{r\,d\theta} = -\frac{1}{2}\cot g 2\theta \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل حاصل : گام سوم}} 2\frac{dr}{r} = \cot g 2\theta\; d\theta$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرالگیری از طرفین}} 2\int\frac{dr}{r} = \int\cot g 2\theta d\theta \Rightarrow 2\ln r = \frac{1}{2}\ln|\sin 2\theta| + c \quad \text{(دسته منحنی ۱ـ پارامتری متعامد)}$$

مثال ۱۱. *معادلات مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $xy^2 = c$ کدام است؟*

۱) $x^2 - 2y^2 = a$ ۲) $y^2 - 2x^2 = a$ ۳) $x^2y = a$ ۴) $y = ax^3$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$xy^2 = c \xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری : گام اول}} y^2 + 2xyy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{2x}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم: } y' \mapsto -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'} = -\frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2x} \Rightarrow ydy = 2xdx$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم: } \int \text{(طرفین)}} \int y\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 + c \Rightarrow y^2 - 2x^2 = a \quad ;(2c = a)$$

مثال ۱۲. *مسیرهای قائم خانواده سهمی‌های $y = cx^2$ عبارت است از:*

۱) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c_1$ ۲) $y^2 - x^2 = c_1$ ۳) $x = c_1y^2$ ۴) $yx = c_1$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری : گام اول}} (y = cx^2 \Rightarrow y' = 2cx) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم: } y' \mapsto -\frac{1}{y'}} \frac{y}{-\frac{1}{y'}} = \frac{x}{2} \Rightarrow -yy' = \frac{x}{2} \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow 2ydy = -xdx$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم: } \int \text{(طرفین)}} \int 2y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

مثال ۱۳. *معادله منحنی‌ای را پیدا کنید که از نقطه (۱, ۲) بگذرد و عمود بر منحنی در نقطه (x, y) دارای شیب $-\frac{y}{x}$ باشد؟*

۱) $x^2 - y^2 = 3$ ۲) $x^2 + y^2 = 3$ ۳) $y^2 - x^2 = 3$ ۴) $x^2 + xy = 3$

☑ **حل.** گزینه «۱». می‌دانیم، اگر $y' = -\frac{y}{x}$ شیب منحنی مفروض باشد، شیب منحنی متعامد، با جایگذاری $(y' \mapsto -\frac{1}{y'})$ بدست می‌آید:

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int} \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{(جواب عمومی)؛}$$

$$\xrightarrow{\text{از نقطه } (x=2 \,\&\, y=1) \text{ می‌گذرد}} \frac{1}{2} = \frac{(2)^2}{2} + c \Rightarrow c = \frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - y^2 = 3$$

مثال ۱۴. *خطوط هم پتانسیل جریانی برابر $\phi(x, y) = x^2 - y^2 = c$ می‌باشد. خطوط جریان برای این جریان پتانسیل عبارت است از:*

۱) $\psi(x,y) = xy$ ۲) $\psi(x,y) = x^2y$ ۳) $\psi(x,y) = xy^2$ ۴) $\psi(x,y) = x^2y^2$

☑ **حل.** گزینه «۱».

نکته: خطوط هم پتانسیل و خطوط جریان برای یک جریان پتانسیل، بر هم عمود می‌باشند:

$$x^2 - y^2 = c \xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری : گام اول}} 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow x = yy'$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم : } y' \mapsto -\frac{1}{y'}} x = y\left(-\frac{1}{y'}\right) \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم: } \int \text{(طرفین)}} \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln c \Rightarrow xy = c$$

مثال ۱۵. *مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ که در آن b یک پارامتر ثابت حقیقی است، عبارت است از:*

۱) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 = x + c$ ۲) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 = x + c$

۳) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \ln x + \ln c$ ۴) $x^2 + y^2 = \ln(cx)^2$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - x^2 \Rightarrow b^2 = \frac{y^2}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف ثابت به کمک مشتقگیری : گام اول}} 0 = \frac{2yy'(1-x^2) + 2xy^2}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'(1-x^2) + xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم : } y' \mapsto -\frac{1}{y'}} -\frac{1}{y'} = -\frac{xy}{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{xy} \Rightarrow ydy = \frac{1-x^2}{x}dx$$

$$\xrightarrow{\text{گام سوم: } \int \text{(طرفین)}} \int 2y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \ln x + \ln c$$

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مقدمه.

می‌دانیم، نمایش عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $f(x,y,y')=0$ می‌باشد. بررسی این دسته از معادلات، عمدتاً معطوف به یکی از حالتهای زیر می‌باشد:

حالت اول: معادله مفروض نسبت به y' قابل حل باشد؛ $y'=f(x,y)$.

حالت دوم: معادله مفروض نسبت به y قابل حل باشد؛ $y=f(x,y')$.

حالت سوم: معادله مفروض نسبت به x قابل حل باشد؛ $x=f(y,y')$.

حالت اول. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که نسبت به y' قابل حل هستند : $y'=f(x,y)$.

تذکر. معادلات دیفرانسیل به فرم عمومی $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ، نسبت به y' قابل حل هستند:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \Rightarrow P(x,y)dx=-Q(x,y)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=f(x,y) \quad \text{یا} \quad y'=f(x,y)$$

بنابراین، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول حالت اول می‌تواند به یکی از دو فرم عمومی زیر ارائه گردد:

الف- فرم بسته یا عادی که نمایش عمومی آن به صورت $y'=f(x,y)$ می‌باشد. بعنوان مثال؛ $y'=e^{x+y}$

$y'+(\tan x)y=\cos x$ (یا $y'=\cos x-(\tan x)y$)

ب- فرم باز یا دیفرانسیلی که نمایش عمومی آن به صورت $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ می‌باشد. بعنوان مثال؛ $y\,dx+x\,dy=0$

$(e^x+y)dx+(\ln y+x)dy=0$

برای بررسی منظم‌تر و ساده‌تر معادلات دیفرانسیل مرتبه اول حالت اول، آن را در دسته‌های زیر طبقه‌بندی می‌کنیم.

معادلات دیفرانسیل جدا شونده

معادلات دیفرانسیل که بتوان آنها را به دو بخش، جملات شامل متغیر مستقل و جملات شامل متغیر تابعی تجزیه نمود، معادلات جدا شونده نامیده می‌شوند.

الف- معادلات دیفرانسیل جدا شونده به فرم بسته.

نمایش عمومی این دسته از معادلات به صورت $y'=f(x)g(y)$ می‌باشد، که حل آنها با الگوی عمومی زیر صورت می‌گیرد:

$$y'=f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی فوق، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بدست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx \Rightarrow g(x,y,c)=0$$

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=e^{x+y}$ را بدست آورید.

حل.

$$y'=e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^x\times e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y}=e^x dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int e^{-y}dy=\int e^x dx \Rightarrow (-e^{-y})=e^x+c$$

ب- معادلات دیفرانسیل جدا شونده به فرم باز.

نمایش عمومی این دسته از معادلات به صورت $p_1(x)p_2(y)dx+q_1(x)q_2(y)dy=0$ می‌باشد، که حل آنها با الگوی عمومی زیر صورت می‌گیرد:

$$p_1(x)p_2(y)dx=-q_1(x)q_2(y)dy \Rightarrow \frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy=-\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int\frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy=-\int\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx \Rightarrow g(x,y,c)=0$$

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله $(1+x^3)dy-x^2y\,dx=0$ را تعیین کنید.

حل.

$$(1+x^3)dy=x^2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{x^2}{1+x^3}dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int\frac{dy}{y}=\frac{1}{3}\int(\frac{3x^2}{1+x^3})dx \Rightarrow$$

$$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+c$$

مثال ۱. کدامیک از جوابهای زیر جواب معادله دیفرانسیل $2xy'-y=0$ است؟

۱) $y=e^{k\sqrt{x}}$ ۲) $y=kx^2$ ۳) $y=\frac{k}{\sqrt{x}}$ ۴) $y=k\sqrt{x}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$2xy'=y \Rightarrow 2x\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln k \Rightarrow$$

$$\ln y=\ln\sqrt{x}+\ln k=\ln k\sqrt{x} \xrightarrow{\ln: \text{تابعی ۱-۱ است}} y=k\sqrt{x}$$

مثال ۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}$ *کدام است؟*

۱) $y=(\frac{3}{2}x^3+x)^{\frac{1}{2}}$ ۲) $y=(\frac{2}{3}x^2+c)^{\frac{1}{3}}$ ۳) $y=(\frac{3}{2}x^2+c)^{\frac{1}{3}}$ ۴) $y=(\frac{2}{3}x^3+c)^{\frac{1}{2}}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}\Rightarrow y^2dy=x\,dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}\frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow y^3=\frac{3}{2}x^2+3c\Rightarrow y^3=\frac{3}{2}x^2+3c\Rightarrow$$

$$y=(\frac{3}{2}x^2+3c)^{\frac{1}{3}}\quad\Rightarrow\quad y=(\frac{3}{2}x^2+C)^{\frac{1}{3}}\quad;(3c=C)$$

مثال ۳. *کدامیک از توابع زیر جواب عمومی معادله* $y'=e^{x-y}$ *می‌باشد؟*

۱) $x=\mathrm{Ln}(c+e^{-y})$ ۲) $e^x=\mathrm{Ln}(c-e^{-y})$ ۳) $y=\mathrm{Ln}(c+e^x)$ ۴) $e^y=\mathrm{Ln}(c-e^x)$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y'=e^{x-y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}\Rightarrow e^y\,dy=e^x\,dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}e^y=e^x+c\Rightarrow y=\mathrm{Ln}(e^x+c)$$

مثال ۴. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $\frac{dy}{dx}=x(y-1)$ *کدام است؟*

۱) $y=\mathrm{Ln}|xy|+c$ ۲) $y=\mathrm{Ln}|\frac{x}{y}|+c$ ۳) $y=\mathrm{Ln}|\frac{y}{x}|+c$ ۴) $y=\mathrm{Ln}|x(y-1)|+c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}\int(\frac{y-1}{y})dy=\mathrm{Ln}|x|+c\quad\Rightarrow\quad y-\mathrm{Ln}|y|=\mathrm{Ln}|x|+c\quad\Rightarrow$$

$$y=\mathrm{Ln}|y|+\mathrm{Ln}|x|+c\quad\Rightarrow\quad y=\mathrm{Ln}|xy|+c$$

مثال ۵. *جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی* $\frac{dy}{dx}=e^{3x-2y}+x^2e^{-2y}$ *عبارت است از:*

۱) $y=e^x+c$ ۲) $e^{2y}=Ae^x+x+x^2$

۳) $y=e^{2x}+x+3cx^2$ ۴) $3e^{2y}=2(e^{3x}+x^3)+c$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\frac{dy}{dx}=e^{3x}e^{-2y}+x^2e^{-2y}=e^{-2y}(e^{3x}+x^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{e^{-2y}}=(e^{3x}+x^2)\,dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}$$

$$\frac{1}{2}e^{2y}=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{x^3}{3}+c\quad\Rightarrow\quad 3e^{2y}=2(e^{3x}+x^3)+2c\quad\Rightarrow\quad 3e^{2y}=2(e^{3x}+x^3)+C\quad;(2c=C)$$

مثال ۶. *جواب معادله دیفرانسیل* $(y+1)dx-\mathrm{tgx}\,dy=0$ *کدام گزینه است؟*

۱) $y=c\sin x+1$ ۲) $y=c\cos x+1$ ۳) $y=\mathrm{ctgx}+1$ ۴) $y=c\sin x-1$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$(y+1)\,dx=\mathrm{tgx}\,dy\Rightarrow\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{\mathrm{tgx}}\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{\mathrm{tgx}}\Rightarrow\mathrm{Ln}|y+1|=\mathrm{Ln}|\sin x|+\mathrm{Ln}c\ \text{یا}$$

$$\mathrm{Ln}(y+1)=\mathrm{Ln}(c\sin x)\xrightarrow{\mathrm{Ln}:\text{تابعی ۱ ـ ۱ است}}y+1=c\sin x\quad\Rightarrow\quad y=c\sin x-1$$

مثال ۷. *اگر نمودار جواب خصوصی معادله دیفرانسیل* $x^2y'+2=0$ *از نقطه* $(2,2)$ *بگذرد، از کدام نقطه باید بگذرد؟*

۱) $(0,2)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(3,1)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$x^2y'+2=0\quad\Rightarrow\quad x^2\frac{dy}{dx}=-2\quad\Rightarrow\quad dy=(\frac{-2}{x^2})dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}y=\frac{2}{x}+c\quad\text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: }(x=2\ \&\ y=2)\ \Rightarrow\ \text{از نقطه }(2,2)\text{ می‌گذرد}}(2)=\frac{2}{(2)}+c\quad\Rightarrow\quad c=1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: }c=1}y=\frac{2}{x}+1\qquad\text{(جواب خصوصی)}$$

با جایگذاری گزینه‌ها در جواب خصوصی، تنها گزینه «۳» پاسخ صحیح می‌باشد:

$$x=1\ \Rightarrow\ y=\frac{2}{(1)}+1=3$$

مثال ۸. *اگر* $\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{10}\sqrt{y}$ *،* $y(0)=9$ *و* t *بر حسب ثانیه باشد، آنگاه لحظه‌ای که در آن مقدار تابع* $y(t)$ *صفر شود عبارت است از:*

۱) $t=60\ \sec$ ۲) $t=120\ \sec$ ۳) $t=150\ \sec$ ۴) $t=90\ \sec$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-1}{10}\sqrt{y}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{\sqrt{y}}=(\frac{-1}{10})dt\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}2\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=(\frac{-1}{10})t+c\quad\Rightarrow$$

$$2\sqrt{y(t)}=(\frac{-1}{10})t+c\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: }y(0)=9\ \Rightarrow\ (t=0\ \&\ y=9)}2\sqrt{9}=(\frac{-1}{10})(0)+c\quad\Rightarrow\quad c=6$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: }(y(t)=0\ \&\ c=6)}0=2\sqrt{y(t)}=(\frac{-1}{10})(t)+6\quad\Rightarrow\quad t=60\sec$$

مثال ۹. *جواب معادله دیفرانسیل معمولی* $x\frac{dy}{dx}+y^2=4$ *مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟*

۱) $y=\frac{2(cx^4-1)}{cx^4+1}$ ۲) $y=cx^4+1$

۳) $y=\frac{2(cx^4+1)}{cx^2}$ ۴) بعلت غیرخطی بودن جواب ندارد.

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$x\frac{dy}{dx}=۴-y^۲ \Rightarrow \frac{dy}{۴-y^۲}=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int\frac{dy}{۴-y^۲}=Ln\,x+Ln\,c=Ln(cx)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به یادآوری}} \frac{۱}{۴}Ln\left|\frac{۲+y}{۲-y}\right|=Ln(cx) \Rightarrow Ln\left|\frac{۲+y}{۲-y}\right|=۴Ln\,cx=Ln(cx)^۴$$

$$\xrightarrow{Ln:\text{ تابعی ۱ـ۱ است}} \frac{۲+y}{۲-y}=c^۴x^۴ \Rightarrow \frac{۲+y}{۲-y}=C\,x^۴ \quad ;(c^۴=C) \Rightarrow$$

$$y(۱+Cx^۴)=۲Cx^۴-۲ \Rightarrow y=\frac{۲(Cx^۴-۱)}{Cx^۴+۱}$$

یادآوری. $$\int\frac{dy}{a^۲-y^۲}=\frac{۱}{۲a}Ln\left|\frac{a+y}{a-y}\right|$$

مثال ۱۰. *در حل معادله دیفرانسیل $dr=b(\cos\theta\,dr+r\sin\theta\,d\theta)$ همراه با شرط $(r=۱\ ,\ \theta=\frac{\pi}{۲})$، چنانچه مقدار $\theta=-\frac{\pi}{۲}$ باشد آنگاه مقدار r برابر است با:*

۱) -۱ ۲) b ۳) ۱ ۴) $-b$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$dr=b\cos\theta\,dr+br\sin\theta\,d\theta \Rightarrow (۱-b\cos\theta)dr=br\sin\theta\,d\theta \Rightarrow \frac{dr}{r}=\frac{b\sin d\theta}{۱-b\cos\theta}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} Ln\,r=\int\left(\frac{b\sin\theta}{۱-b\cos\theta}\right)d\theta=Ln|۱-b\cos\theta|+Lnc \Rightarrow Ln\,r=Ln(c(۱-b\cos\theta))$$

$$\xrightarrow{Ln:\text{ تابعی ۱ـ۱ است}} r=c(۱-b\cos\theta) \xrightarrow{(\theta=\frac{\pi}{۲}\ \&\ r=۱):\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} (۱)=c(۱-b\cos(\frac{\pi}{۲})) \Rightarrow c=۱$$

$$\xrightarrow{(\theta=-\frac{\pi}{۲}\ \&\ c=۱):\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} r\Big|_{(\theta=-\frac{\pi}{۲})}=(۱)(۱-b\cos(-\frac{\pi}{۲}))=۱ \Rightarrow r(-\frac{\pi}{۲})=۱$$

مثال ۱۱. *در حل معادله دیفرانسیل $xy\,dx-(x+۲)dy=۰$ همراه با شرایط $y(۰)=۱$ چنانچه مقدار $x=۱$ باشد، آنگاه مقدار y برابر است با:*

۱) $\frac{۴}{۹}e$ ۲) $\frac{۹}{۴}e$ ۳) $\frac{۴}{۹}e^{-۱}$ ۴) $\frac{۹}{۴}e^{-۱}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$xy\,dx=(x+۲)dy \Rightarrow \frac{dx}{y}=\frac{x}{x+۲}dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} Ln|y| \Rightarrow \int\frac{(x+۲)-۲}{x+۲}dx=x-۲Ln|x+۲|+c$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۱;\ (x=۰\ :\ y=۱)\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} Ln(۱)=(۰)-۲Ln((۰)+۲)+c \Rightarrow c=۲Ln۲$$

$$\xrightarrow{(x=۱\ \&\ c=۲Ln۲):\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} Ln(y\Big|_{(x=۱)})=(۱)-۲Ln((۱)+۲)+۲Ln۲ \xrightarrow{۱=Lne}$$

$$Ln(y(۱))=Lne-Ln۳+Ln۴=Ln(\frac{۴e}{۹}) \xrightarrow{Ln:\text{ تابعی ۱ـ۱ است}} y(۱)=\frac{۴e}{۹}$$

مثال ۱۲. *حل معادله دیفرانسیل $(۴x+xy^۲)dx+(y+x^۲y)dy=۰$ با فرض $y(۱)=۲$ برابر است با:*

۱) $(۱+x^۲)(۴+y^۲)=۰$ ۲) $(۱+x^۲)(۴+x^۲)=۴$ ۳) $(۱+x^۲)(۴+y^۲)=۸$ ۴) $(۱+x^۲)(۴+y^۲)=۱۶$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$x(۴+y^۲)dx=-y(۱+x^۲)dy \Rightarrow \frac{xdx}{۱+x^۲}=-\frac{ydy}{۴+y^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \frac{۱}{۲}\int(-\frac{۲x}{۱+x^۲})dx=\frac{۱}{۲}\int(\frac{۲y}{۴+y^۲})dy \Rightarrow \frac{۱}{۲}Ln(۱+x^۲)=-\frac{۱}{۲}Ln(۴+y^۲)+Lnc \Rightarrow$$

$$Ln(۱+x^۲)+Ln(۴+y^۲)=۲Lnc \Rightarrow Ln(۱+x^۲)(۴+y^۲)=Lnc^۲ \xrightarrow{Ln:\text{ تابعی ۱ـ۱ است}} (۱+x^۲)(۴+y^۲)=c^۲$$

$$\xrightarrow{y(۱)=۲;\ (x=۱\ ;\ y=۲)\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} (۱+۱)(۴+۴)=c^۲ \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{c^۲=۱۶:\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} (۱+x^۲)(۴+y^۲)=۱۶$$

مثال ۱۳. *معادله $y'=\frac{xy^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ، $y(۰)=۲$ در $x=۱$ دارای جوابی به صورت زیر است:*

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^۲}{\sqrt{۱-x^۲}} \Rightarrow \frac{dy}{y^۲}=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} (-\frac{۱}{y})=(-\frac{۱}{۲})\int(\frac{-۲x}{\sqrt{۱-x^۲}})dx \Rightarrow \frac{۱}{y}=\sqrt{۱-x^۲}+c$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۲;\ (x=۰\ :\ y=۲)\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} \frac{۱}{(۲)}=\sqrt{۱-(۰)^۲}+c \Rightarrow c=-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{(x=۱\ \&\ c=-\frac{۱}{۲}):\text{ با جایگذاری در جواب عمومی}} \frac{۱}{y\Big|_{(x=۱)}}=\sqrt{۱-(۱)^۲}+(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y(۱)=-۲$$

مثال ۱۴. *آهنگ افزایش جمعیت متناسب با جمعیت است. اگر جمعیت یک شهر در سال ۱۳۴۰، ۴۰/۰۰۰ نفر و در سال ۱۳۷۰، ۶۰/۰۰۰ نفر باشد در سال ۱۴۰۰ جمعیت این شهر چند نفر است؟*

۱) ۸۰/۰۰۰ ۲) ۸۵/۰۰۰ ۳) ۹۰/۰۰۰ ۴) ۹۵/۰۰۰

☑ **حل.** گزینه «۳». اگر تابع $y(t)$ بیانگر میزان جمعیت در زمان t باشد، اینکه میزان افزایش جمعیت متناسب با جمعیت است، معادله رابطه $\frac{dy}{dt}=ky$ می‌باشد، که در آن k ثابت تناسب نامیده می‌شود. بنابراین؛

$$\frac{dy}{dt}=ky \Rightarrow \frac{dy}{y}=kdt \Rightarrow Lny=kt+c \Rightarrow y=e^{kt}\times e^c \Rightarrow y(t)=Ae^{kt} \quad ;(e^c=A)$$

برای سادگی محاسبات، سال ۱۳۴۰ را به عنوان مبدأ زمانی $t=۰$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه؛

$$y(t)=Ae^{kt} \Rightarrow y(۰)=Ae^{k\times ۰}=A \xrightarrow{y(۰)=۴۰,۰۰۰} A=۴۰,۰۰۰ \Rightarrow y(t)=۴۰,۰۰۰\,e^{kt}$$

از آنجائیکه طبق فرض مسأله $y(۱۳۷۰) = ۶۰,۰۰۰$ می‌باشد و با توجه به اینکه مبدأ زمانی را سال ۱۳۴۰ گرفتیم، داریم؛

$$y(۳۰) = y(۱۳۷۰-۱۳۴۰) = ۶۰,۰۰۰ .$$

در اینصورت؛

$$y(t) = ۴۰,۰۰۰\, e^{kt} \xrightarrow{y(۳۰)=۶۰,۰۰۰} ۶۰,۰۰۰ = ۴۰,۰۰۰\, e^{۳۰k} \quad \Rightarrow \quad e^{۳۰k} = \frac{۳}{۲} \quad \Rightarrow \quad y(۳۰) = ۴۰,۰۰۰\, e^{k\times ۳۰}$$

$$۳۰k = \mathrm{Ln}\frac{۳}{۲} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱}{۳۰}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}$$

در نتیجه، میزان جمعیت در سال ۱۴۰۰، با توجه به اینکه سال ۱۳۴۰ بعنوان مبدأ زمانی است، بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{میزان جمعیت در سال ۱۴۰۰} = y(۱۴۰۰-۱۳۴۰) = y(۶۰)$$

در اینصورت؛

$$y(t) = ۴۰,۰۰۰\, e^{kt} \xrightarrow{t=۶۰ \ \&\ k=\frac{۱}{۳۰}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}} y(۶۰) = ۴۰,۰۰۰ \times e^{(\frac{۱}{۳۰}\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲})\times ۶۰} \quad \Rightarrow$$

$$y(۶۰) = ۴۰,۰۰۰\, e^{۲\mathrm{Ln}\frac{۳}{۲}} = ۴۰,۰۰۰\, e^{\mathrm{Ln}\frac{۹}{۴}} \quad \Rightarrow \quad y(۶۰) = ۹۰,۰۰۰$$

مثال ۱۵. ***اگر ۲۰ درصد یک جسم رادیواکتیو در سال ناپدید شود، نیمه عمر این جسم رادیواکتیو چقدر است؟***

۱) ۱/۳۸۶ سال ۲) ۲/۲۳ سال ۳) ۳/۱۰۶۷ سال ۴) ۶/۹۳۱ سال

نکته. اگر $m(t)$ جرم یک ماده رادیواکتیو در لحظه t و $m_۰$ جرم آن درلحظه $t = ۰$ باشد، آنگاه؛

۱ـ نیم عمر یک ماده رادیواکتیو، مدت زمان لازم جهت واپاشی نصف جرم آن می‌باشد، به عبارتی، اگر T، نیم عمر یک ماده رادیواکتیو باشد، داریم: $m(T) = \frac{۱}{۲}m_۰$.

۲ـ آهنگ واپاشی یک ماده رادیواکتیو، متناسب با جرم آن است، در واقع $\frac{dm}{dt} = km$، که در آن k ضریب تناسب است. در اینصورت؛

$$\frac{dm}{dt} = km \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} = k\,dt \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شوند}} \mathrm{Ln}\,m = kt + c \quad \Rightarrow \quad m = Ae^{kt}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی ؛ } m_۰ = m|_{(t=۰)}} m_۰ = Ae^{k\times ۰} = A \quad \Rightarrow \quad m(t) = m_۰ e^{kt}$$

بنابراین؛ اگر $m_۰$ جرم اولیه یک ماده رادیواکتیو باشد و k ثابت آهنگ واپاشی، جرم ماده رادیواکتیو پس از گذشت زمان t از رابطه $m(t) = m_۰ e^{kt}$ بدست می‌آید.

☑ **حل.** گزینه «۳». از آنجائیکه ۲۰ درصد جسم ماده رادیواکتیو مفروض، در سال ناپدید می‌شود، بنابراین در واقع بعد از گذشت $\frac{۱}{۲}$ سال، ۸۰ درصد جرم اولیه آن باقی می‌ماند. به عبارت دیگر؛ $m(۱) = ۰/۸m$.

در اینصورت؛

$$m(t) = m_۰e^{kt} \quad \Rightarrow \quad m(۱) = m_۰e^{k\times ۱} \xrightarrow{m(۱)=۰/۸m_۰} ۰/۸m_۰ = m_۰e^{k} \quad \Rightarrow \quad e^{k} = ۰/۸ \quad \Rightarrow \quad k = \mathrm{Ln}\,۰/۸$$

با توجه به اینکه در لحظه نیمه عمر T، نصف جرم اولیه ماده رادیواکتیو مفروض واپاشی می‌شود، در نتیجه؛

$$m(t) = m_۰e^{kt} \xrightarrow{t=T} m(T) = m_۰e^{kT} \xrightarrow{m(T)=\frac{۱}{۲}m_۰ \ \&\ k=\mathrm{Ln}\,۰/۸} \frac{۱}{۲}m_۰ = m_۰e^{(\mathrm{Ln}\,۰/۸)T}$$

$$e^{(\mathrm{Ln}\,۰/۸)\,T} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{Ln}\,۰/۸)T = \mathrm{Ln}\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\mathrm{Ln}\frac{۱}{۲}}{\mathrm{Ln}\,۰/۸} = ۳/۱۰۶$$

معادلات همگن

تعریف. تابع $h = h(x,y)$ را همگن از درجه r می‌نامیم هرگاه به ازاء هر $\lambda > ۰$ تساوی $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r h(x,y)$; $\exists r$ برقرار باشد.

به عنوان مثال؛

الف ـ تابع $h(x,y) = y\cos(\frac{y}{x})$ همگن از درجه $r = ۱$ است:

$$h(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)\cos(\frac{\lambda y}{\lambda x}) = \lambda(y\cos(\frac{y}{x})) = \lambda^۱ h(x,y)$$

ب ـ تابع $h(x,y) = x + y + ۱$ همگن نیست:

$$h(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x) + (\lambda y) + ۱ = \lambda x + \lambda y + ۱ \neq \lambda^r (x + y + ۱) \quad ; \forall r \ \ \& \ \ \forall \lambda > ۰$$

تذکر. می‌توان بررسی کرد، چند جمله‌ای $P(x,y)$ همگن از درجه r است، اگر درجه هر جمله آن r باشد. بعنوان مثال چند جمله‌ای $P(x,y) = x + y$ همگن از درجه $r = ۱$ و چند جمله‌ای $P(x,y) = x^۳ + x^۲y + y^۲x$ همگن از درجه $r = ۳$ است.

لازم بذکر است، درجه هر جمله در یک چند جمله‌ای برابر مجموع درجات متغیرهای سازنده آن است، مثلاً درجه جمله $x^m y^n$ برابر $m + n$ می‌باشد.

الف ـ معادلات دیفرانسیل همگن به فرم بسته.

معادله دیفرانسیل با فرم بسته $y' = f(x,y)$ را همگن می‌نامیم، هرگاه تابع $f = f(x,y)$ تابعی همگن از درجه $r = ۰$ باشد.

در اینصورت معادله دیفرانسیل مفروض با استفاده از تغییر متغیر $(\frac{y}{x} = u \ \Rightarrow \ y = xu \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} y' = u + xu')$، به یک معادله جدا شونده تبدیل می‌گردد.

بعنوان مثال. معادله $y' = \frac{x^۲ + y^۲}{xy}$ **را حل کنید.**

حل. تابع $f(x,y) = \frac{x^۲ + y^۲}{xy}$ همگن از درجه $r = ۰$ است:

$$y' = \frac{x^۲ + y^۲}{xy} = (\frac{x}{y}) + (\frac{y}{x}) = \frac{۱}{(\frac{y}{x})} + (\frac{y}{x}) = f(\frac{y}{x})$$

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x} = u \ \Rightarrow \ y' = u + xu')} u + xu' = \frac{۱}{u} + u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{۱}{u} \quad \Rightarrow \quad udu = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \int udu = \int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^۲}{۲} = \mathrm{Ln}|x| + c \quad \Rightarrow \quad u^۲ = ۲\mathrm{Ln}|x| + ۲c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{y^۲}{x^۲} = \mathrm{Ln}|x^۲| + ۲c \quad \Rightarrow \quad y^۲ = x^۲(\mathrm{Ln}|x^۲| + ۲c)$$

ب ــ معادلات دیفرانسیل همگن به فرم باز.

معادله دیفرانسیل با فرم باز $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ را همگن گوییم، هرگاه توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ هر دو همگن از درجه r باشند. در این صورت معادله دیفرانسیل مفروض با استفاده از تغییر متغیر $(\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu \xrightarrow{\text{d(طرفین)}} dy=udx+xdu)$، به یک معادله جدا شونده تبدیل می‌گردد.

بعنوان مثال. جواب عمومی دیفرانسیل $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$ را حل کنید.

حل.

$$x(1+(\frac{y}{x}))\,dx+x((\frac{y}{x})-1)\,dy=0 \xrightarrow{\frac{1}{x}\times\text{(معادله)}} (1+(\frac{y}{x}))\,dx+((\frac{y}{x})-1)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=u\,dx+x\,du);\ \text{فرم باز همگن}} (1+u)\,dx+(u-1)(u\,dx+x\,du)=0 \Rightarrow$$

$$(1+u)\,dx+u(u-1)\,dx+x(u-1)\,du=0 \Rightarrow (1+u^2)\,dx=x(1-u)\,du \Rightarrow (\frac{1-u}{1+u^2})\,du=\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int(\frac{2u}{1+u^2})\,du=\text{Ln}|x|+c \Rightarrow \text{Arctag}\,u-\frac{1}{2}\text{Ln}(1+u^2)=\text{Ln}|x|+c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \text{Arctg}(\frac{y}{x})-\frac{1}{2}\text{Ln}\,(1+(\frac{y}{x})^2)=\text{Ln}|x|+c$$

مثال ۱۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{3x^2+y^2}{xy}=y'$ کدام است؟

۱) $x^2y^2=\text{Ln}|x|+c$ ۲) $x^2-y^2=x^2\text{Ln}|x|+cxy$

۳) $y^2=6x^2(\text{Ln}|x|+c)$ ۴) $y\text{Ln}|x|=x^2-y^2+c$

حل. گزینه «۳».

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu');\ \text{فرم بسته همگن}} u+xu'=\frac{3x^2+(xu)^2}{x(xu)}=\frac{3+u^2}{u}=\frac{3}{u}+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{3}{u} \Rightarrow$$

$$\frac{u}{3}du=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \frac{u^2}{6}=\text{Ln}|x|+c \Rightarrow u^2=6(\text{Ln}|x|+c)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} (\frac{y}{x})^2=6(\text{Ln}|x|+c) \Rightarrow y^2=6x^2(\text{Ln}|x|+c)$$

مثال ۱۷. جواب معادله همگن $(x-y)\,dy=(x+y)\,dx$ عبارت است از:

۱) $cx=1-\frac{y^2}{x^2}$ ۲) $\text{tg}^{-1}\frac{y}{x}-\text{Ln}\sqrt{x^2+y^2}=c$

۳) $\frac{y}{x}-2\text{Ln}(1+\frac{y}{x})=\text{Ln}cx$ ۴) $cx=(1+\frac{y}{x})^2$

حل. گزینه «۲».

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=u\,dx+x\,du);\ \text{فرم باز همگن}} (x+(xu))\,dx-(x-(xu))(u\,dx+x\,du)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{x}\times\text{(معادله)}} (1+u)\,dx-(1-u)u\,dx-(1-u)x\,du=0 \Rightarrow (1+u^2)\,dx=(1-u)x\,du$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \int(\frac{1}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2})\,du=\text{Ln}\,x+c \Rightarrow$$

$$\text{tag}^{-1}u-\frac{1}{2}\text{Ln}(1+u^2)=\text{Ln}x+c \Rightarrow \text{tg}^{-1}u-\text{Ln}\sqrt{1+u^2}-\text{Ln}\,x=c \Rightarrow \text{tg}^{-1}u-\text{Ln}(x\sqrt{1+u^2})=c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \text{tag}^{-1}(\frac{y}{x})-\text{Ln}(x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2})=c \Rightarrow \text{tag}^{-1}(\frac{y}{x})-\text{Ln}(\sqrt{x^2+y^2})=c$$

مثال ۱۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{2x^3+y^3}{xy^2}=y'$ برابر است با:

۱) $y=\sqrt{x^2+c_1}+c_2\text{Ln}x$ ۲) $y=x^2\sqrt{e^x+2}+c$

۳) $y=x^3\sqrt[3]{6\text{Ln}x+c}$ ۴) $y=\sqrt{6x^2}+c$

حل. گزینه «۳».

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu');\ \text{فرم بسته همگن}} u+xu'=\frac{2x^3+(xu)^3}{x(xu)^2}=\frac{2+u^3}{u^2} \Rightarrow u+xu'=\frac{2}{u^2}+u \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2}{u^2} \Rightarrow u^2du=2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \frac{u^3}{3}=2\,\text{Ln}\,x+c \Rightarrow u^3=6\text{Ln}\,x+3c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} (\frac{y}{x})^3=6\text{Ln}\,x+3c \Rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt[3]{6\text{Ln}\,x+3c} \Rightarrow y=x\sqrt[3]{6\text{Ln}\,x+C};\ (3c=C)$$

مثال ۱۹. حل معادله $(x^2+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$ با شرایط $y(1)=0$ عبارت است از:

۱) $x(x^2+3y^2)=1$ ۲) $x^2(x+3y)=1$ ۳) $x(x^2+y^2)=1$ ۴) $x^2+\frac{3y^2}{x^2}=1$

حل. گزینه «۱».

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=udx+xdu);\ \text{فرم باز همگن}} (x^2+(xu)^2)dx+2x(xu)(udx+xdu)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{x^2}\times\text{(معادله)}} (1+u^2)\,dx+2u^2dx+2xu\,du=0 \Rightarrow (1+3u^2)\,dx=-2xu\,du \Rightarrow \frac{-2u}{1+3u^2}\,du=\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} -\frac{1}{3}\int(\frac{6u}{1+3u^2})\,du=\text{Ln}\,x+\text{Ln}\,c=\text{Ln}(cx) \Rightarrow -\frac{1}{3}\text{Ln}(1+3u^2)=\text{Ln}(cx)$$

$$\text{Ln}(1+3u^2)=-3\text{Ln}(cx)=\text{Ln}(cx)^{-3} \xrightarrow{\text{Ln: تابعی 1-1 است}} 1+3u^2=c^{-3}x^{-3} \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} 1+3(\frac{y}{x})^2=\frac{1}{c^3x^3}$$

$$\xrightarrow{y(1)=0 \Rightarrow (x=1\ \&\ y=0)} 1+0=\frac{1}{c^3} \Rightarrow c=1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } c=1 \text{ در جواب عمومی}} 1+3(\frac{y}{x})^2=\frac{1}{x^3} \Rightarrow x(x^2+3y^2)=1$$

مثال ۲۰. *تابع $y = f(x)$ یک حل خاص و حقیقی معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx} = xtg(\frac{y}{x}) + y$ می‌باشد که از نقطه $y(۲) = \pi$ عبور می‌کند، $y = f(x)$ دارای کدامیک از خواص زیر است؟*

۱) تابع $y = f(x)$ از نقطه $(\frac{۲}{۳}, \pi)$ می‌گذرد.
۲) تابع $y = f(x)$ در فاصله $-۲ \le x \le ۲$ تعریف شده است.
۳) تابع $y = f(x)$ در فاصله $-۳ \le x \le ۳$ تعریف شده است.
۴) نقطهٔ $(۲, -\pi)$ هم روی منحنی قرار دارد.

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{\frac{۱}{x}\times \text{(معادله)}} \frac{dy}{dx} = tag(\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x})$$

$$\xrightarrow{\text{فرم بسته همگن ;}\ (\frac{y}{x}=u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx})} u + x\frac{du}{dx} = tg\,u + u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = tag\,u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{tag\,u} = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{: جدا شونده}} Ln(\sin u) = Ln\,x + Ln\,c = Ln(cx) \xrightarrow{Ln\text{: تابعی ۱-۱ است}} \sin u = c\,x$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \sin(\frac{y}{x}) = cx \quad \xrightarrow{y(۲)=\pi \Rightarrow (x=۲\ \&\ y=\pi)} \sin(\frac{\pi}{۲}) = c\times ۲ \quad \Rightarrow \quad c = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \sin(\frac{y}{x}) = \frac{x}{۲} \xrightarrow{-۱ \le \sin(\frac{y}{x}) \le ۱} -۱ \le \frac{x}{۲} \le ۱ \quad \Rightarrow \quad -۲ \le x \le ۲$$

مثال ۲۱. *جواب عمومی معادله $y'(x^۲ + y^۲) = xy$ کدام گزینه است؟*

۱) $\frac{y^۲}{۲x^۲} - Ln|y| = c$
۲) $\frac{x^۲}{۲y^۲} - Ln|y| = c$
۳) $\frac{x^۲}{۲y^۲} - Ln|x| = c$
۴) $\frac{x^۲}{۲y^۲} + Ln|x| = c$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y' = \frac{xy}{x^۲ + y^۲} \xrightarrow{\text{فرم بسته همگن ; } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} u + xu' = \frac{x(xu)}{x^۲ + (xu)^۲} = \frac{u}{۱+u^۲} \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{۱+u^۲} - u = \frac{-u^۳}{۱+u^۲} \quad \Rightarrow \quad -\frac{۱+u^۲}{u^۳}du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{: جدا شونده}} -\int(\frac{۱}{u^۳} + \frac{۱}{u})du = Ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲u^۲} - Ln|u| - Ln|x| = c \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲u^۲} - Ln|ux| = c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{۱}{۲(\frac{y}{x})^۲} - Ln|(\frac{y}{x})x| = c \quad \Rightarrow \quad \frac{x^۲}{۲y^۲} - Ln|y| = c$$

مثال ۲۲. *جواب عمومی معادله $y' = \frac{y+x}{y-x}$ عبارت است از:*

۱) $x^۲ + ۲xy - y^۲ = c$
۲) $x^۲ + ۲xy + y^۲ = c$
۳) $x^۲ + xy + y^۲ = c$
۴) $x^۲ - ۲xy - y^۲ = c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{فرم بسته همگن ; } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} u + xu' = \frac{(xu)+x}{(xu)-x} = \frac{u+۱}{u-۱} \quad \Rightarrow \quad xu' = \frac{u+۱}{u-۱} - u \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{۱+۲u-u^۲}{u-۱} \quad \Rightarrow \quad \frac{u-۱}{-u^۲+۲u+۱}du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{: جدا شونده}} -\frac{۱}{۲}\int(\frac{-۲u+۲}{-u^۲+۲u+۱})du = Ln\,x + Ln\,c = Ln(cx) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}Ln(۱+۲u-u^۲) = Ln(cx) \Rightarrow$$

$$Ln(۱+۲u-u^۲) = -۲Ln(cx) = Ln(cx)^{-۲} \xrightarrow{Ln\text{: تابعی ۱-۱ است}} ۱+۲u-u^۲ = (cx)^{-۲}$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} ۱+۲(\frac{y}{x}) - (\frac{y}{x})^۲ = \frac{۱}{c^۲x^۲} \xrightarrow{x^۲\times \text{(طرفین تساوی)}} x^۲ + ۲yx - y^۲ = C \quad ; (\frac{۱}{c^۲} = C)$$

مثال ۲۳. *جواب معادله دیفرانسیل $\frac{y}{x}cos\frac{y}{x}dx - (\frac{x}{y}sin\frac{y}{x} + cos\frac{y}{x})dy = ۰$ برابر است با:*

۱) $\frac{y}{x}\sin(\frac{y}{x}) = c$
۲) $x\sin(\frac{y}{x}) = c$
۳) $y\sin(\frac{y}{x}) = c$
۴) $\frac{x}{y}\sin(\frac{y}{x}) = c$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{فرم باز همگن : } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=udx+xdu)} u\cos u\,dx - (\frac{۱}{u}\sin u + \cos u)(udx + xdu) = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$u\cos u\,dx - \sin u\,dx - (\cos u)u\,dx - (\frac{۱}{u}\sin u)x\,du - (\cos u)x\,du = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$-\sin u\,dx = x(\frac{\sin u}{u} + \cos u)du \quad \Rightarrow \quad (\frac{۱}{u} + cotg\,u)du = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{: جدا شونده}} Ln|u| + Ln|\sin u| = -Ln|x| + Ln\,c \xrightarrow{Ln\text{: تابعی ۱-۱ است}} x\,u\sin u = c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} x(\frac{y}{x})\sin(\frac{y}{x}) = c \quad \Rightarrow \quad y\sin(\frac{y}{x}) = c$$

مثال ۲۴. *جواب عمومی معادله $xy' - y - x\sin\frac{y}{x} = ۰$ عبارت است از:*

۱) $y = ۲x\ tg^{-۱}(cx)$
۲) $\cos ec\frac{y}{x} - cotg\frac{y}{x} = cx$
۳) $y = ۲x\ tg(cx)$
۴) موارد (۱) و (۲)

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\frac{۱}{x}\times \text{(معادله)}} y' - (\frac{y}{x}) - \sin(\frac{y}{x}) = ۰ \xrightarrow{\text{فرم بسته همگن ; } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} (u+xu') - u - \sin u = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \sin u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{: جدا شونده}} \int\frac{du}{\sin u} = Ln|cx| \quad ; (۱)$$

اکنون با توجه به تساویهای $\int\frac{du}{\sin u} = Ln|\cos ec\,u - cotg\,u| = Ln|tag\frac{u}{۲}|$ بدست می‌آید:

$$I)\ \int\frac{du}{\sin u} = Ln|\cos ec\,u - cotg\,u| \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} Ln|\cos ec\,u - cotg\,u| = Ln|cx|$$

$$\xrightarrow{Ln\text{: تابعی ۱-۱ است}} \cos ec\,u - cotg\,u = cx \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \cos ec\frac{y}{x} - cotg\frac{y}{x} = cx$$

$$II)\ \int\frac{du}{\sin u} = Ln|tag\frac{u}{۲}| \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} Ln|tag\frac{u}{۲}| = Ln|cx| \xrightarrow{Ln\text{: تابعی ۱-۱ است}} tag\frac{u}{۲} = cx \Rightarrow \frac{u}{۲} = tag^{-۱}(cx)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{(\frac{y}{x})}{۲} = tag^{-۱}(cx) \quad \Rightarrow \quad y = ۲x\,tag^{-۱}(cx)$$

مثال ۲۵. *جواب عمومی معادله* $(x+\sqrt{x^2-xy})dy - y\,dx = 0$ *کدام گزینه زیر است؟*

۱) $|x|(\sqrt{1-\frac{y}{x}}-1)^2 = c$ ۲) $|x|(\sqrt{1+\frac{y}{x}}+1)^2 = c$ ۳) $|x|(\sqrt{1-\frac{y}{x}}+1)^2 = c$ ۴) $|y|(\sqrt{1-\frac{y}{x}}-1)^2 = c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{فرم باز همگن}\ :\ (\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=udx+xdu)} (x+\sqrt{x^2-x(xu)})(udx+xdu)-(xu)dx=0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{x}\times(\text{معادله})} (1+\sqrt{1-u})(udx+xdu)-udx=0 \Rightarrow (1+\sqrt{1-u})udx+(1+\sqrt{1-u})xdu-udx=0 \Rightarrow$$

$$(u+u\sqrt{1-u}-u)dx=-x(1+\sqrt{1-u})du \Rightarrow u\sqrt{1-u}\,dx=-x(1+\sqrt{1-u})du \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1-u}}{u\sqrt{1-u}}du=\frac{-dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \int(\frac{1}{u\sqrt{1-u}}+\frac{1}{u})du=-\ln|x|+\ln c \xrightarrow{\text{با توجه به یادآوری}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-u}-1}{\sqrt{1-u}+1}\right|+\ln|u|+\ln|x|=\ln c$$

$$\xrightarrow{\frac{\sqrt{1-u}-1}{\sqrt{1-u}+1}\ \text{با گویاکردن کسر}} \ln\left|\frac{(\sqrt{1-u}-1)^2}{-u}\times u\times x\right|=\ln c \xrightarrow{\ln:\ \text{تابعی ۱ـ۱ است}} |x|(\sqrt{1-u}-1)^2=c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} |x|(\sqrt{1-\frac{y}{x}}-1)^2=c$$

یادآوری. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$. در نتیجه؛

$$\int\frac{du}{u\sqrt{1-u}} \xrightarrow{\sqrt{1-u}=x\ \text{با تغییر متغیر}} \int\frac{-2x\,dx}{(1-x^2)x}=2\int\frac{dx}{x^2-1}=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \xrightarrow{x=\sqrt{1-u}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-u}-1}{\sqrt{1-u}+1}\right|$$

معادلات دیفرانسیل با یک متغیر خطی

معادلات دیفرانسیل که بر حسب یک عبارت خطی ـ عباراتی با درجه حداکثر ۱ـ بیان شوند، معادلات با یک متغیر خطی نامیده می‌شوند.

الف ـ معادلات دیفرانسیل با یک متغیر خطی به فرم بسته.

این دسته از معادلات دارای نمایشی به صورت $y'=f(ax+by+c)$ می‌باشند، که با استفاده از تغییر متغیر $(ax+by+c=u \Rightarrow a+by'=u' \Rightarrow y'=\frac{u'-a}{b})$، به یک معادله جداشونده تبدیل می‌گردند.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $y'=-(x-y)^2+2$ **را حل کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{(x-y=u \Rightarrow y'=1-u')\ ;\text{معادله با یک متغیر خطی}} 1-u'=-u^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=u^2-1 \Rightarrow \frac{du}{u^2-1}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=x+c \Rightarrow \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=2x+2c \xrightarrow{u=x-y} \ln\left|\frac{x-y-1}{x-y+1}\right|=2x+2c \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x-y-1}{x-y+1}\right|=e^{2x+2c}=Ce^{2x} \qquad ;(e^{2c}=C)$$

ب ـ معادلات دیفرانسیل با یک متغیر خطی به فرم باز.

این دسته از معادلات دارای نمایش به صورت $P(ax+by+c)dx+Q(ax+by+c)dy=0$ می‌باشند، که با استفاده از تغییر متغیر $(ax+by+c=u \Rightarrow adx+bdy=du \Rightarrow dy=\frac{du-adx}{b})$، به یک معادله جدا شونده تبدیل می‌گردد.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx+(3-x-y)dy=0$ **را بدست آورید.**

حل.

$$(x+y)dx+\big(3-(x+y)\big)dy=0 \xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow dy=du-dx)} udx+(3-u)(du-dx)=0 \Rightarrow$$

$$udx+(3-u)du-(3-u)dx=0 \Rightarrow (2u-3)dx=(u-3)du \Rightarrow \frac{u-3}{2u-3}du=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{، جدا شونده}} \int\frac{u-3}{2u-3}du=x+c \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{(2u-3)-3}{2u-3}du=x+c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}u-\frac{3}{4}\ln|2u-3|=x+c \Rightarrow 2u-3\ln|2u-3|=4x+4c$$

$$\xrightarrow{u=x+y} 2x+2y-3\ln|2x+2y-3|=4x+4c \quad ;(4c=C) \Rightarrow 2y-3\ln|2x+2y-3|=2x+C$$

معادلات دیفرانسیل با دو متغیر خطی.

معادلات دیفرانسیل که بر حسب دو عبارت خطی بیان شوند، معادلات با دو متغیر خطی نامیده می‌شوند.

الف ـ معادلات دیفرانسیل با دو متغیر خطی به فرم بسته .

این دسته از معادلات دارای نمایش عمومی به صورت $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ می‌باشند. برای بررسی این دسته، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

۱ ـ الف) خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ ، موازی هم هستند، به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=t$.

در اینصورت با جایگذاری $(a=ta' \ \&\ b=tb')$ در معادله مفروض، یک معادله دیفرانسیل با یک متغیر خطی $y'=f(a'x+b'y)$ حاصل می‌شود.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{-x-y}{2x+2y+1}$ **را بدست آورید.**

حل.

$$\begin{cases}-x-y=0\\ 2x+2y+2=0\end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=-\frac{1}{2}} (a'=-2a \ \&\ b'=-2b) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} y'=\frac{-(x+y)}{2(x+y)+1}$$

معادله حاصل ، یک معادله دیفرانسیل با یک متغیر خطی است:

$$\xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow y'=u'-1)} u'-1=\frac{-u}{2u+1} \Rightarrow \frac{du}{dx}=1-\frac{u}{2u+1}=\frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow \frac{2u+1}{u+1}du=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{، جدا شونده}} \int(\frac{(2u+2)-1}{u+1})du=x+c \Rightarrow 2u-\ln|u+1|=x+c$$

$$\xrightarrow{u=x+y} 2x+2y-\ln|x+y+1|=x+c \Rightarrow x+2y-\ln|x+y+1|=c$$

۲ـالف) دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ موازی هم نباشند، به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

در اینصورت اگر (α,β) مختصات محل برخورد دو خط مفروض باشد ـ که از حل دستگاه $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ بدست می‌آید ـ با تبدیل مختصات $(x=X+\alpha\ ,\ y=Y+\beta)$ در معادله مفروض، یک معادله دیفرانسیل همگن با نمایش $Y'=\bar{f}(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y})$ حاصل می‌شود.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{x+y-3}{x-y+1}$ را تعیین کنید.

حل.

$$\begin{cases}x+y-3=0\\x-y+1=0\end{cases}\xrightarrow{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}}\text{مختصات محل تلاقی}:(\alpha=1\ \&\ \beta=2)\xrightarrow{\text{با تغییر مختصات}:\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}}Y'=\frac{X+Y}{X-Y}$$

$$\xrightarrow{\text{فرم بسته همگن};\ (\frac{Y}{X}=u\ \Rightarrow\ Y'=u+Xu')}u+Xu'=\frac{X+(Xu)}{X-(Xu)}=\frac{1+u}{1-u}\quad\Rightarrow\quad X\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du=\frac{dX}{X}\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}}\int(\frac{1}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2})\,du=\text{Ln}|X|+\text{Ln}\,c=\text{Ln}(c|X|)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به یادآوری}}\text{Arc tg}\,u=\text{Ln}(c|X|)+\text{Ln}(1+u^2)^{\frac{1}{2}}=\text{Ln}(c|X|\times\sqrt{1+u^2})$$

$$\xrightarrow{u=\frac{Y}{X}}\text{Arc tg}(\frac{Y}{X})=\text{Ln}(c|X|\times\sqrt{1+(\frac{Y}{X})^2})=\text{Ln}(c|X|\times\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{|X|})\quad\Rightarrow$$

$$\text{Arc tag}(\frac{Y}{X})=\text{Ln}(c\sqrt{X^2+Y^2})\xrightarrow{\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}}\text{Ln}(c\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2})=\text{Arc tg}(\frac{y-2}{x-1})\quad\Rightarrow$$

$$c\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=e^{\text{Arc tg}(\frac{y-2}{x-1})}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=C\,e^{\text{Arc tg}(\frac{y-2}{x-1})}\qquad;(\frac{1}{c}=C)$$

یادآوری.

۱) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{Arc tg}x$

۲) $\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\text{Ln}(1+x^2)=\text{Ln}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

ب ـ معادلات دیفرانسیل با دو متغیر خطی به فرم باز .

این دسته از معادلات، دارای نمایشی به صورت $P(ax+by+c)\,dx+Q(a'x+b'y+c')\,dy=0$ می‌باشند. برای بررسی این دسته، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

۱ ـ ب) خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ موازی هم باشند، به عبارت دیگر، $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=t$. در اینصورت با جایگذاری $(a=ta'\ \&\ b=tb')$ در معادلهٔ مفروض، یک معادله دیفرانسیل با یک متغیر خطی $\overline{P}(a'x+by')\,dx+\overline{Q}(a'x+b'y)\,dy=0$ حاصل می‌شود.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y+1)^2\,dx+(2x+2y+1)\,dy=0$ را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{cases}x+y+1=0\\2x+2y-1=0\end{cases}\xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{1}{2}}(a'=2a\ \ \&\ \ b'=2b)\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}((x+y)+1)^2dx+\big(2(x+y)+1\big)dy=0$$

معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل با یک متغیر خطی است:

$$\xrightarrow{(x+y=u\ \Rightarrow\ dy=du-dx)}(u+1)^2\,dx+(2u+1)(du-dx)=0\quad\Rightarrow$$

$$(u+1)^2dx+(2u+1)dx-(2u+1)\,du=0\quad\Rightarrow\quad(2u+1)du=-u^2dx\quad\Rightarrow\quad\frac{2u+1}{u^2}\,du=-dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}}2\,\text{Ln}|u|-\frac{1}{u}=-x+c\xrightarrow{u=x+y}2\,\text{Ln}|x+y|-\frac{1}{x+y}+x=c$$

۲ ـ ب) خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ ، موازی هم نباشند، به عبارت دیگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

در اینصورت اگر (α,β) مختصات محل برخورد دو خط مفروض باشد، با تبدیل مختصات $(x=X+\alpha\ ,\ y=Y+\beta)$ در معادله مفروض، یک معادله دیفرانسیل همگن با نمایش $\overline{P}(aX+bY)d+\overline{Q}(a'X+b'Y)dY=0$ حاصل می‌شود.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $(x+y)\,dx+(1-x)\,dy=0$ را حل کنید.

حل.

$$\begin{cases}x+y=0\\1-x=0\end{cases}\xrightarrow{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}}\text{مختصات محل تلاقی}:(\alpha=1\ \&\ \beta=-1)\xrightarrow{\text{با تغییر مختصات}:\begin{cases}x=X+1\\y=Y-1\end{cases}}(X+Y)dX+(-X)dY=0$$

$$\xrightarrow{\text{فرم باز همگن};\ (\frac{Y}{X}=u\ \Rightarrow\ dY=u\,dX+X\,du)}(X+Xu)\,dX+(-X)\ \ (u\,dX+X\,du)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{X}\times\text{(معادله)}}(1+u)dX-u\,dX-X\,du=0\quad\Rightarrow\quad dX=X\,du\quad\Rightarrow\quad du=\frac{dX}{X}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}}u=\text{Ln}\,X+\text{Ln}\,c=\text{Ln}(cX)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{Y}{X}}\frac{Y}{X}=\text{Ln}(cX)\ \Rightarrow\ \frac{Y}{X}=\text{Ln}\ (cX)\quad\Rightarrow\quad cX=e^{(\frac{Y}{X})}\quad\Rightarrow\quad X=C\ e^{\frac{Y}{X}}\qquad;(\frac{1}{c}=C)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases}X=x-1\\Y=y+1\end{cases}}x-1=Cc^{\frac{y+1}{x-1}}$$

مثال ۲۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=e^{2x+y-1}-2$ کدام است؟

۱) $e^{-2x-y+1}+x=c$ ۲) $e^{2x-y+1}+x=c$ ۳) $e^{2x+y-1}+x=c$ ۴) $e^{-2x+y+1}+x=c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{(2x+y-1=u\ \Rightarrow\ y'=u'-2)}u'-2=e^u-2\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}=e^u\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{e^u}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}}-e^{-u}=x+c\quad\Rightarrow\quad x+e^{-u}=-c\quad\Rightarrow\quad x+e^{-u}=-c=C$$

$$\xrightarrow{u=2x+y-1}x+e^{-2x-y+1}=C$$

مثال۲۷. *یک جواب معادله $y'=(x+y)^{۲}$ برابر است با:*

۱) $(x+y)\text{tgx}$ ۲) tgx ۳) $\text{tgx}-x$ ۴) $x\,\text{tgx}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow y'=u'-۱)} u'-۱=u^{۲} \Rightarrow \frac{du}{dx}=u^{۲}+۱ \Rightarrow \frac{du}{u^{۲}+۱}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} \text{tag}^{-۱}u=x+c \Rightarrow u=\text{tag}(x+c)$$

$$\xrightarrow{u=x+y} x+y=\text{tag}(x+c) \xrightarrow{\text{با فرض } c=۰} x+y=\text{tagx} \Rightarrow y=\text{tagx}-x$$

مثال۲۸. *جواب معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y-x}{y-x-۱}$ عبارت است از:*

۱) $\frac{(y-x)^{۲}}{۲}=y^{۲}+c$ ۲) $(y-x)=x^{۲}+c$ ۳) $\frac{(y-x)^{۲}}{۲}=x+c$ ۴) $\frac{(y-x)^{۲}}{۲}=y+c$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y'=\frac{(y-x)}{(y-x)-۱} \xrightarrow{(y-x=u \Rightarrow y'=u'+۱)} u'+۱=\frac{u}{u-۱} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u}{u-۱}-۱=\frac{۱}{u-۱} \Rightarrow (u-۱)du=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} \frac{u^{۲}}{۲}-u=x+c \xrightarrow{u=y-x} \frac{(y-x)^{۲}}{۲}-y+x=x+c \Rightarrow \frac{(y-x)^{۲}}{۲}=y+c$$

مثال۲۹. *حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=(y-۴x)^{۲}$ کدام است؟*

۱) $(y-۴x+۲)/(y-۴x-۲)=ce^{-۴x}$ ۲) $(y-۴x-۲)/(y-۴x+۲)=ce^{۴x}$

۳) $(y-۴x+۲)/(y-۴x-۲)=ce^{+۴x}$ ۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{(y-۴x=u \Rightarrow y'=u'+۴)} u'+۴=u^{۲} \Rightarrow \frac{du}{dx}=u^{۲}-۴ \Rightarrow \frac{du}{u^{۲}-۴}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} \frac{۱}{۴}\text{Ln}\left|\frac{u-۲}{u+۲}\right|=x+c \xrightarrow{u=y-۴x} \text{Ln}\left|\frac{y-۴x-۲}{y-۴x+۲}\right|=۴x+۴c \Rightarrow$$

$$\frac{y-۴x-۲}{y-۴x+۲}=e^{۴x}\,e^{۴c} \Rightarrow \frac{y-۴x-۲}{y-۴x+۲}=Ce^{۴x} \quad ;(e^{۴c}=C)$$

یادآوری.

$$\int\frac{dx}{x^{۲}-a^{۲}}=\frac{۱}{۲a}\text{Ln}\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

مثال۳۰. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\text{tag}(x+y)\,dx=x\,dx+x\,dy$ کدام است؟*

۱) $\left|\frac{\sin(x+y)}{x}\right|=c$ ۲) $\left|\frac{\sin(x+y)}{y}\right|=c$ ۳) $\left|\frac{\sin(x+y)}{x+y}\right|=c$ ۴) $\left|\frac{\sin(x+y)}{xy}\right|=c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\text{tag}(x+y)\,dx=x(dx+dy) \xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow dx+dy=du)} \text{tag}\,u\,dx=x\,du \Rightarrow \text{cotg}\,u\,du=\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} \text{Ln}|\sin u|=\text{Ln}|x|+\text{Ln}\,c=\text{Ln}(c|x|) \xrightarrow{\text{Ln: تابعی ۱-۱ است}} |\sin u|=c|x|$$

$$\xrightarrow{u=x+y} |\sin(x+y)|=c|x| \Rightarrow \left|\frac{\sin(x+y)}{x}\right|=c$$

مثال۳۱. *یک جواب معادله دیفرانسیل $y'=\cos(x+y+۱)$ کدام است؟*

۱) $x\sin(x+y+۱)+\cos(x+y+۱)=۱$ ۲) $x\cos(x+y+۱)+\sin(x+y+۱)=۱$

۳) $x\cos(x+y+۱)-\sin(x+y+۱)=۱$ ۴) $x\sin(x+y+۱)-\cos(x+y+۱)=۱$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{(x+y+۱=u \Rightarrow y'=u'-۱)} u'-۱=\cos u \Rightarrow \frac{du}{dx}=۱+\cos u \Rightarrow \frac{du}{۱+\cos u}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} \int\frac{du}{۱+\cos u}=x+c \Rightarrow \frac{۱-\cos u}{\sin u}=x+c \xrightarrow{u=x+y+۱} \frac{۱-\cos(x+y+۱)}{\sin(x+y+۱)}=x+c$$

$$\xrightarrow{\text{با فرض } c=۰} ۱-\cos(x+y+۱)=x\sin(x+y+۱) \Rightarrow x\sin(x+y+۱)+\cos(x+y+۱)=۱$$

یادآوری.

$$\int\frac{du}{۱+\cos u}=\int\frac{۱}{۱+\cos u}\times\frac{۱-\cos u}{۱-\cos u}\,du=\int\frac{۱-\cos u}{۱-\cos^{۲}u}\,du=\int\left(\frac{۱}{\sin^{۲}u}-\frac{\cos u}{\sin^{۲}u}\right)du \Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{۱+\cos u}=-\text{cot}\,gu+\frac{۱}{\sin u}=\frac{۱-\cos u}{\sin u}$$

مثال۳۲. *جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی زیر کدام است؟*

$$(۳y+۲x+۳)\,dx-(۳x+۶y+۵)\,dy=۰$$

۱) $۲۱x-۴۲y+۹\text{Ln}(۱۴x+۲۱y+۲۲)=c'$ ۲) $۲۱x-۴۲y+۵\text{Ln}(۴x+۲۱y+۲)=c'$

۳) $۲۱x-۴y+۵\text{Ln}(۱۴x+۲۱y+۲۲)=c'$ ۴) $x^{۲}-۴y+۳+۹\text{Ln}(۴x+۲y+۱)=c'$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\begin{cases}۲x+۳y+۴=۰\\ ۴x+۶y+۵=۰\end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{۱}{۲}} (a'=۲a \;\&\; b'=۲b)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} ((۳y+۲x)+۴)\,dx-(۲(۲x+۳y)+۵)\,dy=۰$$

$$\xrightarrow{(۲x+۳y=u \Rightarrow dy=\frac{du-۲dx}{۳})} (u+۴)\,dx-(۲u+۵)\left(\frac{du-۲dx}{۳}\right)=۰ \Rightarrow$$

$$۳(u+۴)dx-(۲u+۵)du+۲(۲u+۵)dx=۰ \Rightarrow (۷u+۲۲)dx=(۲u+۵)du \Rightarrow \frac{۲u+۵}{۷u+۲۲}du=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \frac{۲}{۷}\int \frac{(۷u+۲۲)-\frac{۹}{۲}}{۷u+۲۲}du = x+c \quad \Rightarrow \quad \frac{۲}{۷}(u-\frac{۹}{۲\times ۷}\,Ln|\,۷u+۲۲\,|) = (x+c)$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \times ۴۹} ۱۴u - ۹Ln|\,۷u+۲۲\,| = ۴۹(x+c) \xrightarrow{u=۲x+۳y} ۱۴(۲x+۳y) - ۹Ln|\,۷(۲x+۳y)+۲۲\,| = ۴۹(x+c) \Rightarrow$$

$$۲۸x+۴۲y-۹Ln|\,۱۴x+۲۱y+۲۲\,| = ۴۹x+۴۹c \quad \Rightarrow \quad ۲۱x-۴۲y+۹Ln(۱۴x+۲۱y+۲۲) = C \quad ;(-۴۹c=C)$$

یادآوری.

$$\int \frac{۲u+۵}{۷u+۲۲}du = \int \frac{\frac{۲}{۷}((۷u+۲۲)-\frac{۹}{۲})}{۷u+۲۲}du = \frac{۲}{۷}(\int du - \frac{۹}{۲}\int \frac{du}{۷u+۲۲}) = \frac{۲}{۷}(u-\frac{۹}{۲\times ۷}\int \frac{۷}{۷u+۲۲}du) \Rightarrow$$

$$\int \frac{۲u+۵}{۷u+۲۲}du = \frac{۲}{۷}(u-\frac{۹}{۲\times ۷}\,Ln|\,۷u+۲۲\,|)$$

مثال ۳۳. *معادله* $(x+y+۱)dx+(۲x+۲y-۱)dy=۰$ *دارای کدام گزینه به عنوان جواب است؟*

۱) $x-۲y+۳Ln|\,x+y-۲\,|=c$ ۲) $x+۲y-۳Ln|\,x+y-۲\,|=c$

۳) $x+۲y+۳Ln|\,x+y-۲\,|=c$ ۴) $x-۲y-۳Ln|\,x+y-۲\,|=c$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\begin{cases} x+y+۱=۰ \\ ۲x+۲y-۱=۰ \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{۱}{۲}} (a'=۲a \ \& \ b'=۲b) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} ((x+y)+۱)dx+(۲(x+y)-۱)dy=۰$$

$$\xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow dy=du-dx)} (u+۱)dx+(۲u-۱)(du-dx)=۰ \Rightarrow (u+۱)dx+(۲u-۱)du-(۲u-۱)dx=۰ \Rightarrow$$

$$(۲u-۱)du=(u-۲)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{۲u-۱}{u-۲}du=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \int \frac{(۲u-۴)+۳}{u-۲}du = x+c \quad \Rightarrow \quad ۲u+۳Ln|\,u-۲\,| = x+c$$

$$\xrightarrow{u=x+y} ۲(x+y)+۳Ln|\,x+y-۲\,| = x+c \quad \Rightarrow \quad x+۲y+۳Ln|\,x+y-۲\,| = c$$

مثال ۳۴. *جواب عمومی معادله* $(x-y-۱)dx-(x+y-۱)dy=۰$ *کدام عبارت است:*

۱) $tag^{-۱}(\frac{y}{x-۱})+Ln\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}=c$ ۲) $tag^{-۱}(\frac{x-۱}{y})-Ln\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}=c$

۳) $tag^{-۱}(\frac{y}{x-۱})-Ln\frac{\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}}{(x-۱)^۲}=c$ ۴) $tag^{-۱}(\frac{y}{x-۱})-Ln\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}=c$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\begin{cases} x+y-۱=۰ \\ x-y-۱=۰ \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}} \text{مختصات محل تلاقی : } (\alpha=۱ \ \& \ \beta=۰)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} x=X+۱ \\ y=Y \end{cases} \text{ با تغییر مختصات}} (X+Y)dX-(X-Y)dY=۰$$

$$\xrightarrow{(\frac{Y}{X}=u \Rightarrow dY=udX+Xdu) \text{ فرم باز همگن}} (X+(Xu))dX-(X-(Xu))(udX+Xdu)=۰$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{X^۲}\times \text{(معادله)}} (۱+u)dX-(۱-u)udX-(۱-u)Xdu=۰ \Rightarrow (۱+u^۲)dX=(۱-u)Xdu \Rightarrow \frac{۱-u}{۱+u^۲}du=\frac{dX}{X}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \int(\frac{۱}{۱+u^۲}-\frac{u}{۱+u^۲})du = Ln|\,X\,|+c \quad \Rightarrow \quad tag^{-۱}u-\frac{۱}{۲}Ln(۱+u^۲)=Ln|\,X\,|+c \quad \Rightarrow$$

$$tag^{-۱}u-Ln(۱+u^۲)^{\frac{۱}{۲}}-Ln|\,X\,|=c \quad \Rightarrow \quad tag^{-۱}u-Ln(\sqrt{۱+u^۲}\times|\,X\,|)=c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{Y}{X}} tag^{-۱}(\frac{Y}{X})-Ln(\sqrt{۱+(\frac{Y}{X})^۲}\times|\,X\,|)=c \quad \Rightarrow \quad tag^{-۱}(\frac{Y}{X})-Ln\sqrt{X^۲+Y^۲}=c$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} X=x-۱ \\ Y=y \end{cases}} tag^{-۱}(\frac{y}{x-۱})-Ln\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}=c$$

مثال ۳۵. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y'=\frac{y-۱}{x+۱}+۱$ *کدام است؟*

۱) $e^{(\frac{y-۱}{x+۱})}=c|\,x-۲\,|$ ۲) $e^{(\frac{x+۱}{y-۲})}=c|\,x-۲\,|$ ۳) $e^{(\frac{y-۱}{x+۱})}=e|\,x+۱\,|$ ۴) $e^{(\frac{y-۱}{x+۱})}=c|\,x\,|$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\begin{cases} y-۱=۰ \\ x+۱=۰ \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}} \text{مختصات محل تلاقی : } (\alpha=-۱ \ \& \ \beta=۱)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} x=X-۱ \\ y=Y+۱ \end{cases} \text{ با تغییر مختصات}} Y'=\frac{Y}{X}+۱$$

$$\xrightarrow{(\frac{Y}{X}=u \Rightarrow Y'=u+Xu') \text{ فرم بسته همگن}} u+Xu'=u+۱ \Rightarrow X\frac{du}{dX}=۱ \Rightarrow du=\frac{dX}{X}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} u=Ln|\,X\,|+Lnc=Ln(e|\,X\,|) \xrightarrow{u=\frac{Y}{X}} (\frac{Y}{X})=Ln(c|\,X\,|) \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{Y}{X}}=c|\,X\,|$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} X=x+۱ \\ Y=y-۱ \end{cases}} e^{(\frac{y-۱}{x+۱})}=c|\,x+۱\,|$$

مثال ۳۶. *به ازاء کدام تغییر متغیر معادله* $(x+۱)y'+(y-۱)tag(\frac{y+x}{x+۱})=۰$ *به معادله‌ای جدا شونده تبدیل می‌شود؟*

۱) $u=\frac{y-x}{x+۱}$ ۲) $u=\frac{y-x}{۲x+۱}$ ۳) $u=\frac{y+۱}{x-۱}$ ۴) $u=\frac{y-۱}{x+۱}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$(x+1)y' = -(y-1)\tag{\frac{y+x}{x+1}} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{y-1}{x+1}\tag{\frac{y+x}{x+1}}$$

محل تلاقی هر سه خط $y-1=0$، $x+1=0$ و $y+x=0$ نقطهٔ $(-1,1)$ می‌باشد. در اینصورت با تبدیل مختصات $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+1 \end{cases}$، معادله دیفرانسیل مفروض به معادله همگن $Y' = -\frac{Y}{X}\tag{\frac{Y+X}{X}}$ و معادله حاصل نیز با تغییر متغیر $u = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x+1}$ به یک معادله جدا شونده تبدیل می‌شود.

مثال ۳۷. *با کدام تغییر متغیر معادله دیفرانسیل* $(2x - \sin y + 1)\cos y\,dy - (4x - 2\sin y)\,dx = 0$ *به یک معادله جداشونده تبدیل می‌شود؟*

۱) $u = x + \sin y$ ۲) $u = 2x - \sin y$ ۳) $u = x - \sin y$ ۴) $u = 2x + \sin y$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$(2x - \sin y + 1)\cos y\,dy - (4x - 2\sin y)\,dx = 0$$

$$\xrightarrow{\sin y = v \Rightarrow \cos y\,dy = dv} (2x - v + 1)\,dv - (4x - 2v)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad ((2x - v) + 1)\,dv - 2(2x - v)\,dx = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، معادله‌ای با یک متغیر خطی برحسب $(2x - v)$ است. در اینصورت با تغییر متغیر $(u = 2x - v \xrightarrow{v = \sin y} u = 2x - \sin y)$ به یک معادله جدا شونده تبدیل می‌شود.

مثال ۳۸. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' = \frac{x+y}{x-1}$ *کدام است؟*

۱) $y + 1 = (x-1)(\mathrm{Ln}|x-1| + c)$ ۲) $y = (x-1)(\mathrm{Ln}|x-1| + c)$

۳) $y - 1 = (x+1)(\mathrm{Ln}|x+1| + c)$ ۴) $y + 1 = x(\mathrm{Ln}|x-1| + c)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}} \text{مختصات محل تلاقی: } (\alpha = 1 \ \& \ \beta = -1)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y-1 \end{cases} \text{ با تغییر مختصات}} Y' = \frac{X+Y}{X} = 1 + \frac{Y}{X}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{Y}{X} = u \Rightarrow Y' = u + Xu'\right) \text{ ; فرم بسته همگن}} u + Xu' = 1 + u \quad \Rightarrow \quad X\frac{du}{dX} = 1 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dX}{X}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} u = \mathrm{Ln}|X| + c \xrightarrow{u = \frac{Y}{X}} \frac{Y}{X} = \mathrm{Ln}|X| + c \quad \Rightarrow \quad Y = X(\mathrm{Ln}|X| + c)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \end{cases}} y + 1 = (x-1)(\mathrm{Ln}|x-1| + c)$$

مثال ۳۹. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' = \frac{y+1}{y+x}$ *عبارت است از:*

۱) $\mathrm{Ln}|y+1| = \frac{x}{y+1} + c$ ۲) $\mathrm{Ln}|y| = \frac{x-1}{y} + c$

۳) $c + \mathrm{Ln}|y+1| = \frac{x-1}{y+1} + x$ ۴) $c + \mathrm{Ln}|y+1| = \frac{x-1}{y+1}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}} \text{مختصات محل تلاقی: } (\alpha = 1 \ \& \ \beta = -1)$$

$$\xrightarrow{\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y-1 \end{cases} \text{ با تغییر مختصات}} Y' = \frac{Y}{Y+X}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{Y}{X} = u \Rightarrow Y' = u + Xu'\right) \text{ ; فرم بسته همگن}} u + Xu' = \frac{Xu}{Xu+X} = \frac{u}{u+1} \quad \Rightarrow \quad X\frac{du}{dX} = \frac{u}{u+1} - u = \frac{-u^2}{u+1} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{u+1}{u^2}du = \frac{dX}{X} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} -\int\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)du = \mathrm{Ln}|X| + c \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{Ln}|u| + \frac{1}{u} = \mathrm{Ln}|X| + c$$

$$\xrightarrow{u = \frac{Y}{X}} -\mathrm{Ln}\left|\frac{Y}{X}\right| + \frac{X}{Y} = \mathrm{Ln}|X| + c \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}|Y| = \frac{X}{Y} - c \xrightarrow{\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \end{cases}} \mathrm{Ln}|y+1| = \frac{x-1}{y+1} - c$$

مثال ۴۰. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' = \sin^2(x - y + 1)$ *کدام است؟*

۱) $y = x - \tag{\tan^{-1}(x+c)} + 1$ ۲) $y = 2x + \tag{\tan^{-1}(x+c)} + 1$

۳) $x = y - \tag{\tan^{-1}(x+c)} - 1$ ۴) $y = 2x + \tag{\tan^{-1}(x+c)} + 1$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y' = \sin^2(x - y + 1) \xrightarrow{(x-y+1=u \ \Rightarrow \ y' = 1-u')} 1 - u' = \sin^2 u \quad \Rightarrow \quad u' = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = \cos^2 u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\cos^2 u} = dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \tan u = x + c \quad \Rightarrow \quad u = \tag{\tan^{-1}(x+c)}$$

$$\xrightarrow{u = x-y+1} x - y + 1 = \tag{\tan^{-1}(x+c)} \quad \Rightarrow \quad y = x - \tag{\tan^{-1}(x+c)} + 1$$

معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل با نمایش عمومی $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ را در ناحیه همبند D کامل گوییم، هر گاه مقدار عبارت $\Delta = Q_x - P_y$ در ناحیه مذکور برابر صفر گردد.

برای بدست آوردن جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل کامل کافیست با حذف جملات شامل y در P و یا جملات شامل x در Q، از باقیمانده جملات معادله نسبت به دیفرانسیل مقابل آن ـ dx یا dy ـ انتگرالگیری کنیم.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $e^{-x}(y^{3}+xy^{3}+1)\,dx+3y^{2}(xe^{x}-6)\,dy=0$ **را حل کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\ \Delta=(3y^{2}e^{x}+3y^{2}xe^{x})-(3y^{2}e^{x}+3y^{2}xe^{x})=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}}\ e^{x}\,dx+(3xe^{x}y^{2}-18y^{2})\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\int\ (\text{معادله حاصل})}\ \int e^{x}\,dx+\int(3xe^{x}y^{2}-18y^{2})\,dy=0\quad\Rightarrow\quad e^{x}+xe^{x}y^{3}-6y^{3}+c=0$$

تذکر. با توجه به بحث توابع چند متغیره، کامل بودن معادله دیفرانسیل $P\,dx+Q\,dy=0$ معادل این مطلب است که عبارت دیفرانسیلی $P\,dx+Q\,dy$، دیفرانسیل کل یک تابع دو متغیره می‌باشد. و همین اصل موجب حل این دسته از معادلات به کمک انتگرالگیری صِرف می‌شود. لازم بذکر است برخی از انواع معادلات وجود دارند که خود کامل نیستند، امّا با دسته‌بندی جملات آن، عباراتی ایجاد می‌شوند، که آن عبارات دیفرانسیل کل تابعی مشخص می‌باشند. در اینصورت با جایگذاری دیفرانسیل تابع مذکور به جای عبارت مورد نظر می‌توان به حل معادله دیفرانسیل مفروض پرداخت.

یادآوری. دیفرانسیل کل تابع دو متغیره $f(x,y)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

دیفرانسیل کل برخی توابع در زیر محاسبه شده است:

$d(xy)=y\,dx+x\,dy$

$d(x^{2}+y^{2})=2x\,dx+2y\,dy$

$d(\frac{x}{y})=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{2}}$

$d(\frac{y}{x})=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^{2}}$

$d(\text{Ln}\frac{y}{x})=\frac{-y\,dx+x\,dy}{xy}$

$d(\text{Ln}\,xy)=\frac{y\,dx+x\,dy}{xy}$

$d(\tan^{-1}\frac{y}{x})=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^{2}+y^{2}}$

$d(\text{Ln}(x^{2}+y^{2}))=\frac{2x\,dx+2y\,dy}{x^{2}+y^{2}}$

$d(\sqrt{x^{2}+y^{2}})=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$

$d(\sqrt{x^{2}-y^{2}})=\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^{2}-y^{2}}}$

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $(y+3x^{3})\,dx-x\,dy=0$ **را حل کنید.**

حل.

$$(y+3x^{4})\,dx-x\,dy=0\quad\Rightarrow\quad y\,dx+3x^{4}\,dx-x\,dy=0\quad\Rightarrow$$

$$3x^{4}\,dx=x\,dy-y\,dx\quad\Rightarrow\quad 3x^{2}\,dx=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^{2}}$$

$$\xrightarrow{\frac{x\,dy-y\,dx}{x^{2}}=d(\frac{y}{x})\ \&\ 3x^{2}\,dx=d(x^{3})}\ d(x^{3})=d(\frac{y}{x})\ \Rightarrow\ d(x^{3}-\frac{y}{x})=0\ \Rightarrow\ x^{3}-\frac{y}{x}=c$$

مثال ۴۱. *کدامیک از معادلات زیر کاملند؟*

۱) $(x^{2}+y^{2}+x)dx+xy\,dy=0$

۲) $ydx+(2x-y\,e^{y})dy=0$

۳) $(2xy\,e^{x^{2}}-2x)dx+e^{x^{2}}dy=0$

۴) $(x^{4}+y^{4})dx-xy^{3}\,dy=0$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{باید: }\Delta=Q_x-P_y=0}$$

گزینه «۱»: $\Delta=y-2y\neq 0$ ؛ گزینه «۲»: $\Delta=2-1\neq 0$

گزینه «۳»: $\Delta=2x\,e^{x^{2}}-2xe^{x^{2}}=0$ ؛ گزینه «۴»: $\Delta=-y^{3}-4y^{3}\neq 0$

مثال ۴۲. *a را به گونه‌ای تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله دیفرانسیل کامل باشد.*

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^{2})dy=0$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{باید: }\Delta=Q_x-P_y=0}\ \Delta=(e^{xy}+xye^{xy}+2x)-(ae^{xy}+ayx\,e^{xy}+2x)=(1-a)(e^{xy}+xyc^{xy})=0\quad\Rightarrow\ a=1$$

مثال ۴۳. *منحنی جواب معادله دیفرانسیل* $(2y^{3}-x^{2}y)dy+(3x^{3}-xy^{2})dx=0$ *گذرنده از نقطه* $(0,0)$ *:*

۱) دو خط متقاطع است.

۲) یک بیضی با قطرهای نامساوی است.

۳) یک هذلولی است.

۴) یک نقطه است.

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\ \Delta=-2xy+2xy=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}}\ (2x^{3}-xy^{2})\,dx+2y^{3}dy\ \xrightarrow{\int\ (\text{معادله حاصل})}\ 2(\frac{x^{4}}{4})-(\frac{x^{2}}{2})y^{2}+2(\frac{y^{4}}{4})+c=0\quad\Rightarrow$$

$$x^{4}-x^{2}y^{2}+y^{4}+C=0\ \xrightarrow{(x=0\ \&\ y=0)\ \text{با جایگذاری}}\ C=0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}}\ x^{4}-x^{2}y^{2}+y^{4}=0\quad\Rightarrow\quad(x^{2}-y^{2})^{2}+x^{2}y^{2}=0\quad\Rightarrow\quad x=y=0$$

مثال ۴۴. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $xy^{2}\,dy+y^{3}\,dx=y\,dx-x\,dy$ *کدام است؟*

۱) $xy+\frac{x}{y}=c$ ۲) $xy-\frac{x}{y}=c$ ۳) $xy+\frac{y}{x}=c$ ۴) $xy-\frac{y}{x}=c$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$xy^{2}\,dy+y^{3}\,dx=y\,dx-x\,dy\quad\Rightarrow\quad y^{2}(x\,dy+y\,dx)=y\,dx-x\,dy\quad\Rightarrow\quad x\,dy+y\,dx=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{2}}$$

$$\xrightarrow{x\,dy+y\,dx=d(xy)\ \&\ \frac{y\,dx-x\,dy}{y^{2}}=d(\frac{x}{y})}\ d(xy)=d(\frac{x}{y})\quad\Rightarrow\quad d(xy-\frac{x}{y})=0\quad\Rightarrow\quad xy-\frac{x}{y}=c$$

مثال ۴۵. *منحنی C یکی از جوابهای خصوصی معادله دیفرانسیل $(x-2y)dy+ydx=0$ از نقطه $(5,1)$ می‌گذرد، منحنی C از کدام نقطه دیگر می‌گذرد؟*

۱) $(1,2)$ ۲) $(2,1)$ ۳) $(4,2)$ ۴) $(3,5)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=1-1=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P\text{ ؛ کامل}} (x-2y)\,dy=0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} xy-2(\frac{y^2}{2})+c=0 \quad \Rightarrow \quad xy-y^2+c=0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=5\ \&\ y=1)} c=-4 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} xy-y^2=4$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری گزینه‌ها}} 4\neq 1-2: \text{گزینه «۲»} \quad ؛ \quad 4\neq 4-2: \text{گزینه «۱»}$$

$$4\neq 25-15: \text{گزینه «۴»} \quad ؛ \quad 4=4-8: \text{گزینه «۳»}$$

مثال ۴۶. *معادله $x\,dy-y\,dx=xy^2\,dx$ دارای کدام جواب است؟*

۱) $x^2+\frac{1}{y}=c$ ۲) $c=y+xy^2$ ۳) $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=c$ ۴) $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=c$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$x\,dy-y\,dx=xy^2\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=x\,dx$$

$$\xrightarrow{\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d(\frac{x}{y})\ \&\ x\,dx=d(\frac{x^2}{2})} -d(\frac{x}{y})=d(\frac{x^2}{2}) \quad \Rightarrow \quad d(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y})=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=c$$

مثال ۴۷. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$ کدام است؟*

۱) $(1+x)(4+y)=c$ ۲) $(4+x)(1+y)=c$ ۳) $(1+x^2)(4+y^2)=c$ ۴) $(4+x^2)(1+y^2)=c$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=2xy-2xy=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q\text{ ؛ کامل}} (4x+xy^2)\,dx+y\,dy=0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} 4(\frac{x^2}{2})+(\frac{x^2}{2})y^2+(\frac{y^2}{2})+c=0 \quad \Rightarrow$$

$$4x^2+x^2y^2+y^2=C \ ;(-2c=C) \quad \Rightarrow 4x^2+x^2y^2+y^2+4=C+4 \quad \Rightarrow (x^2+1)(y^2+4)=c \ ;(C+4=c)$$

مثال ۴۸. *معادله $x\,dy-y\,dx=y^2\,dx$ در $y=0$ دارای جواب:*

۱) $x=\infty$ است. ۲) $x=0$ است. ۳) $x=1$ است. ۴) $x=-2$ است.

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$x\,dy-y\,dx=y^2\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=dx$$

$$\xrightarrow{\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d(\frac{x}{y})} -d(\frac{x}{y})=dx \quad \Rightarrow \quad d(x+\frac{x}{y})=0 \quad \Rightarrow \quad x+\frac{x}{y}=c \quad \Rightarrow \quad xy+x=cy \xrightarrow{y=0} x=0$$

مثال ۴۹. *حل معادله $y'=\frac{xy^2-1}{1-x^2y}$ در نقطه $x=0$ ، $y=1$ برابر است با:*

۱) $x^2y^2+x+y=-1$ ۲) $x^2y^2-x-y=-1$ ۳) $\frac{1}{2}x^2y^2-x-y=-1$ ۴) $x^2y^2+x+y=-1$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^2-1}{1-x^2y} \quad \Rightarrow \quad (xy^2-1)\,dx+(x^2y-1)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=2xy-2xy=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q\text{ ؛ کامل}} (xy^2-1)\,dx-dy=0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} (\frac{x^2}{2})y^2-x-y+c=0 \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=0\ \&\ y=1)} c=1 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \frac{1}{2}x^2y^2-x-y=-1$$

مثال ۵۰. *جواب معادله $x(x^2+y^2)\,dx=2\,dx-y\,dx+x\,dy$ عبارت است از:*

۱) $y=x\tan(x^2+c)$ ۲) $x=y(\tan(x^2+c))$ ۳) $y=x^2\tan(x^2+c)$ ۴) $x=y^2\tan(x^2+c)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$-y\,dx+x\,dy=2x(x^2+y^2)\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=2x\,dx$$

$$\xrightarrow{\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=d(\tan^{-1}\frac{y}{x})\ \&\ 2x\,dx=d(x^2)} d(\tan^{-1}\frac{y}{x})=d(x^2) \quad \Rightarrow \quad d(\tan^{-1}\frac{y}{x}-x^2)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x}-x^2=c \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}=x^2+c \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=\tan(x^2+c) \quad \Rightarrow \quad y=x\tan(x^2+c)$$

معادلات قابل تبدیل به معادلات کامل

تعریف. تابع $\mu=\mu(x,y)$ ، عامل انتگرالساز (فاکتور انتگرال) معادله ناکامل $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ نامیده می‌شود، هرگاه با ضرب آن در معادله دیفرانسیل مفروض، معادله‌ای کامل حاصل گردد.

به طور کلی محاسبه عامل انتگرالساز همواره کار ساده‌ای نیست. به همین دلیل تنها در برخی حالتهای خاص به محاسبه عامل انتگرالساز می‌پردازیم:

ـ فاکتور نوع اول. عبارت $\frac{\Delta}{-Q}$ فقط تابعی از x است. در اینصورت، عامل انتگرالساز متناظر بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\Delta}{-Q}=a(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=e^{\int a(x)\,dx}$$

در اینصورت با ضرب عامل انتگرالساز $\mu(x)$ در معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله دیفرانسیل کامل بدست می‌آید.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(۲y^۲+۳x)\,dx+۲xy\,dy=۰$ **را تعیین کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=۲y-۴y=-۲y\neq۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}}\frac{\Delta}{-Q}=\frac{-۲y}{-۲xy}=\frac{۱}{x}\xrightarrow{\frac{\Delta}{-Q}=a(x)}\mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{\int(\frac{۱}{x})dx}=e^{Lnx}=x$$

$$\xrightarrow{\mu(x)\times\text{(معادله)}}(۲y^۲x+۳x^۲)\,dx+۲x^۲y\,dy=۰$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P}}۳x^۲\,dx+۲x^۲y\,dy=۰$$

$$\xrightarrow{\int\text{(معادله حاصل)}}\int۳x^۲\,dx+\int۲x^۲y\,dy=۰\quad\Rightarrow\quad x^۳+x^۲y^۲=c$$

ـ فاکتور نوع دوم. عبارت $\frac{\Delta}{P}$ فقط تابعی از y است. در اینصورت، عامل انتگرالساز متناظر بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\Delta}{P}=a(y)\quad\Rightarrow\quad\mu(y)=e^{\int a(y)\,dy}$$

در اینصورت با ضرب عامل انتگرالساز $\mu(y)$ در معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله دیفرانسیل کامل بدست می‌آید.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $(۲xy^۴e^y+۲xy^۳+y)\,dx+(x^۲y^۴e^y-x^۲y^۲-۳x)\,dy=۰$ **را حل کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=(۲xy^۴e^y-۲xy^۲-۳)-(۸xy^۳e^y+۲xy^۴e^y+۶xy^۲+۱)=-۴(۲xy^۳e^y+۲xy^۲+۱)\neq۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}}\frac{\Delta}{P}=\frac{-۴(۲xy^۳e^y+۲xy^۲+۱)}{y(۲xy^۳e^y+۲xy^۲+۱)}=\frac{-۴}{y}\xrightarrow{\frac{\Delta}{P}=a(y)}\mu(y)=e^{\int a(y)dy}=e^{\int(-\frac{۴}{y})\,dy}=e^{-۴Lny}=\frac{۱}{y^۴}$$

$$\xrightarrow{\mu(y)\times\text{(معادله)}}(۲xe^y+۲xy^{-۱}+y^{-۳})\,dx+(x^۲e^y-x^۲y^{-۲}-۳xy^{-۴})\,dy=۰$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q}}(۲xe^y+۲xy^{-۱}+y^{-۳})\,dx=۰$$

$$\xrightarrow{\int\text{(معادله حاصل)}}\int(۲xe^y+۲xy^{-۱}+y^{-۳})\,dx=۰\quad\Rightarrow\quad e^yx^۲+y^{-۱}x^۲+y^{-۳}x=c$$

ـ فاکتور نوع سوم. عبارت $\frac{\Delta}{xP-yQ}=a(z)$ فقط تابعی از $z=xy$ باشد. در اینصورت، عامل انتگرالساز متناظر بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\Delta}{xP-yQ}=a(z)\quad\Rightarrow\quad\mu(z)=e^{\int a(z)\,dz}\qquad;z=xy$$

در اینصورت با ضرب عامل انتگرالساز $\mu(z)$ در معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله دیفرانسیل کامل بدست می‌آید.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $(۲y\cos x-xy\sin x)\,dx+۲x\cos x\,dy=۰$ **را حل کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=(۲\cos x-۲x\sin x)-(۲\cos x-x\sin x)=-x\sin x\neq۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع سوم}}\frac{\Delta}{xP-yQ}=\frac{-x\sin x}{x(۲y\cos x-xy\sin x)-y(۲x\cos x)}=\frac{-x\sin x}{-x^۲y\sin x}=\frac{۱}{xy}=\frac{۱}{z}$$

$$\xrightarrow{\frac{\Delta}{xP-yQ}=a(z)}\mu(z)=e^{\int a(z)dz}=e^{\int(\frac{۱}{z})\,dz}=e^{Lnz}=z\xrightarrow{z=xy}\mu(z)=xy$$

$$\xrightarrow{\mu(z)\times\text{(معادله)}}(۲xy^۲\cos x-x^۲y^۲\sin x)\,dx+(۲x^۲y\cos x)\,dy=۰$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P}}۲x^۲y\cos x\;dy=۰$$

$$\xrightarrow{\int\text{(معادله حاصل)}}\int۲x^۲y\cos x\,dy=۰\quad\Rightarrow\quad x^۲y^۲\cos x=c$$

لازم بذکر است، معادله دیفرانسیل مفروض در تساوی $a(x)=\frac{۱}{۲}tagx$ نیز صدق می‌کند، در نتیجه عامل $\frac{\Delta}{-Q}=\frac{-x\sin x}{-۲x\cos x}=\frac{۱}{۲}tagx$ انتگرالسازی بصورت زیر نیز دارد:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{۱}{۲}tagx\,dx}=e^{-\frac{۱}{۲}Ln\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{\cos x}}$$

ـ فاکتور نوع چهارم. هر معادله دیفرانسیل با نمایش عمومی $y(Ax^my^n+Bx^py^q)dx+x(Cx^my^n+Dx^py^q)dy=۰$ با شرط $AD-BC\neq۰$ دارای عامل انتگرالسازی بصورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ می‌باشد.

بعنوان مثال. عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل $(x^۲y-xy^۴)dx+(۴x^۳-x^۴y^۳)dy=۰$ **را تعیین کنید.**

حل.

$$y(x^۲-xy^۳)dx+x(۲x^۲-xy^۳)dy=۰\qquad;AD-BC=(۱)(-۱)-(-۱)(۲)=۱\neq۰$$

بنابراین، معادله دیفرانسیل مفروض دارای عامل انتگرالسازی به صورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ است:

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع چهارم}\;;\;x^\alpha y^\beta\times\text{(معادله)}}(x^{\alpha+۲}y^{\beta+۱}-x^{\alpha+۱}y^{\beta+۴})\,dx+(۲x^{\alpha+۳}y^\beta-x^{\alpha+۲}y^{\beta+۳})\,dy=۰\quad;\;(۲)$$

برای یافتن α و β مناسب به جهت کامل شدن معادله (۲) از شرط $\Delta=۰$ استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y=۰}\Delta=(۲(\alpha+۳)x^{\alpha+۲}y^\beta-(\alpha+۲)x^{\alpha+۱}y^{\beta+۳})-((\beta+۱)x^{\alpha+۲}y^\beta-(\beta+۴)x^{\alpha+۱}y^{\beta+۳})=۰\Rightarrow$$

$$(۲\alpha-\beta+۵)\,x^{\alpha+۲}y^\beta+(-\alpha+\beta+۲)\,x^{\alpha+۱}y^{\beta+۳}=۰\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}۲\alpha-\beta+۵=۰\\-\alpha+\beta+۲=۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad(\alpha=-۷\;\;\&\;\;\beta=-۹)\xrightarrow{\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta}\mu(x,y)=x^{-۷}y^{-۹}$$

مثال ۵۱. *معادله دیفرانسیل* $(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$:

۱) بیش از یک عامل انتگرالساز دارد. ۲) کامل است.

۳) فقط یک عامل انتگرالساز تابعی از x تنها دارد. ۴) فقط عامل انتگرالساز تابعی از y تنها دارد.

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = -2x - y - x - 2y = -3x - 3y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور: نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{-3(x+y)}{+x(x+y)} = \frac{-3}{x} = a(x)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور: نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{-3(x+y)}{y(x+y)} = \frac{-3}{y} = a(y)$$

مثال ۵۲. *مقدارهای* α *و* β *را طوری تعیین کنید که* $\mu(x,y)=(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta}$ *یک فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل زیر باشد:*

$$3(y+1)dx-2(x-1)dy=0$$

۱) $\beta=4\ ,\ \alpha=1$ ۲) $\beta=4\ ,\ \alpha=-1$ ۳) $\beta=-4\ ,\ \alpha=1$ ۴) $\beta=-4\ ,\ \alpha=-1$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\mu(x,y)\times(\text{معادله})} 3(y+1)^{\alpha+1}(x-1)^{\beta}\,dx-2(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta+1}\,dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\Delta = Q_x - P_y = -2(\beta+1)(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta} - 3(\alpha+1)(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(-2\beta-2-3\alpha-3)(y+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta}=0 \quad \Rightarrow \quad -2\beta-3\alpha-5=0 \quad \Rightarrow \quad 2\beta+3\alpha=-5$$

با جایگذاری گزینه‌ها در تساوی پایانی:

گزینه «۲»: $2\times4+3\times(-1)=8-3=5\neq-5$ ؛ گزینه «۱»: $2\times4+3\times1=11\neq-5$

گزینه «۴»: $2\times(-4)+3(-1)=-11\neq-5$ ؛ گزینه «۳»: $2\times(-4)+3\times1=-5$

مثال ۵۳. *مقادیر* α *و* β *را طوری تعیین کنید که* $\mu=x^{\alpha}y^{\beta}$ *یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشند:*

$$ydx+x(1-3x^2y^2)dy=0$$

۱) $\alpha=\beta=-2$ ۲) $\alpha=-2\ ,\ \beta=-3$ ۳) $\alpha=\beta=-3$ ۴) $\alpha=-3\ ,\ \beta=-2$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{x^{\alpha}y^{\beta}\times(\text{معادله})} x^{\alpha}y^{\beta+1}dx+(x^{\alpha+1}y^{\beta}-3x^{\alpha+3}y^{\beta+2})dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\Delta = Q_x - P_y = (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} - (\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha-\beta)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+3=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta=-3$$

مثال ۵۴. *معادله دیفرانسیل* $(xy+2x^2+x^3y)dx+(x^2-1)y^2dy=0$ *دارای فاکتور انتگرال زیر است؟*

۱) y^3 ۲) x^2y^3 ۳) $x^{-2}y^{-3}$ ۴) -2

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{x^{\alpha}y^{\beta}\times(\text{معادله})} (x^{\alpha}y^{\beta+2}-x^{\alpha+2}y^{\beta+2})dx+(x^{\alpha+3}y^{\beta+1}+2x^{\alpha+2}y^{\beta}+x^{\alpha+1}y^{\beta+1})dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\Delta = Q_x - P_y = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1} - (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1} + (\beta+2)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad ((\alpha+3)+(\beta+2))x^{\alpha+2}y^{\beta+1} + ((\alpha+1)-(\beta+2))x^{\alpha}y^{\beta+1} + 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+5=0\\ \alpha-\beta-1=0\\ \alpha+2=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2 \quad \& \quad \beta=-3$$

مثال ۵۵. *معادله* $dx+2xy\,dy=ye^{-y^2}dy$ *مفروض است، یک فاکتور انتگرال این معادله برابر است با:*

۱) e^{y^2} ۲) e^{x^2} ۳) e^{-x^2} ۴) e^{-y^2}

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$dx+2xy\,dy=ye^{-y^2}dy \quad \Rightarrow \quad dx+(2xy-ye^{-y^2})dy=0$$

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = 2y - 0 = 2y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = 2y = a(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int a(y)\,dy} = e^{2\int ydy} = e^{y^2}$$

مثال ۵۶. *معادله دیفرانسیل* $2xy(dx+(4y+3x^2)dy)=0$ *فاکتور انتگرالگیری به صورت تابعی از* y *دارد، جواب عمومی معادله کامل است؟*

۱) $y^4+x^3y^2=c$ ۲) $y^4+x^2y^3=c$ ۳) $y^3+x^2y^4=c$ ۴) $y^3+x^2y^2=c$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta = Q_x - P_y}{P} = \frac{6x-2x}{2xy} = \frac{2}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int a(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

$$\xrightarrow{\mu(y)\times(\text{معادله})} 2xy^3\,dx+(4y^3+3x^2y^2)dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل کامل می‌باشد، بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P:\text{ کامل}} 2xy^3\,dx+4y^3\,dy=0 \xrightarrow{\int(\text{معادله حاصل})} x^2y^3+y^4+c=0$$

مثال ۵۷. *اگر* $(3x^2+y^2)dx-2xy\ dy=0$ *عامل انتگرالساز وابسته به متغیر* x *را داشته باشد این عامل کدامست؟*

۱) $\frac{1}{x^2}$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۴) x

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{Q_x-P_y}{-Q}=\frac{-2y-2y}{2xy}=\frac{-2}{x}=a(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

مثال ۵۸. *فاکتور انتگرال معادله* $(x+y^2)dx-2xy\ dy=0$ *کدام است؟*

۱) y^{-1} ۲) y^{-2} ۳) x^{-1} ۴) x^{-2}

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta=Q_x-P_y=-2y-2y=-4y\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x}=a(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

مثال ۵۹. *عبارت* $ydx+(x^2y-x)dy=0$ *:*

۱) چنانچه بر x تقسیم شود یک دیفرانسیل کامل می‌شود.

۲) چنانچه بر x^2 تقسیم شود یک دیفرانسیل کامل می‌شود.

۳) یک دیفرانسیل کامل است.

۴) چنانچه در x^2 ضرب شود یک دیفرانسیل کامل می‌شود.

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta=Q_x-P_y=2xy-1-1=2xy-2=2(xy-1)\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{2(xy-1)}{-x(xy-1)}=-\frac{2}{x}=a(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x^2}$$

مثال ۶۰. *فاکتور انتگرال و جواب عمومی معادله* $(1+y^2)dx=(tg^{-1}y-x)dy$ *عبارت است از:*

۱) $\mu(y)=(1+y^2)e^{tg^{-1}y}$ & $x=tg^{-1}y+x^2+ce^{-tgy}$

۲) $\mu(y)=\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}$ & $x=tg^{-1}y+x^2+ce^{-tgy}$

۳) $\mu(y)=(1+y^2)tg^{-1}y$ & $x=tg^{-1}y-1+ce^{-tg^{-1}y}$

۴) $\mu(y)=\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}$ & $x=tg^{-1}y-1+ce^{-tg^{-1}y}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$(1+y^2)\,dx-(tag^{-1}y-x)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta=Q_x-P_y=1-2y\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P}=\frac{1-2y}{1+y^2}=a(y) \Rightarrow \mu(y)=e^{\int(\frac{1}{1+y^2}-\frac{2y}{1+y^2})dy}=e^{tg^{-1}y-\ln(1+y^2)} \Rightarrow \boxed{\mu(y)=\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}}$$

$$\xrightarrow{\mu(y)\times(\text{معادله})} e^{tg^{-1}y}\,dx-(\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}\times tag^{-1}y-\frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}\times x)\,dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل است:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} e^{tg^{-1}y}\,dx-(\frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\,e^{tg^{-1}y})dy=0$$

$$\xrightarrow{\int(\text{معادله حاصل})} e^{tag^{-1}y}\int dx-\int\frac{tag^{-1}y}{1+y^2}e^{tg^{-1}y}\,dy=0 \Rightarrow e^{tg^{-1}y}\times x-tg^{-1}y\,e^{tg^{-1}y}+e^{tg^{-1}y}+c=0 \Rightarrow$$

$$e^{tg^{-1}y}(x-tg^{-1}y+1)=C \quad ;(-c=C) \Rightarrow x-tg^{-1}y+1=Ce^{-tg^{-1}y} \Rightarrow \boxed{x=tag^{-1}y-1+Ce^{-tag^{-1}y}}$$

راهنمایی.

$$I=\int\frac{tag^{-1}y}{1+y^2}e^{tag^{-1}y}\,dy \xrightarrow{u=tag^{-1}y \Rightarrow du=\frac{1}{1+y^2}dy} I=\int ue^u du=ue^u-e^u$$

$$\xrightarrow{u=tg^{-1}y} I=tg^{-1}y\,e^{tg^{-1}y}-tag^{-1}y$$

مثال ۶۱. *معادله دیفرانسیل* $(x^2+y^2+x)dx+xy\ dy=0$ *عامل انتگرالسازی دارد که تابعی از* x *می‌باشد. جواب عمومی این معادله چیست؟*

۱) $2x^4+3x^3+4x^2y^2=c$ ۲) $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c$

۳) $3x^4+3x^3+4x^2y^2=c$ ۴) $x^4+4x^3+6x^2y^2=c$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta=Q_x-P_y=y-2y=-y\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{-y}{-xy}=\frac{1}{x}=a(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$$

$$\xrightarrow{\mu(x)\times(\text{معادله})} (x^3+xy^2+x^2)dx+x^2y\ dy=0$$

معادله حاصل کامل می‌باشد. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + \frac{x^3}{3} + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = C \quad ;(-12c = C)$$

مثال ۶۲. *یک عامل انتگرالساز برای معادله* $y(x^2 - y)dx + x(x^2 + 3y)dy = 0$ *کدام است؟*

۱) $x^{\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ ۲) $x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ ۳) $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{5}{4}}$ ۴) $x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{5}{4}}$

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به شکل گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را به صورت $x^\alpha y^\beta$ در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow{x^\alpha y^\beta \times \text{(معادله)}} x^\alpha y^{\beta+1}(x^2 - y)dx + x^{\alpha+1}y^\beta(x^2 + 3y)dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - x^\alpha y^{\beta+2})\,dx + (x^{\alpha+3}y^\beta + 3x^{\alpha+1}y^{\beta+1})\,dy = 0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\Delta = Q_x - P_y = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta + 3(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1} - (\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta + (\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha+3-\beta-1)x^{\alpha+2}y^\beta + (3\alpha+3+\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ 3\alpha + \beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{7}{4} \quad \& \quad \beta = \frac{1}{4}$$

مثال ۶۳. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $(e^x - \sin y)dx + \cos y\,dy = 0$ *کدام است؟*

۱) $e^x \cos y + x^2 = c$ ۲) $e^x \operatorname{Ln} y + \sin x = c$ ۳) $e^x \operatorname{tg} y + \cos y = c$ ۴) $x + e^{-x}\sin y = c$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = 0 + \cos y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{\cos y}{-\cos y} = -1 = a(x) \quad \Rightarrow \mu(x) = e^{\int(-dx)} = e^{-x}$$

$$\xrightarrow{\mu(x)\times\text{(معادله)}} (1 - e^{-x}\sin y)dx + e^{-x}\cos y\,dy = 0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل می‌باشد:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P} dx + e^{-x}\cos y\,dy = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} x + e^{-x}\sin y + c = 0$$

مثال ۶۴. *فاکتور انتگرال و جواب عمومی معادله* $(2x + y - 1)dx + x(x + y)dy = 0$ *عبارت است از:*

۱) $\mu(y) = e^y \quad \& \quad x^2 + xy - x = ce^y$ ۲) $\mu(y) = e^y \quad \& \quad x^2 + xy - x = ce^{-y}$

۳) $\mu(y) = e^{-y} \quad \& \quad x^2 - xy + x = ce^{-y}$ ۴) $\mu(y) = e^{-y} \quad \& \quad x^2 - xy + x = ce^y$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = 2x + y - 1 \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{2x + y - 1}{2x + y - 1} = 1 = a(y) \quad \Rightarrow \boxed{\mu(y) = e^{\int dy} = e^y}$$

$$\xrightarrow{\mu(x)\times\text{(معادله)}} e^y(2x + y - 1)dx + e^y x(x + y)dy = 0$$

معادله حاصل کامل می‌باشد. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P} e^y(2x + y - 1)\,dx = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} e^y(x^2 + yx - x) + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + xy - x = Ce^{-y} \quad ;(-c = C)$$

مثال ۶۵. *فاکتور انتگرال معادله زیر کدام است؟*

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

۱) $\frac{1}{y^2}$ ۲) $\frac{1}{y^3}$ ۳) $\frac{1}{y^5}$ ۴) $\frac{1}{y^4}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3) - (8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = -8xy^3e^y - 8xy^2 - 4 = -4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1) \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{-4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = \frac{-4}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{-4}{y}dy} = e^{-4\operatorname{Ln} y} = \frac{1}{y^4}$$

معادلات دیفرانسیل خطی و برنولی

ـ معادلات دیفرانسیل خطی

هر معادله با نمایش عمومی $\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)$، یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به y برحسب x نامیده می‌شود.

می‌توان بررسی کرد، عامل انتگرالساز و جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx} \quad \& \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)\,b(x)\,dx + c\right\}$$

اگر در معادله دیفرانسیل فوق جای x و y را عوض کنیم، به نمایش عمومی $\frac{dx}{dy} + a(y)x = b(y)$ می‌رسیم که طبق تعریف فوق یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به x بر حسب y است. در اینصورت؛

$$\mu(y) = e^{\int a(y)dy} \quad \& \quad x(y) = \frac{1}{\mu(y)}\left\{\int \mu(y)\,b(y)\,dy + c\right\}$$

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + (\frac{1}{x})y = \frac{1}{x}$ **را تعیین کنید.**

حل.

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x;\ a(x)=\frac{1}{x} \ \&\ b(x)=\frac{1}{x}} \mu(x) = e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int(\frac{1}{x})dx} = e^{\operatorname{Ln} x} = x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)b(x)dx + c\right\} = \frac{1}{x}\left\{\int x \times (\frac{1}{x})dx + c\right\} = \frac{1}{x}(x + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + \frac{c}{x}$$

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = y\,(x + y^{۳})$ را تعیین کنید.

حل.

$$(x+y^{۳})\frac{dy}{dx}=y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}=\frac{x+y^{۳}}{y}=\frac{x}{y}+y^{۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}+(-\frac{۱}{y})x=y^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x \text{ ؛ } a(y)=-\frac{۱}{y} \ \& \ b(y)=y^{۲}} \mu(y)=e^{\int a(y)dy}=e^{\int(-\frac{۱}{y})dy}=e^{-Lny}=\frac{۱}{y} \quad \&$$

$$x(y)=\frac{۱}{\mu(y)}\left\{\int\mu(y)\,b(y)dy+c\right\}=\frac{۱}{(-\frac{۱}{y})}\left\{\int\frac{۱}{y}\times(y^{۲})dy+c\right\} \Rightarrow x(y)=y(\frac{y^{۲}}{۲}+c) \Rightarrow x=\frac{y^{۳}}{۲}+cy$$

ـ معادلات دیفرانسیل برنولی.

هر معادله با نمایش عمومی $\frac{dy}{dx}+a(x)\,y=b(x)\,y^{n}$ ، یک معادله دیفرانسیل برنولی نسبت به y برحسب x نامیده می‌شود. حل این دسته از معادلات با الگوی عمومی زیر صورت می‌گیرد:

$$\frac{dy}{dx}+a(x)\,y=b(x)\,y^{n} \xrightarrow{\text{گام اول : } y^{-n}\times \text{ (معادله)}} y^{-n}\frac{dy}{dx}+a(x)\,y^{۱-n}=b(x)$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم : } (y^{۱-n}=u \ \Rightarrow \ y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۱-n}\cdot\frac{du}{dx})} \frac{۱}{۱-n}\cdot\frac{du}{dx}+a(x)\,u=b(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}+(۱-n)\,a(x)\,u=(۱-n)\,b(x)$$

معادله حاصل یک معادله خطی نسبت به u برحسب x است.

لازم بذکر است، مشابهاً معادلات دیفرانسیل برنولی نسبت به x بر حسب y نیز قابل بررسی می‌باشند.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{x^{۳}}{y^{۲}}=۳xy'-۲y$ را پیدا کنید.

حل.

$$۳xy'-۲y=x^{۳}y^{-۲} \xrightarrow{\frac{۱}{۳x^{۳}}\times \text{ (معادله)}} y'-(\frac{۲}{۳x})y=\frac{۱}{۳}x^{۲}y^{-۲} \xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{۲} \text{ ؛ برنولی}} y^{۲}y'-(\frac{۲}{۳x})y^{۳}=x^{۲}$$

$$\xrightarrow{(y^{۳}=u \ \Rightarrow \ y^{۲}y'=\frac{u'}{۳})} \frac{u'}{۳}-(\frac{۲}{۳x})u=\frac{۱}{۳}x^{۲} \quad \Rightarrow \quad u'-(\frac{۲}{x})u=x^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int(-\frac{۲}{x})\,dx}=e^{-۲Lnx}=\frac{۱}{x^{۲}} \quad \&$$

$$u(x)=\frac{۱}{(\frac{۱}{x^{۲}})}\left\{\int\frac{۱}{x^{۲}}\times(x^{۲})dx+c\right\} \Rightarrow u=x^{۲}(x+c)=x^{۳}+cx^{۲} \xrightarrow{u=y^{۳}} y^{۳}=x^{۳}+cx^{۲}$$

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $y'=\frac{۳x^{۲}}{x^{۳}+y+۱}$ را حل کنید.

حل.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۳x^{۲}}{x^{۳}+y+۱} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}=\frac{x^{۳}+(y+۱)}{۳x^{۲}}=\frac{x}{۳}+(\frac{y+۱}{۳})x^{-۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}-(\frac{۱}{۳})x=\frac{۱}{۳}(y+۱)x^{-۲}$$

$$\xrightarrow{x^{۲}\times \text{ (معادله)} \text{ ؛ برنولی نسبت به } x \text{ بر حسب } y} x^{۲}\frac{dx}{dy}-(\frac{۱}{۳})x^{۳}=\frac{۱}{۳}(y+۱)$$

$$\xrightarrow{(x^{۳}=u \ \xrightarrow{\frac{d}{dy}\ (\text{طرفین})} \ ۳x^{۲}\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy})} (\frac{۱}{۳})\frac{du}{dy}-(\frac{۱}{۳})\,u=\frac{۱}{۳}(y+۱) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy}-u=y+۱$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } y} \mu(y)=e^{\int(-۱)dy}=e^{-y} \quad \&$$

$$u(y)=\frac{۱}{(e^{-y})}\left\{\int e^{-y}\times(y+۱)dy+c\right\}=e^{y}(-ye^{-y}-۲e^{-y}+c) \ \Rightarrow u=-y-۲+ce^{y} \xrightarrow{u=x^{۳}} x^{۳}=-y-۲+ce^{y}$$

یادآوری. برای محاسبه انتگرال $\int(y+۱)e^{-y}dy$ ، می‌توان از روش جزء به جزء استفاده کرد:

$y+۱$	$+$	e^{-y}
۱	$-$	$-e^{-y}$
۰		e^{-y}

$$\Rightarrow \quad \int(y+۱)e^{-y}dy=-(y+۱)e^{-y}-e^{-y}=-ye^{-y}-۲e^{-y}$$

مثال ۶۶. جواب معادله دیفرانسیل مقابل برابر کدامیک از پاسخ‌های زیر می‌باشد: $x^{۲}\frac{dy}{dx}+۲y=۵x$

۱) $y=\int\frac{۵}{x}e^{-\frac{۲}{x}}dx+c$

۲) $y=ce^{-\frac{۲}{x}}+x$

۳) $y=\frac{۵}{x}e^{x^{۲}}+c$

۴) $y=e^{\frac{۲}{x}}\left\{\int\frac{۵}{x}e^{-\frac{۲}{x}}dx+c\right\}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$x^{۲}\frac{dy}{dx}+۲y=۵x \quad \Rightarrow \quad y'+\frac{۲}{x^{۲}}y=\frac{۵}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{\int a(x)dx}=e^{\int\frac{۲}{x^{۲}}dx}=e^{-\frac{۲}{x}} \quad \&$$

$$y(x)=\frac{۱}{\mu(x)}\left\{\int\mu(x)\,b(x)\,dx+c\right\}=e^{\frac{۲}{x}}\left\{\int e^{-\frac{۲}{x}}\times\frac{۵}{x}dx+c\right\}$$

مثال ۶۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'\cos y+\sin y=e^{-x}$ برابر است با :

۱) $\sin y=xe^{-x}+ce^{-x}$

۲) $\cos y=-xe^{-x}+ce^{-x}$

۳) $\cos y=-xe^{x}+ce^{x}$

۴) $\sin y=xe^{x}+ce^{-x}$

☑ **حل.** گزینه «۱». این معادله با تغییر متغیر مناسب قابل تبدیل به خطی می‌باشد:

$$y'\cos y + \sin y = e^{-x} \xrightarrow{\sin y = u \Rightarrow y'\cos y = u'} u' + u = e^{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int dx} = e^{x} \quad \&$$

$$u(x) = \frac{1}{e^{x}}\left\{ \int e^{x} \times e^{-x}\,dx + c \right\} = e^{-x}(x + c) \quad \Rightarrow \quad u = xe^{-x} + ce^{-x} \xrightarrow{u=\sin y} \sin y = xe^{-x} + ce^{-x}$$

مثال ۶۸. جواب کلی معادله دیفرانسیل $xy' - y = x^{2}\cos x$ کدام است؟

۱) $y = x + ax\sin x$ ۲) $y = x^{2} + ax\sin x$ ۳) $y = ax + x\sin x$ ۴) $y = ax^{2} + \sin x$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$xy' - y = x^{2}\cos x \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{\int(-\frac{1}{x})dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left\{ \int \frac{1}{x} \times x\cos x\,dx + c \right\} = x\left\{ \int \cos x\,dx + c \right\} = x(\sin x + c) \quad \Rightarrow \quad y = x\sin x + cx$$

مثال ۶۹. جواب مسأله مقابل در $x = e$ برابر است با: $x^{2}y' + xy = 1 \quad ; \quad x > 0 \quad , \quad y(1) = 2$

۱) $\frac{3}{e}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{2}{e}$ ۴) ۲

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$x^{2}y' + xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^{2}} \quad ; x > 0$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\left\{ \int x \times \frac{1}{x^{2}}dx + c \right\} = \frac{1}{x}\left\{ \int \frac{1}{x}dx + c \right\} \quad \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}(\ln x + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=1} y(1) = \frac{1}{1}(\ln 1 + c) = c \xrightarrow{y(1)=2} c = 2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی; } (c=2 \ \& \ x=e)} y(e) = \frac{1}{e}(\ln + 2) = \frac{1}{e}(1 + 2) \quad \Rightarrow \quad y(e) = \frac{3}{e}$$

مثال ۷۰. معادله دیفرانسیل زیر، تغییرات غلظت در یک مخزن با شرایط اولیه زیر را نشان می‌دهد. زمان رسیدن غلظت به مقدار $c = 0/011$ **برابر کدامیک از پاسخها می‌باشد؟** $10\frac{dc}{dt} + 2c = 0/02 \quad ; \quad t = 0 \ , \ c = 0/02$

۱) $t = \infty$ ثانیه ۲) $t = 20/41$ ثانیه ۳) $t = 11/51$ ثانیه ۴) $t = 15/64$ ثانیه

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$10\frac{dc}{dt} + 2c = 0/02 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dt} + 0/2c = 0/002$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } c \text{ برحسب } t} \mu(t) = e^{\int 0/2dt} = e^{0/2t} \quad \&$$

$$c(t) = \frac{1}{e^{0/2t}}\left\{ \int e^{0/2t} \times 0/002\,dt + A \right\} = e^{-0/2t}(0/001e^{0/2t} + A) \quad \Rightarrow \quad c(t) = 0/001 + Ae^{-0/2t} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{t=0} c(0) = 0/001 + A \xrightarrow{c(0)=0/002} A = 0/001$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی; } (A=0/001 \ \& \ c=0/011)} 0/011 = 0/001 + 0/001e^{-0/2t} \quad \Rightarrow \quad e^{-0/2t} = 0/1 \quad \Rightarrow$$

$$-0/2t = \ln 0/1 = -\ln 10 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{\frac{2}{10}} = 5\ln 10 \cong 11/51 \text{ sec}$$

مثال ۷۱. جواب مسأله مقدار اولیه مقابل برابر است با: $dy + (y\,\text{cotg}\,x - e^{\cos x})dx = 0 \quad ; y(\frac{\pi}{2}) = 1$

۱) $y\sin x + e^{\cos x} = 2$ ۲) $2y\sin x - e^{\cos x} = 1$

۳) $2y\sin x + e^{\cos x} = 3$ ۴) $y\sin x + 2e^{\cos x} = 3$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$dy + (y\,\text{cotg}\,x - e^{\cos x})dx = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\cos x} - y\,\text{cotg}\,x \quad \Rightarrow \quad y' + (\text{cotg}\,x)y = e^{\cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int \text{cotg}\,x\,dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln \sin x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \sin x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\sin x}\left\{ \int \sin x \times e^{\cos x}dx + c \right\} = \frac{1}{\sin x}(-e^{\cos x} + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}(-e^{\cos\frac{\pi}{2}} + c) \xrightarrow{y(\frac{\pi}{2})=1} 1 = (-1 + c) \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } c=2 \text{ در جواب عمومی}} y = \frac{1}{\sin x}(-e^{\cos x} + 2) \quad \Rightarrow \quad y\sin x = -e^{\cos x} + 2 \quad \Rightarrow \quad y\sin x + e^{\cos x} = 2$$

مثال ۷۲. جواب کلی معادله دیفرانسیل $y' - y\,\text{tg}\,x = 2\cos x$ کدام است؟

۱) $y = \frac{a}{\cos x} - \sin x$ ۲) $y = \frac{a}{\cos x} + \sin x$ ۳) $y = \frac{x+a}{\cos x} + \sin x$ ۴) $y = \frac{x+a}{\cos x} - \sin x$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y' - (\text{tg}\,x)y = 2\cos x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int -\text{tg}x\,dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}\left\{ \int \cos x \times 2\cos x\,dx + c \right\} = \frac{1}{\cos x}\left\{ \int 2\cos^{2} x\,dx + c \right\}$$

$\xrightarrow{2\cos^2 x=1+\cos 2x} y(x)=\frac{1}{\cos x}\left\{\int(1+\cos 2x)\,dx+c\right\}=\frac{1}{\cos x}(x+\frac{1}{2}\sin 2x+c) \quad \Rightarrow$

$\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x} y(x)=\frac{(x+c)+\sin x\cos x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y(x)=\frac{x+c}{\cos x}+\sin x$

مثال ۷۳. *جواب کلی معادله دیفرانسیل* $x^2y^2y'+xy^3=2$ *به صورت* $y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)}$ *است،* $f(x)$ *کدام است؟*

۱) $kx+3$ ۲) $3x+k$ ۳) kx^2+3 ۴) $3x^2+k$

☑ **حل.** گزینه «۴». از یک طرف؛

$$y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{f(x)} \quad \Rightarrow \quad xy=\sqrt[3]{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^3y^3 \qquad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$x^2y^2y'+xy^3=2 \Rightarrow y^2y'+\frac{1}{x}y^3=\frac{2}{x^2} \xrightarrow{(y^3=u \Rightarrow y^2y'=\frac{u'}{3})} \frac{u'}{3}+\frac{1}{x}u=\frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$u'+\frac{3}{x}u=\frac{6}{x^2} \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u برحسب x}} \mu(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3 \qquad \&$$

$$u(x)=\frac{1}{x^3}\left\{\int x^3\times\frac{6}{x^2}\,dx+c\right\}=\frac{1}{x^3}(3x^2+c) \xrightarrow{u=y^3} y^3=\frac{1}{x^3}(3x^2+c) \quad \Rightarrow \quad x^3y^3=3x^2+c$$

$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} f(x)=3x^2+c$

مثال ۷۴. *معادله دیفرانسیل* $y'+(x^2+1)y=y^3\sin x$ *با کدام تغییر متغیر به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود؟*

۱) $Z=x^{-2}$ ۲) $Z=y^{-2}$ ۳) $Z=x^2$ ۴) $Z=y^2$

☑ **حل.** گزینه «۲». یادآوری. معادله برنولی $y'+a(x)y=b(x)y^n$ با تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ به یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به u بر حسب x تبدیل می‌شود:

$$y'+(x^2+1)y=(\sin x)y^3 \xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-3};\ \text{برنولی}} y^{-3}y'+(x^2+1)y^{-2}=\sin x \quad \Rightarrow \quad Z=y^{-2}$$

مثال ۷۵. *اگر تابع* $x(t)$ *جوابی از معادله دیفرانسیل* $\frac{dx}{dt}+ax=b$ *باشد که در آن* $a>0$ *،* b *حقیقی ثابت هستند ، آنگاه:*

$\lim_{t\to\infty} x(t)=$

۱) $\frac{b}{a}$ ۲) b ۳) صفر ۴) بستگی به شرایط اولیه دارد.

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\frac{dx}{dt}+ax=b \xrightarrow{\text{خطی نسبت به x برحسب t}} \mu(x)=e^{\int a\,dx}=e^{at} \qquad \&$$

$$x(t)=\frac{1}{e^{at}}\left\{\int e^{at}(b)\,dt+c\right\}=e^{-at}(\frac{b}{a}e^{at}+c) \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{b}{a}+ce^{-at} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{b}{a}$$

مثال ۷۶. *برای جواب مساله مقدار اولیه زیر داریم:*

$$\frac{dy}{dx}+y=(x-1)y^3$$

۱) $\lim_{x\to\infty} y(x)=\infty$ ۲) $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ ۳) $\lim_{x\to\infty} y(x)=1$ ۴) $\lim_{x\to\infty} y(x)=-1$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-2};\ \text{برنولی}} y^{-2}y'+y^{-1}=(x-1)$

$\xrightarrow{y^{-1}=u \Rightarrow y^{-2}y'=-u'} -u'+u=(x-1) \quad \Rightarrow \quad u'-u=1-x$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u برحسب x}} \mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x} \qquad \& \qquad u(x)=e^x\left\{\int e^{-x}(1-x)\,dx+c\right\}=e^x(xe^{-x}+c) \quad \Rightarrow$

$$u(x)=xe^{-x}+ce^{-x} \xrightarrow{u=y^{-1}} \frac{1}{y(x)}=x+ce^x \quad \Rightarrow \quad (x\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(x)}\to\infty \quad \Rightarrow \quad y(x)\to 0)$$

یادآوری.

$1-x$	+	e^{-x}
-1	−	$-e^{-x}$
0		e^{-x}

$$\Rightarrow \quad \int(1-x)e^{-x}\,dx=-(1-x)e^{-x}+e^{-x}=-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}+e^{-x}=xe^{-x}$$

مثال ۷۷. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y'+y=\frac{x}{y}$ *کدام است؟*

۱) $y^2=ce^{2x}+x-\frac{1}{2}$ ۲) $y^2=ce^{-2x}-x+\frac{1}{2}$ ۳) $y^2=ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}$ ۴) $y^2=ce^{2x}-x+\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y'+y=\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y'+y=xy^{-1}$$

$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y;\ \text{برنولی}} yy'+y^2=x \xrightarrow{y^2=u \Rightarrow yy'=\frac{u'}{2}} \frac{u'}{2}+u'=x \quad \Rightarrow \quad u'+2u=2x$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u برحسب x}} \mu(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x} \qquad \&$

$$u(x)=\frac{1}{e^{2x}}\left\{\int e^{2x}\times 2x\,dx+c\right\}=e^{-2x}((x-\frac{1}{2})e^{2x}+c) \Rightarrow u=x-\frac{1}{2}+ce^{-2x} \xrightarrow{u=y^2} y^2=x-\frac{1}{2}+ce^{-2x}$$

یادآوری.

$2x$	+	e^{2x}
2	−	$\frac{1}{2}e^{2x}$
0		$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\Rightarrow \quad \int 2xe^{2x}=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}=(x-\frac{1}{2})e^{2x}$$

مثال ۷۸. *معادله* $y' - y = xy^5$ *با شرط* $y(\frac{1}{4}) = 1$ *داده شده است.* $y(0)$ *برابر است با:*

۱) $(-\frac{1}{4}+e)^4$ ۲) 0 ۳) $(\frac{1}{4}+e)^4$ ۴) $(\frac{1}{4}+e)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y' - y = xy^5$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-5};\ \text{برنولی}} y^{-5}y' - y^{-4} = x \xrightarrow{y^{-4}=u \Rightarrow y^{-5}y'=\frac{u'}{-4}} \frac{u'}{-4} - u = x \quad \Rightarrow \quad u' + 4u = -4x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int 4dx} = e^{4x} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{1}{e^{4x}}\left\{\int e^{4x} \times -4x\,dx + c\right\} = e^{-4x}\left((-x+\frac{1}{4})e^{4x} + c\right) \quad \Rightarrow \quad u(x) = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x}$$

$$\xrightarrow{u=y^{-4}} y^{-4}(x) = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} (y(\tfrac{1}{4}))^{-4} = ce^{-1} \xrightarrow{y(\frac{1}{4})=1} 1 = \frac{c}{e} \quad \Rightarrow \quad c = e$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=e \ \&\ x=0) \text{ در جواب عمومی}} y^{-4}(0) = \frac{1}{4} + e \times e^0 \quad \Rightarrow \quad y^{-4}(0) = \frac{1}{4} + e \quad \Rightarrow \quad y(0) = (\frac{1}{4}+e)^4$$

مثال ۷۹. *معادله* $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$ *با شرط* $y(\sqrt{\pi}) = 0$ *در* $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *دارای جوابی به صورت زیر است؟*

۱) 0 ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳) $\sqrt{\pi}$ ۴) $\sqrt{2\pi}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = 2x^3\cos x^2 \times y^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times yx;\ \text{برنولی}} yy' - \frac{1}{x}y^2 = 2x^3\cos x^2 \xrightarrow{y^2=u \Rightarrow yy'=\frac{u'}{2}} \frac{u'}{2} - \frac{1}{x}u = 2x^3\cos x^2 \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{2}{x}u = 4x^3\cos x^2$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int(-\frac{2}{x})dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{1}{x^{-2}}\left\{\int x^{-2} \times 2x^3\cos x^2\,dx + c\right\} = x^2\left\{\int 2x\cos x^2 dx + c\right\} \quad \Rightarrow \quad u(x) = x^2(2\sin x^2 + c)$$

$$\xrightarrow{u=y^2} y^2 = x^2(2\sin x^2 + c)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{\pi}} (y(\sqrt{\pi}))^2 = (\sqrt{\pi})^2(2\sin(\sqrt{\pi})^2 + c) \xrightarrow{y(\sqrt{\pi})=0} 0 = \pi(2\sin\pi + c) \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=0 \ \&\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}) \text{ در جواب عمومی}} (y(\sqrt{\frac{\pi}{2}}))^2 = \frac{\pi}{2}(2\sin\frac{\pi}{2} + 0) \Rightarrow (y(\sqrt{\frac{\pi}{2}}))^2 = \pi \Rightarrow y(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \pm\sqrt{\pi}$$

مثال ۸۰. *معادله دیفرانسیل* $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ *مفروض است. اگر به ازاء* $y = 0$ *داشته باشیم* $x = 0$*، آنگاه برای تابع جواب*

مقدار $\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2}{y^2}$ *برابر کدام گزینه است؟*

۱) 0 ۲) $+1$ ۳) 2 ۴) $+\infty$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2y + y^3}{x} = xy + \frac{y^3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - yx = y^3 \times x^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times x;\ \text{برنولی نسبت به x}} x\frac{dx}{dy} - yx^2 = y^3 \xrightarrow{u=x^2 \Rightarrow \frac{du}{dy}=2x\frac{dx}{dy}} \frac{1}{2}\frac{du}{dy} - yu = y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} - 2yu = 2y^3$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به x بر حسب y}} \mu(y) = e^{\int -2y\,dy} = e^{-y^2} \qquad \&$$

$$u(y) = \frac{1}{e^{-y^2}}\left\{\int e^{-y^2} \times 2y^3\,dy + c\right\} = e^{y^2}(-(y^2+1)e^{-y^2} + c) \quad \Rightarrow \quad u(y) = -(y^2+1) + ce^{y^2}$$

$$\xrightarrow{u=x^2} x^2(y) = -y^2 - 1 + ce^{y^2} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

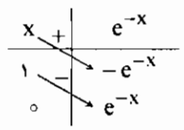
$$\xrightarrow{y=0} (x(0))^2 = -1 + c \xrightarrow{x(0)=0} 0 = -1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{در جواب عمومی } c=1 \text{ با جایگذاری}} x^2 = -y^2 - 1 + e^{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{e^{y^2} - y^2 - 1}{y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y^2} - y^2 - 1}{y^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2ye^{y^2} - 2y}{2y} = \lim_{y\to 0}(e^{y^2} - 1) \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to 0}\frac{x^2}{y^2} = 0$$

راهنمایی. از یک طرف با استفاده از روش جزء به جزء داریم:



$$\Rightarrow \quad \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$I = \int 2y^3 e^{-y^2}\,dy = \int y^2\,e^{-y^2}.\,2y\,dy$$

$$\xrightarrow{y^2=x \ \Rightarrow\ 2y\,dy=dx} I = \int x\,e^{-x}\,dx \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} I = -(x+1)e^{-x} \xrightarrow{x=y^2} I = -(y^2+1)e^{-y^2}$$

معادلات دیفرانسیل ریکاتی

هر معادله با نمایش عمومی $\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)y^{۲}+c(x)$ ، که در آن $b(x)$ و $c(x)$ مخالف صفر فرض شده‌اند، یک معادله دیفرانسیل ریکاتی نامیده می‌شود.

می‌توان بررسی کرد، اگر y_p یک جواب خصوصی معادله ریکاتی فوق باشد، با اعمال تغییر متغیر $y=y_p+\frac{۱}{u}$، معادله مفروض به معادله دیفرانسیل خطی $u'+(۲b(x)y_p-a(x))u=-b(x)$ تبدیل می‌شود.

بعنوان مثال. اگر $y_p=x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'+۲y^{۲}-\frac{۱}{x}y-۲x^{۲}=۰$ باشد، جواب عمومی را تعیین کنید.

حل. معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله ریکاتی است:

$$y'-\frac{۱}{x}y=-۲y^{۲}+۲x^{۲}$$

$$\xrightarrow{(y=x+\frac{۱}{u}\ \Rightarrow\ y'=۱-\frac{u'}{u^{۲}})} (۱-\frac{u'}{u^{۲}})-\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{u})=-۲(x+\frac{۱}{u})^{۲}+۲x^{۲} \quad \Rightarrow$$

$$۱-\frac{u'}{u^{۲}}-۱-\frac{۱}{xu}=-۲(x^{۲}+\frac{۱}{u^{۲}}+۲\frac{x}{u})+۲x^{۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u^{۲}}+\frac{۱}{xu}=\frac{۲}{u^{۲}}+\frac{۴x}{u} \xrightarrow{u^{۲}\times(\text{طرفین})} u'+(\frac{۱}{x}-۴x)u=۲$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int(\frac{۱}{x}-۴x)dx}=e^{\ln x-۲x^{۲}}=xe^{-۲x^{۲}} \quad \&$$

$$u(x)=\frac{۱}{xe^{-۲x^{۲}}}\left\{\int xe^{-۲x^{۲}}\times ۲\,dx+c\right\}=\frac{۱}{xe^{-۲x^{۲}}}(-\frac{۱}{۲}e^{-۲x^{۲}}+c) \quad \Rightarrow \quad u=\frac{۱}{x}(ce^{۲x^{۲}}-\frac{۱}{۲})$$

$$\xrightarrow{y=x+\frac{۱}{u}\ \Rightarrow\ u=\frac{۱}{y-x}} \frac{۱}{y-x}=\frac{۱}{x}(ce^{۲x^{۲}}-\frac{۱}{۲})$$

حالتهای دوم و سوم در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

اکنون زمان آن فرا رسیده است، تا به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در حالتهای دوم و سوم بپردازیم. اساس کار بر این است، که بتوان این حالتها را با اعمال تغییر متغیر مناسب، به حالت اول تبدیل کرده و سپس با استفاده از روشهای حل در حالت اول به تعیین جواب بپردازیم.

قبل از بررسی این حالتها، بیان دو تذکر لازم است:

۱ـ جوابهای معادلات دیفرانسیل در حالتهای دوم و سوم، معمولاً به شکل توابع پارامتری بیان می‌شوند.

۲ـ معادلات دیفرانسیل در حالتهای دوم و سوم، عموماً دارای جوابهای غیرعادی می‌باشند. در حل این دسته از معادلات باید دقیق باشیم، تا این گونه جوابها حذف نگردند.

همانگونه که در پیشگفتار نیز اشاره شد، منحنی نمایش هر جواب غیرعادی، غالباً بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس می‌باشد. این نوع منحنی‌ها، پوش جواب عمومی نامیده می‌شوند. در حالت کلی؛

تعریف. منحنی با معادله $\bar{g}(x,y)=۰$ را پوش دسته منحنی $g(x,y,c)=۰$ می‌نامیم، هرگاه بر تمامی منحنی‌های دسته مذکور و بر هر کدام فقط در یک نقطه مماس باشد.

لازم بذکر است، برای بدست آوردن پوش دسته منحنی $g(x,y,c)=۰$، کافیست پارامتر c را در دستگاه متشکل از معادله $g(x,y,c)=۰$ و مشتق آن نسبت به c حذف کنیم:

$$\begin{cases} g(x,y,c)=۰ \\ \frac{d}{dc}g(x,y,c)=۰ \end{cases}$$

بعنوان مثال. پوش دسته منحنی $y=cx+\frac{۱}{c}$ زیر را بدست آورید.

حل. از یک طرف؛

$$y=cx+\frac{۱}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dc}\ (\text{طرفین})} ۰=x-\frac{۱}{c^{۲}} \quad \Rightarrow \quad c^{۲}=\frac{۱}{x}$$

در اینصورت، برای محاسبه پوش دسته منحنی مفروض، کافیست پارامتر c را در دستگاه زیر حذف کنیم:

$$\begin{cases} y=cx+\frac{۱}{c} \\ c^{۲}=\frac{۱}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{۲}=c^{۲}x^{۲}+\frac{۱}{c^{۲}}+۲x \\ c^{۲}=\frac{۱}{x} \end{cases} \Rightarrow \quad y^{۲}=\frac{۱}{x}\times x^{۲}+x+۲x \quad \Rightarrow \quad y^{۲}=۴x$$

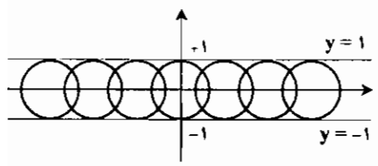
مثال ۸۱. پوش دسته منحنی $(x-c)^{۲}+y^{۲}=۱$ عبارتست از:

۱) $y=\pm ۱$ ۲) $y=\pm ۲$ ۳) $y=۰$ ۴) $y=-۱$

☑ **حل.** گزینه «۱». از یک طرف؛

$$(x-c)^{۲}+y^{۲}=۱ \xrightarrow{\frac{d}{dc}\ (\text{طرفین})} -۲(x-c)=۰ \quad \Rightarrow \quad c=x$$

در اینصورت، کافیست پارامتر c را در دستگاه زیر حذف کنیم:



$$\begin{cases} (x-c)^{۲}+y^{۲}=۱ \\ c=x \end{cases} \Rightarrow \quad y^{۲}=۱ \quad \Rightarrow \quad y=\pm ۱$$

حالت دوم. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که نسبت به y قابل حل هستند ؛ $y=f(x,y')$.

برای حل معادلات دیفرانسیل در حالت دوم، کافیست ابتدا در معادله مفروض تساوی $y'=P$ جایگزین شود. سپس با مشتقگیری نسبت به x از طرفین رابطه حاصل، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول ـ حالت اول بدست آورد و به حل آن پرداخت.

بعنوان مثال. جوابهای معادله دیفرانسیل $y = y' + Lny'$ را تعیین کنید.

حل.

$$y = y' + Ln\,y' \xrightarrow{y' \mapsto P} \boxed{y = P + Ln\,P}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} y' = \frac{dP}{dx} + \frac{\frac{dP}{dx}}{P} \xrightarrow{y'=P} P = (1 + \frac{1}{P})\frac{dP}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{P+1}{P^2}dP = dx$$

$$\xrightarrow{\int\ (\text{طرفین});\ \text{حدا شونده}} \int(\frac{1}{P} + \frac{1}{P^2})dP = x + c \quad \Rightarrow \quad Ln\,P - \frac{1}{P} = x + c \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + \frac{1}{P} - Ln\,P = c}$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض با نمایش پارامتری زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{P} - Ln\,P + c = 0 \\ y - P - Ln\,P = 0 \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل خاص در حالت دوم.

ـ معادلهٔ دیفرانسیل لاگرانژ. هر معادله با نمایش عمومی $y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$، معادله دیفرانسیل لاگرانژ نامیده می‌شود. می‌توان بررسی کرد جوابهای عمومی و غیرعادی معادله دیفرانسیل لاگرانژ بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

الف ـ از آنجائیکه معادله دیفرانسیل لاگرانژ، از دسته معادلات حالت دوم است، با فرض $y' = P$ و سپس مشتقگیری نسبت به x، معادله لاگرانژ همواره به یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به x برحسب P تبدیل می‌شود. که با حل معادله خطی حاصل، جواب عمومی معادله لاگرانژ بدست می‌آید.

ب ـ جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل لاگرانژ $y = x\,\varphi(y') + \psi(y')$ را نیز می‌توان با جایگذاری ریشه‌های معادله $\varphi(P) = P$ در تساوی $y = x\,\varphi(P) + \psi(P)$ بدست آورد. در نتیجه جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل لاگرانژ، همواره بصورت معادله یک خط می‌باشد.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy'^2 + y'^3$ را تعیین کنید.

حل.

$$y = xy'^2 + y'^3 \xrightarrow{\text{گام اول};\ y' \mapsto P} \boxed{y = xP^2 + P^3}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم};\ \frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} y' = P^2 + x \times 2P\frac{dP}{dx} + 3P^2\frac{dP}{dx} \xrightarrow{y'=P} P = P^2 + (2xP + 3P^2)\frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$P - P^2 = (2xP + 3P^2)\frac{dP}{dx} \quad ;(1)$$

در اینصورت، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{I)}\ P - P^2 \neq 0\ ; \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} \frac{dx}{dP} = \frac{2xP + 3P^2}{P - P^2} = \frac{2x}{1-P} + \frac{3P}{1-P} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dP} - \frac{2}{1-P}x = \frac{3P}{1-P}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } x \text{ بر حسب } P} \mu(P) = e^{\int -\frac{2}{1-P}dP} = e^{2Ln(P-1)} = (P-1)^2 \qquad \&$$

$$x(P) = \frac{1}{(P-1)^2}\left\{\int (P-1)^2 \times \frac{3P}{1-P}\,dP + c\right\} = \frac{1}{(P-1)^2}\left\{\int(-3P^2 + 3P)\,dP + c\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{1}{(P-1)^2}(-P^3 + \frac{3}{2}P^2 + c)}$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{(P-1)^2}(-P^3 + \frac{3}{2}P^2 + c) = 0 \\ y - x\,P^2 - P^3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{II)}\ P - P^2 = 0\ ; \quad \Rightarrow \quad P = 0 \quad \text{یا} \quad P = 1$$

در اینصورت جوابهای غیرعادی، یا به عبارت دیگر پوشهای جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = x\,y'^2 + y'^3$ بصورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\text{i)}\ \begin{cases} P = 0 \\ y = x\,P^2 + P^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$\text{ii)}\ \begin{cases} P = 1 \\ y = x\,P^2 + P^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

لازم بذکر است، همانگونه که در بحث معادله دیفرانسیل لاگرانژ نیز متذکر شدیم، جواب غیرعادی این دسته از معادلات را می‌توان بطور مستقیم با جایگذاری ریشه‌های معادله $\varphi(P) = P$ در ضابطه معادله لاگرانژ مفروض بدست آورد. بعنوان مثال، در مسأله فوق با توجه به ضابطه معادله لاگرانژ $y = x\,\varphi(y') + \psi(y') = xy'^2 + y'^3$، کافیست ریشه‌های معادله $\varphi(P) = P$ را در تساوی $y = x\,P^2 + P^3$ جایگذاری کنیم:

$$\varphi(P) = P^2 \xrightarrow{\varphi(P)=P \quad \text{با جایگذاری در معادله}} P^2 = P \quad \Rightarrow \quad P = 0 \quad \text{یا} \quad P = 1$$

در اینصورت؛

$$\text{I)}\ P = 0 \xrightarrow{y = xP^2 + P^3 \quad \text{با جایگذاری در}} y = 0$$

$$\text{II)}\ P = 1 \xrightarrow{y = xP^2 + P^3 \quad \text{با جایگذاری در}} y = x + 1$$

که دقیقاً همان جوابهایی است که از حل اول بدست آمد.

ـ معادله دیفرانسیل کلرو. با فرض $\varphi(y') = y'$ در معادله دیفرانسیل لاگرانژ به نمایش عمومی $y = xy' + \psi(y')$ می‌رسیم، که معادله دیفرانسیل کلرو نسبت به y برحسب x نامیده می‌شود. می‌توان بررسی کرد، جوابهای عمومی و غیرعادی معادله دیفرانسیل کلرو بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

الف ـ جواب عمومی همواره با جایگذاری $y' = P$ در ضابطه معادله کلرو، بصورت دسته خطوط $y = x\,P + \psi(P)$ بدست می‌آید.

ب ـ جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل کلرو، همواره پوش جواب عمومی است. در نتیجه می‌توان آن را از حذف پارامتر P در دستگاه متشکل از جواب عمومی و مشتق جواب عمومی نسبت به P بدست آورد:

$$\cdot \begin{cases} y = x\,P + \psi(P) \\ 0 = x + \psi'(P) \end{cases}$$

بعنوان مثال. جوابهای معادله دیفرانسیل $y = xy' + \cos y'$ را بدست آورید.

حل.

$$y = xy' + \cos y' \xrightarrow{y' \mapsto P;\ \text{معادله کلرو}} y = xP + \cos P \qquad (\text{جواب عمومی})$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ (\text{جواب عمومی})} 0 = x + (-\sin P) \quad \Rightarrow \quad x = \sin P$$

در اینصورت، جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP + \cos P \\ x = \sin P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xP + \cos P \\ P = \sin^{-1} x \end{cases} \Rightarrow y = x\sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x)$$

$$\xrightarrow{\cos(\sin^{-1} x)=\sqrt{1-x^2}} y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} \qquad \text{(جواب غیرعادی)}$$

حالت سوم. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که نسبت به x قابل حل هستند: $x = f(y, y')$.

برای حل معادلات دیفرانسیل در این حالت، کافیست ابتدا در معادله مفروض تساوی $y' = P$ جایگزین شود. سپس با مشتقگیری نسبت به y از طرفین رابطه حاصل و جایگذاری $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P}$، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول ـ حالت اول بدست آورد و که به حل آن پرداخت.

بعنوان مثال. جوابهای معادله دیفرانسیل $y^2 y'^2 + 3xy' - y = 0$ **را تعیین کنید.**

حل.

$$y^2 y'^2 + 3xy' - y = 0 \xrightarrow{y' \neq 0 \text{ با فرض}} 3x = \frac{y}{y'} - y^2 y' \xrightarrow{y' \mapsto P} \boxed{3x = \frac{y}{P} - y^2 P}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\text{ (طرفین)}} 3\frac{dx}{dy} = (\frac{1}{P} - \frac{y}{P^2}\frac{dP}{dy}) - (2yP + y^2\frac{dP}{dy}) \Rightarrow 3\frac{dx}{dy} = (\frac{1}{P} - 2yP) - (\frac{y}{P^2} + y^2)\frac{dP}{dy}$$

$$\xrightarrow{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}} \frac{3}{P} = \frac{1}{P} - 2yP - y(\frac{1}{P^2} + y)\frac{dP}{dy} \Rightarrow (\frac{2}{P} + 2yP) + y(\frac{1+yP^2}{P^2})\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{y}{P}(\frac{1+yP^2}{P})\frac{dP}{dy} + 2(\frac{1+yP^2}{P}) = 0 \Rightarrow \frac{1+yP^2}{P}(\frac{y}{P}\frac{dP}{dy} + 2) = 0$$

در اینصورت، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{I)}\ \frac{y}{P}\cdot\frac{dP}{dy} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} = -2\frac{dy}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) أ ; جدا شوند}} \text{Ln}\,P = -2\,\text{Ln}(cy) \Rightarrow \text{Ln}\,P = \text{Ln}(cy)^{-2} \Rightarrow \boxed{P = \frac{C}{y^2}} \quad ; (c^{-2} = C)$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض با نمایش پارامتری زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x = \frac{y}{P} - y^2 P \\ P = \frac{C}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{3P} - \frac{y^2 P}{3} \\ y^2 = \frac{C}{P} \end{cases}$$

$$\text{II)}\ \frac{1+yP^2}{P} = 0 \xrightarrow{P=y' \neq 0 \text{ با فرض}} 1 + yP^2 = 0$$

در اینصورت جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $y^2 y'^2 + 3xy' - y = 0$ بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} 3x = \frac{y}{P} - y^2 P \\ 1 + yP^2 = 0 \end{cases}$$

محاسبات قبلی در مسأله مفروض مبتنی بر فرض $y' \neq 0$ بوده است. اکنون جواب متناظر $y' = 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} y^2 y'^2 + 3xy' - y = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

که یک جواب قابل قبول است.

مثال ۸۲. ***جواب عمومی معادله دیفرانسیل*** $y = 3xy' + \frac{1}{y'^2}$ ***کدام است؟***

۱) $\begin{cases} x = \frac{1}{P}(-\frac{2}{P} + c) \\ y = 2xP + \frac{1}{P^2} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = \frac{2}{P^2}(-\frac{1}{P} + c) \\ y = 2xP + \frac{1}{P^2} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = \frac{1}{P^2}(-\frac{2}{P} + c) \\ y = 2xP + \frac{1}{P^2} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = \frac{1}{P}(-\frac{2}{P} + c) \\ y = 2xP + \frac{1}{P^2} \end{cases}$

☑ **حل.** گزینه «۱». معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل لاگرانژ است:

$$y = 2xy' + \frac{1}{y'^2} \xrightarrow{y' \mapsto P \text{ : گام اول}} \boxed{y = 2xP + \frac{1}{P^2}}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین) ; گام دوم}} y' = 2\times P + 2x\times\frac{dP}{dx} + (-\frac{2}{P^3})\frac{dP}{dx} \quad {}^{y'=P}\ P = 2P + (2x - \frac{2}{P^3})\frac{dP}{dx} \Rightarrow$$

$$-P = (2x - \frac{2}{P^3})\frac{dP}{dx} \xrightarrow{P \neq 0 \text{ با فرض}} \frac{dx}{dP} = \frac{2x - \frac{2}{P^3}}{-P} \Rightarrow \frac{dx}{dP} + \frac{2}{P}x = \frac{2}{P^4}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول نسبت به x بر حسب P}} \mu(P) = e^{\int\frac{2}{P}dP} = e^{2\text{Ln}P} = P^2 \quad \&$$

$$x(P) = \frac{1}{P^2}\{\int P^2\times\frac{2}{P^4}\,dP + c\} = \frac{1}{P^2}\{\int\frac{2}{P^2}\,dP + c\} \Rightarrow \boxed{x(P) = \frac{1}{P^2}(-\frac{2}{P} + c)}$$

از آنجائیکه فقط در جستجوی جواب عمومی بودیم، بنابراین نیازی به بررسی حالت $P = 0$ نیست.

مثال ۸۳. ***جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل*** $y = xy'^3 + \text{Ln}\,y'$ ***کدام گزینه است؟***

۱) $y = x$ ۲) $y = 0$ ، $y = x + 1$ ۳) $y = x + 1$ ۴) $y = 0$ ، $y = x$

☑ **حل.** گزینه «۱». معادله مفروض، یک معادله دیفرانسیل لاگرانژ است. در نتیجه برای محاسبه جواب غیرعادی، کافیست ریشه‌های معادله $\varphi(P) = P$ را در تساوی $y = xP^3 + \text{Ln}\,P$ جایگذاری کنیم:

$$\varphi(P) = P^3 \xrightarrow{\varphi(P)=P \text{ با جایگذاری در معادله}} P^3 = P \Rightarrow P = 0 \quad \text{یا} \quad P = 1 \quad \text{یا} \quad P = -1$$

از آنجائیکه دامنه تابع $\text{Ln}\,P$، اعداد حقیقی مثبت است، در نتیجه متناظر با مقادیر $P = 0$ و $P = -1$ جواب غیرعادی بدست نمی‌آید. در اینصورت؛

$$P = 1 \xrightarrow{y=xP^3+\text{Ln}\,P \text{ با جایگذاری در}} y = x + \text{Ln}\,1 \Rightarrow y = x \qquad \text{(جواب غیرعادی)}$$

مثال ۸۴. پوش جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = xy' + \frac{1}{2y'}$ کدام است؟

۱) $y^2 = 2x$ ۲) $y^2 = 4x$ ۳) $y^2 = x$ ۴) $y^2 = \frac{x}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y = xy' + \frac{1}{2y'} \xrightarrow{\text{معادله کلرو} \; ; \; y' \mapsto P} y = xP + \frac{1}{2P} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = x + (-\frac{1}{2P^2}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2P^2}$$

در اینصورت، پوش جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP + \sqrt{P^2 - 1} \\ x = -\frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2P^2 + \frac{1}{4P^2} + x \\ P^2 = \frac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^2 \times \frac{1}{2x} + \frac{2x}{4} + x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x$$

مثال ۸۵. جواب عمومی و منفرد معادله دیفرانسیل $y = xy' + \sqrt{y'^2 - 1}$ کدام گزینه است؟

۱) $y = xP + \sqrt{P^2 - 1}$ ، $x^2 - y^2 = 1$ ۲) $y = xP + \sqrt{P^2 - 1}$ ، $y^2 - x^2 = 1$

۳) $y = xP + \sqrt{P^2 - 1}$ ، $x^2 + y^2 = 1$ ۴) $y = xP + \sqrt{P^2 - 1}$ ، $y^2 + x^2 = 1$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y = xy' + \sqrt{y'^2 - 1} \xrightarrow{\text{معادله کلرو} \; ; \; y' \mapsto P} \boxed{y = xP + \sqrt{P^2 - 1}} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = x + \frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}}$$

در اینصورت، جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض با حذف پارامتر P در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP + \sqrt{P^2 - 1} \\ x = -\frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow y = (\frac{-P}{\sqrt{P^2 - 1}})P + \sqrt{P^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{\sqrt{P^2 - 1}} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{P^2 - 1}} \\ x = -\frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = 1} \quad \text{(جواب غیرعادی)}$$

مثال ۸۶. جواب عمومی معادله $x = y'^2 + \frac{y}{y'}$ کدام گزینه است؟

۱) $y = Px - P^3$ ۲) $y = Px + P^2$ ۳) $y = Px + \frac{1}{P^2}$ ۴) $y = Px^2$

☑ **حل.** گزینه «۱». حل اول:

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'} \xrightarrow{y' \neq 0 \Rightarrow y' \times \text{(معادله)}} y = xy' - y'^3 \xrightarrow{\text{معادله کلرو} \; ; \; y' \mapsto P} y = xP - P^3 \quad \text{(جواب عمومی)}$$

حل دوم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x'} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$x = y'^2 + \frac{y}{y'} \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} x = (\frac{1}{x'})^2 + \frac{y}{\frac{1}{x'}} \quad \Rightarrow \quad x = yx' + \frac{1}{x'^2}$$

معادله حاصل، یک معادله کلرو نسبت به x بر حسب y است. در نتیجه جواب عمومی آن با جایگذاری $x' = P$ بدست می‌آید:

$$x = yx' + \frac{1}{x'^2} \xrightarrow{x' \mapsto P} x = yP + \frac{1}{P^2} \Rightarrow yP = x - \frac{1}{P^2} \Rightarrow yP = x - \frac{1}{P^2} \Rightarrow y = \frac{1}{P}x - \frac{1}{P^3} \Rightarrow$$

$$y = cx - c^3 \quad ;(\frac{1}{P} = c)$$

مثال ۸۷. جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $x = \frac{y}{y'} + Ln\, y'$ کدام است؟

۱) $y = e^{2x}$ ۲) $y = e^{x+1}$ ۳) $y = e^{x-1}$ ۴) $y = e^{2x-1}$

☑ **حل.** گزینه «۳». حل اول:

$$x = \frac{y}{y'} + Ln\, y' \xrightarrow{y' \neq 0 \Rightarrow y' \times \text{(معادله)}} y = xy' - y' Ln\, y' \xrightarrow{\text{معادله کلرو} \; ; \; y' \mapsto P} \boxed{y = xP - P\, Ln\, P} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = x - Ln\, P - P \times \frac{1}{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = Ln\, P + 1}$$

در اینصورت، جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض با حذف پارامتر P در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP - P\, Ln\, P \\ x = Ln\, P + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xP - P\, LnP \\ P = e^{x-1} \end{cases} \Rightarrow \quad y = x \times e^{x-1} - e^{x-1} \times Ln(e^{x-1}) \quad \Rightarrow$$

$$y = xe^{x-1} - e^{x-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = e^{x-1}$$

حل دوم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x'} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$x = \frac{y}{y'} + Lny' \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} x = \frac{y}{\frac{1}{x'}} + Ln(\frac{1}{x'}) \quad \Rightarrow \quad x = yx' - Lnx'$$

معادله دیفرانسیل حاصل، یک معادله کلرو نسبت به x برحسب y است:

$$\xrightarrow{x' \mapsto P} \boxed{x = yP - \ln P} \quad \text{(جواب عمومی)} \quad \xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = y - \frac{1}{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{P}}$$

جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P در دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = yP - \ln P \\ y = \frac{1}{P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yP - \ln P \\ P = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow x = y \times \frac{1}{y} - \ln(\frac{1}{y}) \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \ln y \quad \Rightarrow$$

$$\ln y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{x-1}$$

مثال ۸۸. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $x = 2y' + 3y'^2$ *کدام گزینه است؟*

۱) $\begin{cases} x = 2P + 3P^2 \\ y = P^2 + P^3 + c \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = 2P + 3P^2 \\ y = 2P^2 + 2P^3 + c \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = 2P + 3P^2 \\ y = P^2 + 2P^3 + c \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = 2P + 3P^2 \\ y = 2\ln P + 6P + c \end{cases}$

☑ **حل.** گزینه «۳». معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه اول ـ حالت سوم است:

$$x = 2y' + 3y'^2 \xrightarrow{y' \mapsto P\ ;\ \text{گام اول}} \boxed{x = 2P + 3P^2}$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم}:\ \frac{d}{dy}\ \text{(طرفین)}} \frac{dx}{dy} = 2\frac{dP}{dy} + 6P\frac{dP}{dy} \xrightarrow{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P}} \frac{1}{P} = (2 + 6P)\frac{dP}{dy} \quad \Rightarrow$$

$$dy = (2P + 6P^2)\,dP \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} \boxed{y = P^2 + 2P^3 + c}$$

مثال ۸۹. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $x = y' + e^{y'}$ *کدام است؟*

۱) $P^2 + Pe^P + c$ ۲) $P^2 + (P+1)e^P + c$ ۳) $P + \int \frac{e^P}{P} dP + c$ ۴) $\frac{P^2}{2} + (P-1)e^P + c$

☑ **حل.** گزینه «۴». معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه اول ـ حالت سوم است:

$$x = y' + e^{y'} \xrightarrow{y' \mapsto P\ ;\ \text{گام اول}} x = P + e^P$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم}\ ;\ \frac{d}{dy}\ \text{(طرفین)}} \frac{dx}{dy} = \frac{dP}{dy} + e^P\frac{dP}{dy} \xrightarrow{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P}} \frac{1}{P} = (1 + e^P)\frac{dP}{dy} \quad \Rightarrow$$

$$dy = (P + Pe^P)\,dP \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} y = \frac{P^2}{2} + (P-1)e^P + c$$

راهنمایی.

	P		e^P
۱		−	e^P
۰			e^P

$$\Rightarrow \int Pe^P\,dP = Pe^P - e^P$$

مثال ۹۰. *جواب غیرعادی (پوش جواب عمومی) معادله دیفرانسیل* $y = xy' - y'^3$ *کدام است؟*

۱) $27y^2 = 4x^3$ ۲) $4y^3 = 27x^2$ ۳) $4y^3 + 27x^2 = 0$ ۴) $27y^2 + 4x^3 = 0$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y = xy' - y' \xrightarrow{\text{معادله کلرو}\ ;\ y' = P} \boxed{y = xP - P^3} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = x - 3P^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3P^2}$$

در اینصورت، جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP - P^3 \\ x = 3P^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2P^2 + P^6 - 2xP^4 \\ x = 3P^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^2 \times \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^3 + 2x(\frac{x}{3})^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{4}{27}x^3$$

مثال ۹۱. *پوش جواب عمومی معادله* $y = xy' + \frac{1}{y'}$ *کدام است؟*

۱) $y^2 = x$ ۲) $y^2 = 4x$ ۳) $x^2 = y$ ۴) $x^2 = 4y$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y = xy' + \frac{1}{y'} \xrightarrow{\text{معادله کلرو}\ ;\ y' = P} \boxed{y = xP + \frac{1}{P}} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ \text{(جواب عمومی)}} 0 = x + (-\frac{1}{P^2}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{P^2}}$$

در اینصورت، پوش جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y = xP + \frac{1}{P} \\ x = \frac{1}{P^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2P^2 + \frac{1}{P^2} + 2x \\ x = \frac{1}{P^2} \end{cases} \Rightarrow y^2 = x^2 \times \frac{1}{x} + x + 2x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x$$

وجود یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول.

در پایان این فصل به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که در بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با مقدار اولیه ـ بویژه آن دسته از معادلاتی که دارای جواب مقدماتی نمی‌باشند ـ راهگشاست.

قضیه. (پیکار ـ وجود یکتایی جواب) معادله دیفرانسیل مرتبه اول حالت اول $y' = f(x, y)$ را در نظر بگیرید. اگر توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک همسایگی نقطه (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه جواب منحصر بفردی از معادله دیفرانسیل مفروض موجود است که از نقطه مورد نظر عبور می‌کند.

بعنوان مثال، از آنجائیکه توابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ در کلیه نقاط صفحه $\mathbb{R}^2$ پیوسته می‌باشند، در اینصورت متناظر با هر نقطه (x_0, y_0) از صفحه مختصات، جوابی از معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y^2$ موجود است، که از نقطهٔ مفروض عبور می‌کند.

مثال ۹۲. *کدامیک از گزاره‌های زیر حول نقطه $(۰,۰)$ برای معادله $y' = ۱ - x^۲ - y^۲$ صحیح است؟*

۱) جواب معادله صعودی است.
۲) جواب معادله اکیداً صعودی است.
۳) جواب معادله نزولی است.
۴) معادله جواب یکتا ندارد.

☑ **حل.** گزینه «۲». از آنجائیکه توابع $f(x,y) = ۱ - x^۲ - y^۲$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -۲y$ در همسایگی نقطه $(۰,۰)$ پیوسته‌اند، بنابراین طبق قضیه پیکار، معادله دیفرانسیل مفروض دارای جوابی یکتا است. از طرف دیگر، حول نقطه مفروض $(۰,۰)$، مقدار تابع $f(x,y) = ۱ - x^۲ - y^۲$ مقداری مثبت است، در نتیجه $y' = ۱ - x^۲ - y^۲ > ۰$ می‌باشد.

مثال ۹۳. *برای مسأله مقدار اولیه $y(۰) = ۲$ ؛ $y' = x^۳(۱ - \sin y)$ ، دو تایی $(۰,۲)$ نقطه‌ای است:*

۱) عادی
۲) می‌نیمم
۳) ماکزیمم
۴) بحرانی

☑ **حل.** گزینه «۲». از آنجائیکه توابع $f(x,y) = x^۳(۱ - \sin y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^۳ \cos y$ در همسایگی نقطه $(۰,۲)$ پیوسته‌اند، بنابراین طبق قضیه پیکار، معادله دیفرانسیل مفروض دارای جوابی یکتا است. از طرف دیگر، حول نقطه مفروض، نامساوی $۱ - \sin y > ۰$ برقرار است. در اینصورت؛

		۰	
$x^۳$	−	۰	+
$۱ - \sin y$	+		+
$x^۳(۱ - \sin y)$	−	۰	+

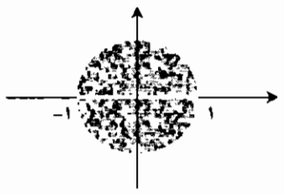
در نتیجه با توجه به جدول تغییرات فوق، تابع $y' = x^۳(۱ - \sin y)$ در یک همسایگی نقطه $(۰,۲)$ از مقداری منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. بنابراین نقطه مفروض، نقطه می‌نیمم است.

مثال ۹۴. *در کدامیک از نقاط زیر شرایط قضیه وجود و یکتایی جواب، برای معادله دیفرانسیل $y' = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{y}$ برقرار است؟*

۱) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$
۲) $(۲, \frac{۱}{۲})$
۳) $(۰,۰)$
۴) $(۱,۰)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

از آنجائیکه توابع $f(x,y) = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sqrt{۱ - x^۲}}{y^۲}$ ،



در ناحیه $D = \{|x| < ۱ \ \& \ y \neq ۰\}$ پیوسته‌اند، بنابراین طبق قضیه پیکار، وجود و یکتایی برای نقاط متعلق به این ناحیه برقرار است.

مثال ۹۵. *مسأله مقدار اولیه $|y'| + y^۲ = ۰$ و $y(۰) = ۱$ دارای:*

۱) یک جواب است.
۲) فاقد جواب است.
۳) چند جواب است.
۴) بی‌شمار جواب است.

☑ **حل.** گزینه «۲». فرض کنید $y = y(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض باشد، با توجه به مفهوم جواب داریم:

$$|y'(x)| + (y(x))^۲ = ۰ \xrightarrow{x=۰} |y'(۰)| + (y(۰))^۲ = ۰ \xrightarrow{y(۰)=۱} |y'(۰)| = -۱$$

که غیرممکن است. بنابراین مسأله مقدار اولیه مفروض فاقد جواب است.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ معادله دسته منحنی‌های معادله دیفرانسیل $xyy'^{۲} + (x^{۲}+y^{۲})y' + xy = ۰$ به کدام صورت است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $(xy-a)(x^{۲}+y^{۲}-b)=۰$ ۲) $(\frac{x}{y}-a)(x^{۲}-y^{۲}+b)=۰$

۳) $(xy-a)(x^{۲}-y^{۲}+b)=۰$ ۴) $(\frac{x}{y}-a)(x^{۲}+y^{۲}-b)=۰$

۲ـ معادله دیفرانسیل $۲\sin(y^{۲})\,dx + xy\cos(y^{۲})\,dy = ۰$ فاکتور انتگرالگیری به صورت تابعی از x دارد، جواب عمومی معادله کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $x^{۳}\cos(y^{۲}) = c$ ۲) $x^{۳}\sin(y^{۲}) = c$ ۳) $x^{۴}\cos(y^{۲}) = c$ ۴) $x^{۴}\sin(y^{۲}) = c$

۳ـ اگر $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{yt}\\ \frac{dt}{dx}=\frac{x}{y^{۲}}\end{cases}$، t کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $t = cx$ ۲) $t = cy$ ۳) $t = \frac{c}{y}$ ۴) $t = \frac{c}{x}$

۴ـ حد جواب مسئله $y' = ۲x\cos^{۲} y$; $y(۰)=\frac{\pi}{۴}$ وقتی $x \to \infty$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\pi$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ∞

۵ـ پاسخ معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx} + y = xy^{۳}$ را می‌توان با کدام رابطه زیر نمایش داد: (c یک ثابت حقیقی است) (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $y^{۲} = \frac{۱}{cx^{۲}-۲x}$ ۲) $y^{۲} = \frac{۱}{۲x+cx^{۲}}$ ۳) $y^{۲} = ۲x + cx^{۲}$ ۴) $y^{۲} = \frac{۱}{x+cx^{۲}}$

۶ـ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مبدأ می‌گذرند و مراکز آنها بر محور x واقعند عبارتست از: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{dy}{dx} = \frac{۲xy}{x^{۲}-y^{۲}}$ ۲) $\frac{dy}{dx} = \frac{۲xy}{y^{۲}-x^{۲}}$ ۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^{۲}-x^{۲}}{۲xy}$ ۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{۲}-y^{۲}}{۲xy}$

۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' - ۲y = x^{۲}$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = ax^{۲}\,Lnx + x^{۲}$ ۲) $y = x^{۲}e^{x} + ax^{۲}$

۳) $y = x^{۲}\,Lnx + ax^{۲}$ ۴) $y = ax^{۲}e^{x} + x^{۲}$

۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = ۰$ کدام است؟ (مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $۲tg^{-۱}(x^{۲}+y^{۲}) + Ln\frac{x}{y} = c$ ۲) $Ln\frac{y}{x} + tg(x-y) = c$

۳) $۲tg^{-۱}\frac{y}{x} + Ln(x^{۲}+y^{۲}) = c$ ۴) $tg(\frac{x}{y}) + Ln(x-y) = c$

۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $x\,dy + y\,dx = \sin x\,dx$ عبارت است از: (مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = c - \cos x$ ۲) $y = \frac{c-\cos x}{x}$ ۳) $y = x(c-\cos x)$ ۴) هیچکدام

۱۰ـ حل کلی معادله دیفرانسیل $y' = y(xy+x)^{۲}$ کدام است؟ (مکانیک تبدیل انرژی و طراحی جامدات ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = ce^{-x^{۲}}$ ۲) $y^{۲}e^{۲y} = cx$ ۳) $y = cx^{\frac{۱}{۲}}e^{y}$ ۴) $y = ce^{x^{۲}}y^{۲}$

۱۱ـ حل معادله دیفرانسیل $z' - \lambda z = a + bt$ برابر است با: (عمران زلزله ـ آزاد ۷۸)

۱) $z = \frac{ce^{\lambda t} + (a+bt)}{\lambda}$ ۲) $z = ce^{\lambda t} - \frac{۱}{\lambda^{۲}}(\lambda(a+bt)+b)$

۳) $z = \frac{ce^{\lambda t} + (b+\lambda(a+bt))}{\lambda^{۲}}$ ۴) هیچکدام

۱۲ـ رابطه افزایش جمعیت طبق معادله دیفرانسیل زیر داده شده است، مقدار جمعیت در $t=\infty$ مطابق کدام یک از گزینه‌ها می‌باشد. (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^{۲} \quad ; a = ۱۰^{-۱},\ b = ۱۰^{-۷}$$

۱) $P = ۱۰^{۹}$ ۲) $P = ۱۰^{۴}$ ۳) $P = \infty$ ۴) $P = ۱۰^{۶}$

۱۳ـ در یک واکنش شیمیایی رابطه زیر بین درصد تبدیل و زمان وجود دارد: (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad ,\quad t=۰\ ,\ y=y_{۰}\ ;\ t=۲۰\ ,\ y=\frac{۱}{۲}y_{۰}$$

مقدار k برابر کدام گزینه است؟

۱) ۰/۳۵ ۲) ۰/۰۳۵ ۳) ۰/۰۲۵ ۴) ۰/۲۵

۱۴ـ بر اساس معادله داده شده رابطه بین x و y مطابق کدام یک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$y' = \frac{xy}{y+۱} \quad ; y \neq ۰$$

۱) $۲y = cx^{۲}$ ۲) $۲y = c\,Ln\,y^{۲}$ ۳) $۲y + Ln(cy)^{۲} = x^{۲}$ ۴) $y = ce^{x^{۲}}$

۱۵ـ سرد شدن یک گلوله از رابطه دیفرانسیلی زیر پیروی می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟ (صنایع پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T-۱۰) \quad ,\quad T(۰)=۱۰۰ \quad ,\quad T(۴)=۶۰$$

۱) در زمان $t = ۴/۹$ دقیقه درجه حرارت ۲۰ می‌شود.
۲) در زمان $t = ۱۴/۹$ دقیقه درجه حرارت ۲۰ می‌شود.
۳) در زمان $t = ۱۰$ دقیقه درجه حرارت ۲۰ می‌شود.
۴) در زمان $t = ۲۰$ دقیقه درجه حرارت ۲۰ می‌شود.

۱۶ـ تجزیه یک ماده طبق معادله دیفرانسیل درجه دوم می‌باشد. ثابت k کدام است؟ (صنایع پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$\frac{dy}{dt} = -ky^{۲} \quad ,\ y(۵)=۳۰\ ,\ y(۳۰)=۱۵$$

۱) $k = \frac{۱}{۲۵۰}$ ۲) $k = \frac{۱}{۴۵۰}$ ۳) $k = \frac{۱}{۳۵۰}$ ۴) $k = \frac{۱}{۱۵۰}$

۱۷ـ عامل انتگرالساز معادله $۲y\,dx - ۳xy^{۲}\,dx - x\,dy = ۰$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۷۸)

۱) $x^{۲}y$ ۲) $xy^{۲}$ ۳) $xy^{-۲}$ ۴) $x^{۲}y^{۲}$

۱۸ـ حل معادلهٔ دیفرانسیل $(\cos x)\,y' + y\sin x = 2x\cos^2 x$ **با شرط** $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{-15\sqrt{2}\,\pi^2}{32}$ **در** $x = 0$ **برابر است با:** (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) π^2 ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) $-\pi^2$

۱۹ـ چنانچه $(x+y)\,dx + dy = 0$ **و** $y(0) = 0$ **باشد. آنگاه مقدار** y **در** $x = 1$ **برابر است با:** (اکتشاف معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) e^{-1} ۲) e ۳) $-e$ ۴) $-e^{-1}$

۲۰ـ مسیرهای متعامد بر مجموعه منحنیهای $y = cx^2 - 2$ **برابرند با:** (مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $y^2 + x^2 = kx$ ۲) $y^2 - x^2 = kx$

۳) $y + 1 = ke^{\frac{1}{2}(x^2+2y+y^2)}$ ۴) $y^2 + x^2 = ky$

۲۱ـ معادله $z^2 + y^2 - 2zy'y = 0$ **کدام است؟** (سازه‌های هیدرولیکی ـ آزاد ۷۸)

۱) $z^2 - y^2 = cz$ ۲) $2z + 2y^2 = cz^3$ ۳) $2z - 2y^2 = cz^3$ ۴) $z^2 + y^2 = cz$

۲۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مواد شناسایی و انتخاب ـ آزاد ۷۸)

$$y'\,Ln(x-y) = 1 + Ln(x-y)$$

۱) $(x-y)\,Ln(x-y) + x = c$ ۲) $(x-y)\,Ln(x-y) - y = c$

۳) $(x-y)\,Ln(x-y) - x = c$ ۴) $(x-y)\,Ln(x-y) + y = c$

۲۳ـ معادله $x\,dy - y\,dx = xy^2\,dx$ **دارای کدام جواب است؟** (هواشناسی کشاورزی ـ آزاد ۷۸)

۱) $x^2 + \frac{1}{y} = c$ ۲) $c = y + xy^2$ ۳) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = c$ ۴) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = c$

۲۴ـ جواب عمومی معادله $2x^2 yy' + 2xy^2 + 1 = 0$ **عبارت است از:** (مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $x + \sin(xy) = cx$ ۲) $x^3 + 3x^2y^3 = c$

۳) $x + x^2y^2 = c$ ۴) $x + \cos(xy) = c\sin y$

۲۵ـ جواب عمومی معادله $y' + 3xy = 6x\,(x^2+1)$ **وقتی** $x \to \infty$ **کدام است.** (مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $-\infty$ ۴) -1

۲۶ـ معادله زیر دارای جواب عمومی به کدام فرم است؟ (مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

$$(x^2 + xy\sin 2x + y\sin^2 x)\,dx + x\sin^2 x\,dy = 0$$

۱) $xy\sin^2 x + \frac{1}{3}x^3 = c$ ۲) $xy^2\sin^2 x + \frac{1}{3}x\cos x = c$

۳) $xy^2\sin^2 x + \frac{1}{2}x^2\cos x = c$ ۴) $x^2y^3\sin^2 x + \frac{x^2}{3}\sin x = c$

۲۷ـ معادله $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx$ **در** $y(0) = 0$ **دارای جواب ... .** (مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $x = \infty$ است. ۲) $x = 0$ است. ۳) $x = 1$ است. ۴) $x = -2$ است.

۲۸ـ در معادله $y\frac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$ **با شرط** $x(1) = 0$ **مقدار** x **در** $y = 2$ **برابر است با:** (تکنولوژی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{29}{3}$ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) $\frac{31}{4}$ ۴) $\frac{37}{2}$

۲۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + y = \frac{x}{y}$ **قابل بیان به کدام صورت است؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = x\,Ln\,y + c$ ۲) $y = -x\,Ln\,y + c$ ۳) $y^2 = x - \frac{1}{2} + ce^{2x}$ ۴) $y^2 = x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$

۳۰ـ جواب معادله $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$ **در** $x = 0$ **کدام است؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = 1$ ۲) $y = 0$ ۳) $y = \infty$ ۴) موجود نیست

۳۱ـ معادله دیفرانسیل $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$ **چگونه است؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) کامل است. ۲) کامل نیست.

۳) دارای جوابی نیست. ۴) دارای جوابی همواره برابر صفر است.

۳۲ـ کدام دسته از منحنی‌های زیر بر منحنی‌های $xy = c$ **عمودند؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $x - y = k$ ۲) $x^2 + y^2 = k$ ۳) $x^2 - y = k$ ۴) $x^2 - y^2 = k$

۳۳ـ جواب معادله برنولی $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ **کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x - \cos x}$ ۲) $y = \frac{1}{ce^x - \sin x}$ ۳) $y = \frac{2}{ce^x - \cos x}$ ۴) $y = \frac{c}{\sin x - e^x}$

۳۴ـ فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$ **برابر است با:** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) xe^{2x} ۲) $\frac{e^{2y}}{x}$ ۳) $\frac{e^{2y}}{y}$ ۴) ye^{2y}

۳۵ـ معادله مسیری که عمود بر خانواده منحنی‌های $y = cx^2$ **بوده و از نقطه** $(1,1)$ **می‌گذرد کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $x = y^2$ ۲) $2y^2 - x^2 = 1$ ۳) $x^2 + 2y^2 = 3$ ۴) $x + 2y^2 = 3$

۳۶ـ پاسخی از معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y\cos x}{4y^3 - \sin x}$ **که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $y^4 = x^3 + y\cos x$ ۲) $y^4 = x^3 + y\sin x$

۳) $y^4 = -x^3 - y\cos x$ ۴) $y^4 = -x^3 - y\sin x$

۳۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از: (مهندسی هسته‌ای ؛ راکتور ـ آزاد ۷۹)

$$(x+y+2)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$$

۱) $x - 2y + 5Ln|x+y-3| = c$ ۲) $-2y - 5Ln|x+y-3| = c$

۳) $x + 2y + 5Ln|x+y-3| = c$ ۴) $+2y - 5Ln|x-y-3| = c$

۳۸ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx} - ۳y = x^۴$ عبارت است از : (مهندسی هسته‌ای ؛ راکتور ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = x^۳ (x + c)$ ۲) $y = x^۲(x + c)$ ۳) $y = x (x + c)$ ۴) $y = -x^۳(x + c)$

۳۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $xy' + y = x^۴ y^۳$ عبارت است از : (مهندسی هسته‌ای ؛ راکتور ـ آزاد ۷۹)

۱) $y^۲ = x^۲(-x^۲ + c)$ ۲) $y^{-۲} = x^۲(-x^۲ + c)$ ۳) $y^{-۲} = x^۲(x^۲ + c)$ ۴) $y^۲ = x^۲(x^۲ + c)$

۴۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $e^y\,dx + (xe^y + ۲y)\,dy = ۰$: (مهندسی هسته‌ای ؛ راکتور ـ آزاد ۷۹)

۱) $xe^y + y^۲ = c$ ۲) $-xe^y + y^۲ = c$ ۳) $xe^{-y} + y^۲ = c$ ۴) $-xe^{-y} + y^۲ = c$

۴۱ـ معادله دیفرانسیل $y(۱) = ۰$ ، $(x^۲ + y^۲)\,dx - xy\,dy = ۰$ دارای جواب زیر است: (مهندسی انرژی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = x^۲ \mathrm{Ln}\, x^۲$ ۲) $y^۲ = x^۲ \mathrm{Ln}\, x^۲$ ۳) $y^۲ = x^۲ \mathrm{Ln}\,|x|$ ۴) $y = x^۲ \mathrm{Ln}\,|x|$

۴۲ـ معادله دیفرانسیل $y(۱) = ۰$ ، $y' + nx^{-۱}y = x^{-n}$ دارای جواب زیر است: (مهندسی انرژی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = x^{n-۱}(۱-x)$ ۲) $y = x(۱-x^{n-۱})$ ۳) $y = x^n(۱-x)$ ۴) $y = x(۱-x^n)$

۴۳ـ معادله $y' = \sqrt{y + \sin x} - \cos x$ با شرط $y(۰) = ۰$ در $x = \pi$ دارای پاسخی است برابر : (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۸}$

۴۴ـ معادله $\frac{dI}{dt} + \frac{۱۰I}{۲t+۵} = ۱۰$ با شرط $I(۰) = ۰$ در $t = ۳-$ دارای پاسخی است برابر با : (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) ۷۸۱۲۵ ۲) ۷۸۱۲۰ ۳) ۲۶۴۰ ۴) ۱۳۰۲۰

۴۵ـ معادله $\frac{du}{dt} = -a(u - ۱۰۰t)$ با شرط $u(۰) = ۰$ در $t = \frac{۱}{a}$ دارای پاسخی است برابر با : (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $۱ - e$ ۲) $۱ - e^{-۱}$ ۳) $۱ + e$ ۴) $e^{-۱}$

۴۶ـ اگر معادله دیفرانسیل $(۲xye^{x^۲y^۲} + ۳xy)\,dy = ۰$ $(۲ye^{x^۲y^۲} + ۲y^۳)\,dx + (۲xe^{x^۲y^۲} + ۳xy)\,dy = ۰$ عامل انتگرالسازی به صورت $(xy)^\alpha$ داشته باشد ، α کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۷۹)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۴۷ـ در معادله دیفرانسیل $y' = \frac{۱}{x + ۳e^y}$ $y(۱) = ۰$ هرگاه $y = -۱$ باشد آنگاه x برابر است با :

(مهندسی معدن ـ آزاد ۷۹)

۱) $۴e^{-۱}$ ۲) $-۲e^{-۱}$ ۳) $۲e$ ۴) $۴e$

۴۸ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y' - ۲xy = \sin x$ با شرط $y(۰) = ۳$ برابر است با : (مهندسی معدن؛ استخراج ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = e^{x^۲}\left[\int_۰^x e^{-t^۲}\sin t\,dt + ۳\right]$ ۲) $y = e^{-x^۲}\left[\int_۰^x e^{-t^۲}\sin t\,dt + c\right]$

۳) $y = e^{x^۲}\left[\int_۰^x e^{t^۲}\sin t\,dt + ۳\right]$ ۴) $y = e^{-x^۲}\left[\int_۰^x e^{t^۲}\sin t\,dt + c\right]$

۴۹ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y = (x - y^۲)y'$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) $x = \frac{۱}{۲}y^۲ + Ae^y$ ۲) $x = y^۲ + \frac{A}{y}$ ۳) $x = Ay^۳ + \frac{۳}{y}$ ۴) $x = \frac{۱}{۳}y^۲ + \frac{A}{y}$

۵۰ـ نیم عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۶۰۰ سال است. پس از چند سال مقدار این ماده به $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه تقلیل پیدا می‌کند؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳۲۰۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۴۲۰۰ ۴) ۴۸۰۰

۵۱ـ در معادله دیفرانسیل $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = ۰$ اگر $y(۱) = ۱$ ، $y(۰)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) صفر ۲) ± ۱ ۳) ± ۲ ۴) $\pm\sqrt{۲}$

۵۲ـ عامل انتگرالساز معادله $(y + xy^۲)\,dx - x\,dy = ۰$ ، کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $y^۲$ ۲) y ۳) $\frac{۱}{y^۲}$ ۴) $\frac{۱}{y}$

۵۳ـ مسیرهای متعامد تابع $r = c(۱ + \sin\theta)$ که در آن r شعاع ، θ زاویه ، c مقدار ثابت باشد ، کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $r = k(-۱ + \sin\theta)$ ۲) $r = k(۲ - \sin\theta)$ ۳) $r = k(۱ - \sin ۲\theta)$ ۴) $r = k(۱ - \sin\theta)$

۵۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $\sin y\,\frac{dy}{dx} = \cos y\,(۱ - x\cos y)$ بر حسب λ کدام است؟ (تغییر متغیر $\lambda = \frac{۱}{\cos y}$)

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\lambda = -x + ۲ + ce^{-x}$ ۲) $\lambda = x + ۱ + ce^{-x}$ ۳) $\lambda = x - ۱ + ce^{۲x}$ ۴) $\lambda = x + ۱ + ce^x$

۵۵ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = ۱ + \frac{۱}{\sin(x - y + ۱)}$ ، کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = ۱ + x - \cos^{-۱}x$ ۲) $y = ۱ - x + \cos^{-۱}x$ ۳) $\cos(y - x + ۱) = ۲$ ۴) $\cos(y - x + ۱) = x^۲ + ۱$

۵۶ـ عدد ثابت C در جواب عمومی معادله $(x^۲ - xy)\,dy + (x^۲ + y^۲)\,dx = ۰$ با شرط $y(۱) = ۱$ کدام است؟

(مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $۲e$ ۲) $\frac{e}{۴}$ ۳) -۳ ۴) $e^۴$

۵۷ـ جواب معادله $y' - ۳y = ۰$ وقتی $x \to -\infty$ برابر است با : (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $-\infty$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) -۱

۵۸ـ مسیرهای متعامد دسته هذلولی‌های $y = \frac{c}{x}$ عبارت است از : (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $y^۲ + x^۲ = c^*$ ۲) $y^۲ - x^۲ = c^*$ ۳) $y^۲ = \frac{c^*}{x^۲}$ ۴) $۲y = \frac{c^*}{x}$

۵۹ـ جواب معادله $y = \int_۰^t y\,dt + ۱$ عبارت است از : (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $y = e^{۲t}$ ۲) $y = e^t$ ۳) $y = ۰t + ۱$ ۴) $y = e^t + ۱$

۶۰ـ تعداد جوابهای $y' = x\sqrt{y}$ که در شرط $y(0) = 0$ صدق می‌کند، برابر است با: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ∞ ۴) ۰

۶۱ـ فاکتور انتگرال معادله $(3x - 4x^2y^{-1})\,dx + (2y - 6x)\,dy = 0$ برابر است با ... . (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) xy^2 ۲) x^2y ۳) x^2y^2 ۴) xy

۶۲ـ فاکتور انتگرال معادله $(y + 2x^2)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$ برابر است با .... (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{x^2}$ ۲) $\frac{1}{y^2}$ ۳) $\frac{1}{y}$ ۴) $\frac{1}{x}$

۶۳ـ معادله $y' = x + y$ با شرط $y(0) = 0$ مفروض است، مقدار y در $x = 2$ برابر است با .... (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) $-2 + e^2$ ۲) $3 - e^2$ ۳) $-3 + e^2$ ۴) $-2 - e^2$

۶۴ـ معادله $\frac{dy}{dx} = (y - x - 1) + (x - y + 2)^{-1}$ با تبدیل $u = x - y$ می‌شود... (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{du}{dx} = (u - 2) - (u - 2)^{-1}$ ۲) $\frac{du}{dx} = (u - 2) + (u - 2)^{-1}$

۳) $\frac{du}{dx} = (u + 2) + (u + 2)^{-1}$ ۴) $\frac{du}{dx} = (u + 2) - (u + 2)^{-1}$

۶۵ـ معادله دیفرانسیل $e^x y' - 4 + 2y = 0$: (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) خطی است و همگن ۲) خطی است و غیرهمگن ۳) غیرخطی است و غیرهمگن ۴) غیرخطی است و همگن

۶۶ـ معادله $y' = \sin(x + y)$ با تبدیل $u = x + y$ می‌شود: (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{du}{dx} = 1 + \cos u$ ۲) $\frac{du}{dx} = 1 + \sin u$ ۳) $\frac{du}{dx} = 1 - \sin u$ ۴) $\frac{du}{dx} = 1 - \cos u$

۶۷ـ جواب عمومی معادله $(y + x^2y)\,dx + (4x + xy^2)\,dy = 0$ را بیابید. (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $y = \frac{c}{1 + x^2} - 4$ ۲) $y^2 = \frac{c}{1 + x^2} - 4$ ۳) $y^2 = \frac{c}{\sqrt{1 + x^2}} - 4$ ۴) $y = \frac{c}{\sqrt{1 + x^2}} - 4$

۶۸ـ مطلوب حل معادله $\frac{dy}{dx} = \sec y\, tgx$. (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\ln(\cos x) + \sin y = 0$ ۲) $\sin x + \cos y = 0$

۳) $\ln(tg x) - \sin y = 0$ ۴) $tg x - \cos y = 0$

۶۹ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر عبارتست از: (مهندسی مکانیک ـ پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۸۰)

$$\cos y\,dx + (x \sin y - \cos^2 y)\,dy = 0$$

۱) $y - x\sec y = c$ ۲) $x - y\sec x = c$ ۳) $y(1 - x\sec y) = c$ ۴) $x(1 - y\sec x) = c$

۷۰ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از: (مهندسی مکانیک ـ پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۸۰)

$$y\ln y\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$

۱) $\ln(c\ln x) = -tg^{-1}y$ ۲) $\ln y = tg^{-1}x$

۳) $\ln x = tg^{-1}y$ ۴) $\ln(c\ln y) = -tg^{-1}x$

۷۱ـ معادله مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ (که c ثابت دلخواه است) عبارت است از: (مهندسی برق ـ پزشکی ـ بیوالکتریک ـ آزاد ۸۰)

۱) $x^2 - 3 + 3y = cy^2$ ۲) $x^2 - 3 + 3y^2 = cy$

۳) $x^2 = cy^3 + y^2 - 1$ ۴) $y^2 - 3 + 3x^2 = cx$

۷۲ـ معادله $y' = \frac{x - 5}{y^2}$ با شرط $y(0) = \sqrt[3]{3}$ مفروض است مقدار y در $x = 4$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $-\sqrt[3]{33}$ ۲) $-\sqrt[3]{9}$ ۳) $\sqrt{33}$ ۴) $\sqrt[3]{11}$

۷۳ـ معادله $x^2y\frac{dy}{dx} - xy^2 = 1$ با تبدیل $y^2 = u$ می‌شود: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x} = \frac{2}{x^2}$ ۲) $2\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = \frac{1}{x^2}$ ۳) $\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = \frac{1}{x^2}$ ۴) $\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = \frac{1}{x^3}$

۷۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۰)

۱) $xe^{-x}(x + c)$ ۲) $e^{-x}(x + c)$ ۳) xe^{-x+c} ۴) $e^{x+c}(x - c)$

۷۵ـ معادله $y' + 2x^2y = 3x^2$ با شرط $y(1) = \frac{1}{2}$ را حل نمائید. (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $y = \frac{3}{2} + e^{\frac{2}{3}(1 - x^3)}$ ۲) $y = \frac{3}{2} - e^{\frac{2}{3}(1 - x^3)}$

۳) $y = \frac{3}{2} - e^{\frac{2}{3}(1 + x^3)}$ ۴) $y = \frac{3}{2} + e^{\frac{2}{3}(1 + x^3)}$

۷۶ـ معادله $x^2y' + xy = x + 1$ با شرط $y(1) = 1$ مفروض است. مقدار y در $x = 3$ برابر است با: (مهندسی معدن با اکتشاف ـ آزاد ۸۰)

۱) $1 - \frac{1}{3}\ln 3$ ۲) $-1 - \frac{1}{3}\ln 3$ ۳) $-1 + \frac{1}{3}\ln 3$ ۴) $1 + \frac{1}{3}\ln 3$

۷۷ـ معادله $4\cos^2 u\,du - e^{-5v}\,dv = 0$ با شرط $v(0) = -6$ مفروض است مقدار v در $u = \pi$ برابر است با: (مهندسی معدن با اکتشاف ـ آزاد ۸۰)

۱) -6 ۲) -3 ۳) -2 ۴) ۰

۷۸ـ معادله $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ با تبدیل $y = xu$ می‌شود: (گرایشهای نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$ ۲) $\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$ ۳) $\frac{du}{u\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$ ۴) $\frac{du}{u\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$

۷۹ـ معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{(x + y)^2 - (x - y)}{(x - y) + (x + y)^2}$، با تبدیل $u = x + y$ و $v = x - y$ می‌شود: (گرایشهای نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{du}{dv} = \frac{u^2}{v}$ ۲) $\frac{du}{dv} = \frac{u}{v^2}$ ۳) $\frac{du}{dv} = \frac{u^2}{v^2}$ ۴) $\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}$

۸۰ـ معادله دیفرانسیل $y' = 1 + x\sin xy$ ، $0 \le x \le 2$ و $y(0) = 0$: (مهندسی هوافضا ـ آئرودینامیک ـ آزاد ۸۰)

۱) دارای یک جواب منحصر بفرد می‌باشد. ۲) جواب ندارد.

۳) بی‌نهایت جواب دارد. ۴) در فاصله داده شده جواب ندارد ولی در بخشی از آن وجود دارد.

۸۱ـ جواب عمومی معادله : $y' = tg\,x\,tg\,y$ (مجموعه ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\cos y \sin x = c$ ۲) $\cos y \cos x = c$ ۳) $\sin y \cos x = c$ ۴) $\sin y \sin x = c$

۸۲ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{(1+x^2)}$ را با در نظر گرفتن شرط اولیه $y(0) = 3$ حل نمائید.

(مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $(3y+10)^2 = (1+x^2)^3$ ۲) $y = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$

۳) $y = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3}$ ۴) $(y+\frac{10}{3})^2 = (1+x^2)^3$

۸۳ـ جوابی از معادله دیفرانسیل $y' = xy^2 - y$ که از نقطه $(0,1)$ بگذرد کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = \frac{1}{x+1}$ ۲) $y = \frac{1}{e^x + x}$ ۳) $y = \frac{1}{3e^x - x - 1}$ ۴) $y = \frac{1}{2e^x + x - 2}$

۸۴ـ معادله دیفرانسیل $(y+6xy^3-4y^3)\,dx - (2x+4y)\,dy = 0$ فاکتور انتگرالگیری به صورت y^m داد، m کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۲

۸۵ـ جواب معادله دیفرانسیل مقابل کدام است؟ $(\frac{dy}{dx})^2\,dx - 4x\,dy + x^2\,dx = 0$ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = x + \frac{x^2}{2} + c$ ۲) $y = (4 \pm 4\sqrt{3})x^2 + c$

۳) $y = (2-3\sqrt{3})\frac{x^2}{2} + c$ ۴) $y = (2 \pm \sqrt{3})\frac{x^2}{2} + c$

۸۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'(x-y) = x\,(y-x)$ به کدام صورت است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = c\,e^{\frac{y}{x}}$ ۲) $y = cx\,e^{\frac{x}{y}}$ ۳) $y = cx\,e^{\frac{y}{x}}$ ۴) $y = c\,e^{\frac{x}{y}}$

۸۷ـ مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های (دوایر) $x^2 + y^2 = 2c_1x$ در صفحه xy عبارتند از (c_1 و c_2 ثابت حقیقی)

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = c_2x^2$ ۲) $y^2 - x^2 = c_1^2$ ۳) $x^2 + y^2 = c_1^2$ ۴) $x^2 + y^2 = -c_2y$

۸۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $y(0) = 0$ ، $(tg^{-1}y - x) = 0$) $(1+y^2)y' + (1+y^2)$ کدام است؟ (ریاضی ـ آزاد ۸۱)

۱) $y = tg(e^{2x} - e^x)$ ۲) $y = tg\,(x-1+e^{-x})$

۳) $y = tg\,(x - e^{-x} + e^{2x})$ ۴) $y = tg(e^x + (x-1)\,e^{2x})$

۸۹ـ در صفحه xy منحنی را پیدا کنید که از مبدأ مختصات بگذرد و مماس بر منحنی در نقطه (x,y) دارای شیب $x^2 + y$ باشد؟ (سیستم‌های اقتصادی ـ آزاد ۸۱)

۱) $y = -(x^2 + 2x + 2) + 2e^x$ ۲) $y = x^2 + 2x + 2 - 2e^{-x}$

۳) $y = x^2 - 2x + 2 + 2e^{-x}$ ۴) $y = -(x^2 - 2x - 2) - 2e^x$

۹۰ـ معادله دیفرانسیل زیر از مرتبه چندام است؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۸۲)

$$(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) پنجم

۹۱ـ پس از تغییر متغیر $y = e^{\int u(x)\,dx}$ معادله $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ به چه صورت در می‌آید؟

(مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $xu' = 2 + xu$ ۲) $x^2u' = 1 - 2xu$ ۳) $xuu' = 1 + xu$ ۴) $xuu' = 2 - 2xu$

۹۲ـ معادله دیفرانسیل $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr}) + B^2\phi = 0$ با تغییر متغیر $\omega = r\phi$ به چه صورت در می‌آید؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{d^2\omega}{dr^2} + B^2\omega = 0$ ۲) $\frac{d^2\omega}{dr^2} + B^2r\omega = 0$ ۳) $r\frac{d^2\omega}{dr^2} + B^2\omega = 0$ ۴) $r^2\frac{d^2\omega}{dr^2} + B^2\omega = 0$

۹۳ـ معادله دیفرانسیلی که $x = c_1\sin(\omega t + c_2)$ خانواده ۲ـ پارامتری از جوابهای آن است، کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $x'' = \omega^2 x$ ۲) $x'' = -\omega x$

۳) $x'' = -c_1\omega^2\sin(\omega t + c_2)$ ۴) $x'' = c_1\omega^2\sin(\omega t + c_2)$

۹۴ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $(y-u)^2 = 2bx$ به کدام صورت است؟ (آبیاری و زه‌کشی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y'' + 2xy' = 0$ ۲) $2y'' + xy' = 0$ ۳) $2xy'' + y' = 0$ ۴) $xy'' + 2y' = 0$

۹۵ـ کدام گزینه، معادله دیفرانسیل منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $xy'' + y' - 1 = 0$ ۲) $xy'' - xy'^2 = 0$ ۳) $x(yy'' + y'^2) = yy'$ ۴) $xy'' - xy' - 2 = 0$

۹۶ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه داده شده کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

$$xy' - y = e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad y(1) = e$$

۱) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ ۲) $y = -xe^{\frac{1}{x}} + \frac{2e}{x}$ ۳) $y = 2xe^{\frac{1}{x}} - e$ ۴) $y = -xe^{\frac{1}{x}} + 2ex$

۹۷ـ حل معادله دیفرانسیل $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$ برابر خواهد بود با: (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = kx^{\frac{3}{2}}$ ۲) $y = kx^{-\frac{2}{3}}$ ۳) $y = kx^{\frac{2}{3}}$ ۴) $y = kx^{-\frac{2}{3}}$

۹۸ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۲)

$$y' - x^{-1}y = -x^{-1}y^2$$

۱) $y = \frac{c-x}{x}$ ۲) $y = \frac{c+x}{x}$ ۳) $y = \frac{x}{x+c}$ ۴) $y = \frac{x}{c-x}$

۹۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2x^2y^{-2} + x^2y = 2\frac{dy}{dx}$ کدام است؟ (از تغییر متغیر $P = y^3$ استفاده نمائید.)

(مهندسی پایمر ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = \sqrt[3]{2 + ce^{-x}}$ ۲) $y = \sqrt[3]{2 + ce^{-x^3}}$ ۳) $y = \sqrt{2 + ce^{-x^2}}$ ۴) $y = \sqrt{2 + ce^{-x^2}}$

۱۰۰ـ جواب عمومی معادله $(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1})dx+(Ln\,x+tag^{-1}x)dy=0$ **برابر است با:** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y(Ln\,x+\cot g^{-1}x)=c$
۲) $y(Ln\,x+\sin^{-1}x)=c$
۳) $y(Ln\,x+tag^{-1}x)=c$
۴) $y(Ln\,x+\cos^{-1}x)=c$

۱۰۱ـ جواب معادله $y'\sin x-y\,Ln\,y=0$ **به شرط اولیه** $y(\frac{\pi}{2})=e$ **برابر است با:** (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y=e^{\sin x}$
۲) $y=e^{\cos x}$
۳) $y=e^{\cot g\frac{x}{2}}$
۴) $y=e^{tag\frac{x}{2}}$

۱۰۲ـ جواب معادله $\int_0^x t\,y(t)\,dt=x^2y(x)$ **کدام است؟** (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $x^2y=c$
۲) $x+y=c$
۳) $x^2+y=c$
۴) $xy=c$

۱۰۳ـ جواب عمومی معادله $y'=\sin(x-y)$ **کدام است؟** (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $x+c=tag(x-y)-\sec(x-y)$
۲) $x+c=tag(x-y)+\sec(x-y)$
۳) $x+c=\cot g(x-y)+\sec(x-y)$
۴) $x+c=\cot g(x-y)-\sec(x-y)$

۱۰۴ـ با تغییر متغیر $y=z^\alpha$ **معادله** $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$ **به ازاء چه مقداری از** α **به یک معادله همگن تبدیل می‌شود؟** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $\alpha=-2$
۲) $\alpha=-1$
۳) $\alpha=-\frac{1}{3}$
۴) $\alpha=-\frac{1}{2}$

۱۰۵ـ با چه تغییر متغیری معادله $y'=\frac{x+y-2}{3x+2y-5}$ **به معادله همگن تبدیل می‌شود؟** (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۲)

۱) $X=x-1$ و $Y=y+1$
۲) $X=x+1$ و $Y=y-1$
۳) $X=x+1$ و $Y=y+1$
۴) $X=x-1$ و $Y=y-1$

۱۰۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $x(x^2+3y^2)dx+y(y^2+3x^2)dy=0$ **کدام است؟** (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $x^4+6x^2y^2+y^4=c$
۲) $x^4+x^2y^2+y^4=c$
۳) $x^4+3x^2y^2+y^4=c$
۴) $x^4+2x^2y^2+y^4=c$

۱۰۷ـ فاکتور انتگرال معادله $(2y\sin x+3y^4\sin x\cos x)dx-(4y^3\cos^2x+\cos x)dy=0$ **کدام است؟** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $\sin y$
۲) $\cos x$
۳) $\sec x$
۴) $\cos y$

۱۰۸ـ کدام گزینه در مورد معادله دیفرانسیل $(y+yx^3(1+Ln\,y))dy=0$ **صحیح است؟** (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) کامل است.
۲) دارای عامل انتگرالساز برحسب x است.
۳) دارای عامل انتگرالساز برحسب xy است.
۴) دارای عامل انتگرالساز برحسب y است.

۱۰۹ـ یک عامل انتگرالساز برحسب $y=4x$ **کدام است؟** (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۲)

$y'+\frac{2}{x\,Ln\,x}y=4x$

۱) x^2
۲) $2Ln\,x$
۳) Ln^2x
۴) e^{2Ln^2x}

۱۱۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y-2x(\frac{dy}{dx})+y(\frac{dy}{dx})^2=0$ **، . . . متقارن نسبت به محور . . . است؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) سهمی، x
۲) بیضی، x
۳) هذلولی، x
۴) بیضی، y

۱۱۱ـ جواب عمومی معادله $y'^2+(y-1)y'-y=0$ **کدام است؟** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $(y+x+c)(y+cx)=0$
۲) $(y-cx)(y-c\,Ln\,x)=0$
۳) $(y-x+c)(y-ce^{-x})=0$
۴) $(y+cx)(y-ce^x)=0$

۱۱۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y-x}{y-x-1}$ **عبارتست از:** (مهندسی نفت؛ فراوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۲ و مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{(y-x)^2}{2}=y^2+c$
۲) $y-x=x^2+c$
۳) $\frac{(y-x)^2}{2}=x+c$
۴) $\frac{(y-x)^2}{2}=y+c$

۱۱۳ـ معادله $y''+4yy'+2y-\cos x=0$ **یک معادله:** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) غیرخطی و غیرهمگن است.
۲) خطی و همگن است.
۳) غیرخطی و همگن است.
۴) خطی و غیرهمگن است.

۱۱۴ـ برای اینکه معادله دیفرانسیل $x^n\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+g(x)y^m=f(x)$ **خطی باشد، باید:** (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۲)

۱) $n=0$
۲) $m=1$
۳) $f(x)=0$
۴) $g(x)$ مقدار ثابت باشد.

۱۱۵ـ نوع معادله دیفرانسیل $\frac{d^3u}{dt^3}-3\frac{d^2u}{dt^2}+3\frac{du}{dt}-u=e^t$ **را تعیین کنید.** (هواشناسی ـ آزاد ۸۲)

۱) معمولی، خطی، همگن، مرتبه سوم
۲) جزئی، خطی، همگن، مرتبه دوم
۳) معمولی، غیرخطی، ناهمگن، مرتبه سوم
۴) معمولی، خطی، ناهمگن، مرتبه سوم

۱۱۶ـ در مورد معادله دیفرانسیل مقابل کدامیک از گزینه‌ها صحیح می‌باشد؟ $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)(1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}$ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۸۲)

۱) یک معادله مرتبه ۲، درجه $\frac{2}{3}$، غیرخطی، غیرهمگن
۲) یک معادله مرتبه ۲، درجه $\frac{3}{2}$، خطی، غیرهمگن
۳) یک معادله مرتبه $\frac{2}{3}$، درجه $\frac{3}{2}$، غیرخطی، همگن
۴) یک معادله مرتبه ۲، درجه ۲، غیرخطی، همگن

۱۱۷ـ معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله $y=cx^2+d$ **کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $x^2y''-2xy'+y=0$
۲) $y''+(x^2-2x)y'-y=0$
۳) $xy''-y'=0$
۴) $2xy''-x^2y'+y=0$

۱۱۸ـ مسأله $|y|+|y'|=0$ **و** $y(0)=1$ **دارای:** (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

۱) یک جواب است.
۲) چند جواب است.
۳) جواب نیست.
۴) بی‌نهایت جواب است.

۱۱۹ـ جواب معادله $y'=\frac{y+x}{x}$ **وقتی که** x **به سمت صفر میل کند، برابر است با:** (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) بی‌نهایت
۲) e
۳) Ln ۲
۴) صفر

۱۲۰ـ در معادله $x^2dy=(xy-y^2)dx$ **با شرط** $y(1)=1$ **هنگامی که** $x=e$ **است،** y **برابر است با:** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{e}{2}$
۲) e^2
۳) $2e$
۴) e

۱۲۱ـ معادله $y'=xe^{x^2-y}$ **دارای جوابی به صورت زیر است:** (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

۱) $2e^y-e^{x^2}=c$
۲) $e^{x^2}-e^y=c$
۳) $e^{y^2}-e^{x^2}=c$
۴) $e^x-e^y=c$

۱۲۲ـ معادله $y' = y\tan 2x$ با شرط $y(0) = 0$ مفروض است. مقدار y در $x = \pi$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) π ۴) $-\pi$

۱۲۳ـ جواب مسأله $x^2(1+y^2) = yy'$ و $y(0) = 1$ وقتی $x \to -\infty$ برابر است با: (استخراج معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) وجود ندارد ۴) ۲-

۱۲۴ـ جواب عمومی دیفرانسیل $(6x+3y)^2 - 2 = y'$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = ce^{6x} - 2x$ ۲) $6x+3y = (c-6x)^2$ ۳) $(6x+3y)^2 = 6x - c$ ۴) $(6x+3y)(c-6x) = 1$

۱۲۵ـ جواب مسأله $y(0) = 1$ و $x^2(1+y^2) = yy'$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $ye^{-x^2} = 1$ ۲) $y^2 = 2e^{\frac{2x^3}{3}} - 1$ ۳) $y^2 = -2e^{\frac{-x^3}{3}} + 1$ ۴) $x^2y^2 = e^{\frac{x^2}{2}} - 3$

۱۲۶ـ معادله دیفرانسیل تمام سهمی‌هایی که محور تقارن آنها منطبق بر ox باشد، کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)

۱) $y'' = xy'$ ۲) $xy'' = y'$ ۳) $yy'' + y'^2 = 0$ ۴) $yy' + y''^2 = 0$

۱۲۷ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $x\,dy - y\,dx = (x^2+y^2)\,dx$ به کدام صورت است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = \sin^{-1}(x+a)$ ۲) $y = x\tan(x+a)$ ۳) $x^2 + y^2 = ce^{\frac{y}{x}}$ ۴) $x = y\tan(y+a)$

۱۲۸ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $x\,dy + (1+xy)\,y\,dx + (1-xy)\,dx = 0$ به کدام صورت است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $e^{xy} = \frac{y}{x} + c$ ۲) $e^{xy} = \frac{x}{y} + c$ ۳) $\ln\frac{x}{y} = \frac{1}{xy} + c$ ۴) $\ln\frac{x}{y} = xy + c$

۱۲۹ـ معادله دیفرانسیل زیر از مرتبه چندم است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۳)

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

۱) دوم ۲) سوم ۳) پنجم ۴) ششم

۱۳۰ـ با فرض داشتن y_1 به عنوان یک جواب معادله دیفرانسیل، تغییر متغیر زیر برای حل کدامیک از گزینه‌ها به کار می‌رود؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

۱) $x^2y' - y - y^4 = 0$ ۲) $(1-x^2)y'' - xy' + 2y = 0$

۳) $y' = x^3 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{4x^2}$ ۴) $y'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x$

۱۳۱ـ جواب عمومی معادله $y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = ce^{\sin x} - 2\sin x - 2$ ۲) $x = ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$

۳) $x = ce^{\cos y} - 2\cos y - 2$ ۴) $y = ce^{\sin x} - 2\sin x - 2$

۱۳۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y^2}$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

۱) $x = cy + c^2$ ۲) $y = \frac{c}{x} + \frac{1}{c^2}$ ۳) $y = cx + x^2$ ۴) $x = \frac{c}{y} + \frac{1}{c^2}$

۱۳۳ـ جواب عمومی معادله $(x^2+y^2+x)\,dx + y\,dy = 0$ عبارتست از: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

۱) $2x + \ln(x^2+y^2) = c$ ۲) $2x + (x^2+y^2)^2 = c$

۳) $xy = c(x^2+y^2)^2$ ۴) $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$

۱۳۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $yy' = -x + \sqrt{x^2+y^2}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y^2 = 2cx + c^2$ ۲) $x^2 = 2cy + c^2$ ۳) $x^2 + y^2 = cx$ ۴) $x^2 + y^2 = cy$

۱۳۵ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}}$ با شرط اولیه $x(0) = 0$ در هر بازه $[0, a]$ چگونه است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) دارای جواب یکتاست. ۲) بیش از یک اما تعداد متناهی جواب دارد.

۳) تعداد نامتناهی جواب دارد. ۴) جواب ندارد.

۱۳۶ـ اگر منحنی‌های $x^n + y^n = a$ مسیرهای قائم خانواده $y = \frac{x}{1-bx}$ باشند، n کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۷ـ اگر معادله $x^3y^3(2y\,dx + x\,dy) - (5y\,dx + 7x\,dy) = 0$ عامل انتگرالسازی به شکل $x^m y^n$ داشته باشد، اعداد m و n کدام هستند؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $m = -\frac{10}{3}$ و $n = -\frac{8}{3}$ ۲) $m = -\frac{8}{3}$ و $n = -\frac{10}{3}$ ۳) $m = -\frac{8}{3}$ و $n = \frac{10}{3}$ ۴) $m = \frac{10}{3}$ و $n = -\frac{8}{3}$

۱۳۸ـ معادله $y' + 2x = \sin \pi x$ با شرط $y(1) = 4$ مفروض است. مقدار $y(-1)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) ۴- ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۱-

۱۳۹ـ معادله دیفرانسیل $(x^3y + 2x^2 + xy)\,dy = (1-x^2)\,dx + (x^3y^2)$ دارای فاکتور انتگرال زیر است: (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $\mu(x,y) = y^3$ ۲) $\mu(x,y) = x^{-2}y^{-3}$ ۳) $\mu(x,y) = y^{-2}$ ۴) $\mu(x,y) = x^2$

۱۴۰ـ جواب معادله دیفرانسیل $y' + 3x^2 = 6x^2$ وقتی $x \to +\infty$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۱

۱۴۱ـ جواب مسأله $y(1) = 1$ و $y(0) = 0$ و $yy'' + y'^2 = 0$ عبارت است از: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) یک خط راست ۲) یک سهمی ۳) یک پاره خط ۴) یک دایره

۱۴۲ـ معادله $xy' + 2y = -\frac{1}{x}$ با شرط $y(1) = 0$ مفروض است. مقدار $y(2)$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ آزاد ۸۳)

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۴۳ـ عامل انتگرالساز معادله $(x^2y - x)\,dy + (y + 3x^2)\,dx = 0$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ آزاد ۸۳)

۱) y^{-2} ۲) x^{-2} ۳) x^2 ۴) y^2

۱۴۴ـ با کمک فاکتور انتگرال $\frac{1}{xy}$ جواب معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$ مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۸۳)

۱) $y = \ln(c_1x + c_2x^4y^3)$ ۲) $y = \ln(c_2x^{-4}y^3)$ ۳) $y = c_1x + c_2x^4y^3$ ۴) $y = \ln(c_1x^4y^3)$

۱۴۵ـ معادله $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$ را حل کنید. (مهندسی ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $y = \frac{1}{x^2\sqrt{2\ln\frac{c}{x}}}$ ۲) $y = x\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}$ ۳) $y = x\sqrt{2\ln\frac{x}{c}}$ ۴) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}}$

۱۴۶ـ معادله $yy' = -2x\sec y$ را حل کنید. (مهندسی ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $x^2 + y\sin x + \cos x = c$ ۲) $y^2 + y\cos y + \cos x = c$

۳) $x^2 + y\sin x = c$ ۴) $x^2 + y\sin y + \cos y = c$

۱۴۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y\,dx + x(x^2y - 1)\,dy = 0$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^2}{2} = c$ ۲) $-\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3} = c$ ۳) $-\frac{y^2}{x^2} + y = c$ ۴) $-\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{3} = c$

۱۴۸ـ جواب عمومی معادله $y' = \frac{x-y}{x+y}$ از کدام معادله به دست می‌آید؟ (مجموعه مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $c < 0$ ، $x^2y + y^2x = 0$ ۲) $c > 0$ ، $x^2 + 2xy - y^2 = c$

۳) $c \in \mathbb{R}$ ، $x^2 - 2xy - y^2 = c$ ۴) $c > 0$ ، $x^2 + xy - y^2 = c$

۱۴۹ـ به ازای $a > 0$ ، جواب عمومی معادله $a\frac{dx}{dt} + x = A\sin\omega t$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $x = A_0\cos(\omega t - \alpha) + ce^{\frac{t}{a}}$ ، $\alpha = a\omega$ و $0 \le \omega < \frac{\pi}{2}$

۲) $x = A_0\cos(\omega t - \alpha) + ce^{at}$ ، $\alpha = \cot^{-1}a\omega$ و $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

۳) $x = A_0\cos(\omega t + \alpha) + ce^{\frac{t}{a}}$ ، $\alpha = \sin^{-1}a\omega$ و $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

۴) $x = A_0\cos(\omega t - \alpha) + ce^{-\frac{t}{a}}$ ، $\alpha = \tan^{-1}a\omega$ و $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

۱۵۰ـ معادله مسیرهای قائم خانواده هذلولی‌های $xy = C$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y^2 - x^2 = C$ ۲) $x - y = C(x+y)^2$

۳) $x^2 + (y-C)^2 = C^2$ ۴) $x^2 - 2Cy = C^2 \quad ; C > 0$

۱۵۱ـ جواب معادله $(x^3e^y + x^2)\,dy + (3x^2e^y + 2xy)\,dx = 0$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^3(e^y + y) = c$ ۲) $x^3e^y + xy^2 = c$ ۳) $x^3e^y + x^2y = c$ ۴) $x^3e^y + 3x^2y = c$

۱۵۲ـ روش حل مناسب در حل معادله دیفرانسیل $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$ عبارت است از:

(مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

۱) تقسیم بر x و حل به کمک روش معادله همگن

۲) تغییر متغیر $u = \tan^{-1}y$ و سپس حل به روش معادله همگن

۳) تغییر متغیر $z = 1 + y^2$ و سپس حل به روش معادله خطی مرتبه اول

۴) جابه‌جایی نقش متغیر مستقل x و وابسته y و سپس حل به روش معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

۱۵۳ـ مسیرهای قائم دسته منحنی $y = ce^{3x}$ که از نقطه $(1,2)$ می‌گذرد، کدام است؟

(مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y^2 + x = 5$ ۲) $3y^2 - 2x = 10$ ۳) $2y^2 + 3x = 11$ ۴) $3y^2 + 2x = 14$

۱۵۴ـ جواب غیرعادی معادله $y = 8xy' + 8x^2 + y'^2$ برابر است با: (مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = x^2$ ۲) $y + 2x^2 = 0$ ۳) $y = 7x^2$ ۴) $y + 14x^2 = 0$

۱۵۵ـ جواب معادله $(y - \sqrt{x^2+y^2})\,dy = 0$ $x\,dx$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $x^2 = 2cy + c^2$ ۲) $x^2 + y^2 = x + c$ ۳) $x^2 + y^2 = y + c$ ۴) $y^2 + 2cx + c^2$

۱۵۶ـ کدام تابع برای معادله دیفرانسیل $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$ یک عامل انتگرال‌ساز است؟

(مجموعه مهندسی معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\mu(x,y) = x^2$ ۲) $\mu(x,y) = xy$ ۳) $\mu(x,y) = x^2y$ ۴) $\mu(x,y) = (xy^2)^{-1}$

۱۵۷ـ معادله دیفرانسیل $(1-x^2)\,y'' - xy' - 4y = 0$ با انتخاب تغییر متغیر $z = Arc\sin x$ به کدامیک از معادلات داده شده تبدیل می‌شود؟ (مجموعه مهندسی معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{d^2y}{dz^2} - 4y = 0$ ۲) $4\frac{d^2y}{dz^2} - y = 0$ ۳) $\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} - 4y = 0$ ۴) $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - 4y = 0$

۱۵۸ـ از حذف A و B از دسته توابع با ضابطه $y = Ae^x + Bxe^x$ کدام رابطه حاصل می‌شود؟

(مجموعه ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $y'' + 2y' + y = 0$ ۲) $y'' - 2y' + y = 0$ ۳) $y'' - 2y' - y = 0$ ۴) $y'' + 2y' - y = 0$

۱۵۹ـ جواب $e^{\sin x}\,dy + (y-1)\cos x\,e^{\sin x}\,dx = 0$ کدام است؟ (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{y}{e^{\sin x}} + 1 = c$ ۲) $ye^{\sin x} - 1 = ce^{\sin x}$

۳) $e^{\sin x} + y = cye^{\sin x}$ ۴) $ye^{\sin x} - e^{\sin x} = c$

۱۶۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' - y = x^2\cos x$ به کدام صورت است؟

(مهندسی عمران (آب، سازه، سازه‌های هیدرولیکی، مکانیک خاک و پی، مدیریت و ساخت) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = x\cos x + Ax$ ۲) $y = -x\sin x + Ax$

۳) $y = x\sin x + Ax$ ۴) $y = -x\cos x + Ax$

۱۶۱ـ جواب معادله $y' + y = y^2$ وقتی $x \to -\infty$ برابر است با:

(مهندسی مواد (جوشکاری، خوردگی و حفاظت مواد، سرامیک، شناسایی و انتخاب مواد مهندسی) ـ آزاد ۸۴)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) صفر

۱۶۲ـ معادله $(y + x^4)\,dx - x\,dy = 0$ دارای جوابی به صورت زیر است:

(مهندسی مواد (جوشکاری، خوردگی و حفاظت مواد، سرامیک، شناسایی و انتخاب مواد مهندسی) ـ آزاد ۸۴)

۱) $x^2y^3 - y^2 = cx^2$ ۲) $3\sin x + cxy^2 = y$

۳) $y = \frac{1}{3}x^4 - cx$ ۴) $x - y^2 = cx^5$

۱۶۳ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$(x^۳ + \cos y + \frac{۱}{x})\,dy = (\frac{y}{x^۲} - ۳yx^۲)\,dx$$

۱) $x^۳y + \frac{y}{x} + \sin y = c$ ۲) $x^۳y + yx + \cos y = c$ ۳) $x^۳y + \frac{y}{x} + \cos y = c$ ۴) $x^۳y + yx + \sin y = c$

۱۶۴ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$(x^۲ + y^۲ - x)\,dx - y\,dy = ۰$$

۱) $x - \text{Ln}\sqrt{x+y} = k$ ۲) $y - \text{Ln}\sqrt{x+y} = k$

۳) $x - \text{Ln}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}} = k$ ۴) $x - \text{Ln}\sqrt{x^۲+y^۲} = k$

۱۶۵ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$x\,dy - y\,dx = (۴x^۲ + y^۲)\,dy$$

۱) $\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{۲x}) - \frac{y}{x} = k$ ۲) $\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{y}{۲x}) = y + k$

۳) $\frac{۱}{۲}\text{Ln}(\frac{y}{۲x}) - y = k$ ۴) $\tan^{-۱}(\frac{y}{۲x}) = y^۲ + k$

۱۶۶ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$(x^۲ + ۳y^۲)\,dx - ۲xy\,dy = ۰$$

۱) $x^۳ = c(x^۲ + y^۲)$ ۲) $x^۲ = c(x^۲ + y^۲)$ ۳) $\frac{x}{۱+y^۲} = c$ ۴) $\text{Ln}\frac{x}{۱+y} = c$

۱۶۷ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$(۱+x^۲)(dy - dx) = ۲xy\,dx \quad ; \quad y(۰) = ۱$$

۱) $\frac{y^۲}{۱+x^۲} = \tan^{-۱}x + c$ ۲) $y = (۱+x^۲)\tan^{-۱}x + (۱+x^۲)$

۳) $\frac{y}{۱+x^۲} = \tan^{-۱}x + ۲$ ۴) $\frac{x}{۱+y^۲} = \tan^{-۱}y + ۱$

۱۶۸ـ معادله زیر را حل کنید. *(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)*

$$۳xy' + y + x^۲y^۴ = ۰$$

۱) $y^۳ = \frac{۱}{x^۲+cx}$ ۲) $y = \text{Ln}|\frac{۱}{cx^۲ - x}|$ ۳) $y^۳ = \frac{c}{cx^۲ + c}$ ۴) $y^۲ = \frac{c}{cx^۳ + x}$

۱۶۹ـ کدامیک از توابع زیر یک عامل انتگرالساز برای معادله $(y+۱)\,dx - x\,dy = ۰$ است؟

(مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) $I = \frac{۱}{x^۲}$ ۲) $I = x^۲ + y^۲$ ۳) $I = x^۲\cos y$ ۴) $I = x^۲\sin y$

۱۷۰ـ جواب مساله $y = ۰$ و $y' - ۳x^۲y = ۰$ وقتی $y(۰) = ۱$ برابر است با: $x \to -\infty$

(مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) ∞ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۱۷۱ـ اگر معادله $y' = ۱ - (y-۱)$ دارای حل ثابتی باشد، آن حل برابر است با:

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ آزاد ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) معادله حل ثابت ندارد.

۱۷۲ـ اگر معادله $y' = y^۲ + ۲y - ۳$ دارای حل ثابتی باشد، آن حل برابر است با:

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ آزاد ۸۴)

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) حل ثابت ندارد.

۱۷۳ـ چنانچه e^{mx} حل معادله $y' + ۲y = ۰$ باشد آنگاه m برابر است با:

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ آزاد ۸۴)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۷۴ـ چنانچه x^m حل معادله $xy'' + ۲y' = ۰$ باشد، آنگاه m برابر است با:

(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ آزاد ۸۴)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۷۵ـ یک حل معادله $y' + ۲y = ۰$ کدام است؟ *(مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی، شیمی نساجی و علوم الیاف) ـ آزاد ۸۴)*

۱) $y = e^{\frac{x}{۲}}$ ۲) $y = e^{۲x}$ ۳) $y = e^{-۲x}$ ۴) $y = e^{-\frac{x}{۲}}$

۱۷۶ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $xdy - (y + x^۲)\,dx = ۰$ در نقطه $(x=۱\ ,\ y=۲)$ به ازای $x=۲$ برابر است با:

(مهندسی کشاورزی (تأسیسات آبیاری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -۲$ ۲) $y = ۶$ ۳) $y = ۴$ ۴) $y = ۰$

۱۷۷ـ از حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = xy^۲$ به دست می‌آوریم: *(رشته هواشناسی کشاورزی ـ آزاد ۸۴)*

۱) $x^۲y + ۲ = cy$ ۲) $xy^۲ + ۴ = c$ ۳) $xy^۲ + ۴ = cy$ ۴) $xy^۲ + ۲ = cy$

۱۷۸ـ معادله منحنی را بیابید که شیب آن در نقطه (x,y) برابر $۳x^۲ + ۲$ باشد و از نقطه $(-۱,۱)$ هم بگذرد.

(رشته هواشناسی کشاورزی ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = ۲x^۳ + ۳x + ۴$ ۲) $y = x^۳ + ۲x - ۴$ ۳) $y = ۲x^۳ - ۳x + ۶$ ۴) $y = x^۳ - ۲x + ۴$

۱۷۹ـ معادله $xydy - (۱+y^۲)\,dx = ۰$ دارای جوابی به صورت زیر است: *(مهندسی هسته‌ای (پرتو پزشکی و رآکتور) ـ آزاد ۸۴)*

۱) $۱ + y^۲ = cx^۲$ ۲) $\cos(xy) = \sin(cx)$ ۳) $x^۲ - y^۲ = c(x+y)$ ۴) $x^۲ + y^۲ = cxy$

۱۸۰ـ حل معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx} + y = xy^۳$ برابر است با: *(ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)*

۱) $y^۲ = \frac{۱}{x + x^۲}$ ۲) $y = \frac{x}{cx^۲ - x}$ ۳) $y^۲ = \frac{۱}{۲x + cx^۲}$ ۴) $y^۲ = \frac{x^۲ + ۱}{cx}$

۱۸۱ـ جواب معادله دیفرانسیل $xy' + y + ۴ = ۰$ برابر است با: *(ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)*

۱) $\phi(x,y) = x + ۴xy = c$ ۲) $\phi(x,y) = xy + ۴x = c$

۳) $\phi(x,y) = y + ۲xy = c$ ۴) $\phi(x,y) = \frac{x}{y} + ۲xy = c$

۱۸۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy' + y = e^x$ برابر است با: (ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = xe^x + c$ ۲) $y = \frac{1}{e^x} + c$ ۳) $y = \frac{e^x + c}{x}$ ۴) $y = e^x + x + c$

۱۸۳ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$ برابر است با: (ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y^4 = \frac{1}{ce^{-2x} + x^2 + c}$ ۲) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x}$

۳) $y = xe^{-2x} + x^2 + c$ ۴) $y^2 = ce^{-2x} + 2x + c$

۱۸۴ـ جواب معادله دیفرانسیل معمولی $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = x^2 + c$ ۲) $y = \frac{c}{1-x^2}$ ۳) $y = x^4 - 2x + 1$ ۴) $y = \frac{cx}{1-x^2}$

۱۸۵ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$$

۱) $2x^3 - x^2y + 3x + 3y^2 + 2y = c$ ۲) $x^3 + x^2y - 2x - 2y^3 + 3y = c$

۳) $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$ ۴) $x^3 - x^2y + 3x - 2y^3 - 3y = c$

۱۸۶ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$(ax + by)\,dx + (bx + cy)\,dy = 0$$

۱) $\frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2 = K$ ۲) $ax^2 + bxy + cy^2 = K$

۳) $ax^2 + 2bxy + cy^2 = K$ ۴) $\frac{a}{2}x^2 + 2bxy + cy^2 = K$

۱۸۷ـ جواب $y(x)$ معادله دیفرانسیل $xe^y \frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^y$ گذرنده از نقطه $(x,y) = (1,0)$ را در نظر می‌گیریم، در اینصورت $\lim_{x \to 0} xy(x)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ∞

۱۸۸ـ عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$$

۱) y^3 ۲) x^3 ۳) e^{3x} ۴) e^{3y}

۱۸۹ـ جواب‌های عمومی معادله دیفرانسیل $2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = 2\text{Ln}x + Cx$ ۲) $y = \text{Ln}\sqrt{x^3 + C}$ ۳) $y = \sqrt{x^2 + \frac{C}{x}}$ ۴) $y = \text{Ln}\sqrt{x^4 + Cx}$

۱۹۰ـ جواب عمومی معادله $(2xy - 1)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2y^2 - 1$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $y^3 - 3xy^2 + x^2 = C$ که در آن C ثابت و دلخواه است. ۲) $x^3 - 2xy^2 + y = C$ که در آن C ثابت و دلخواه است.

۳) $x^3 - 2xy^2 + x = C$ که در آن C ثابت و دلخواه است. ۴) $y^3 - 2x^2y + x = C$ که در آن C ثابت و دلخواه است.

۱۹۱ـ معادله مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $y = \frac{c}{e^{2x}}$ که در آن c ثابت دلخواه (پارامتر) می‌باشد، عبارت است از: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = c\sqrt{x}$ ۲) $y = \text{Ln}x^c$ ۳) $y = \sqrt{x + c}$ ۴) $y = \text{Ln}\sqrt{x + c}$

۱۹۲ـ معادله دیفرانسیل غیرخطی $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{-x}{x^2+1}y^{\frac{5}{3}}$ با کدام جایگزینی زیر به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $u = y^{-\frac{3}{2}}$ ۲) $u = y^{\frac{1}{2}}$ ۳) $u = y^{-\frac{2}{3}}$ ۴) $u = y^{\frac{1}{2}}$

۱۹۳ـ جواب عمومی معادله $(xy\cos xy + \sin xy)dx + (x^2\cos xy + e^y)dy = 0$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $x^2\cos xy + e^y = c$ ۲) $x\text{cos}y\text{s}y + e^y = c$ ۳) $x^2\sin xy + e^y = c$ ۴) $x\sin xy + e^y = c$

۱۹۴ـ جواب عمومی معادله $y = xy' + \sqrt{y'}$ عبارت است از: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = cx + c$ ۲) $y = cx + \frac{1}{2\sqrt{c}}$ ۳) $y = cx + \sqrt{c}$ ۴) $y = cx - \frac{1}{2\sqrt{c}}$

۱۹۵ـ جواب عمومی معادله $x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $y - 1 = c(x - 1)$ ۲) $y = c(x - 1) - 1$ ۳) $y^2 - 1 = c(x^2 - 1)$ ۴) $y = c(x^2 - 1) - 1$

۱۹۶ـ اگر $y = x^2$ فاکتور انتگرال معادله $(x + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ باشد، جواب عمومی آن معادله برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{x^4}{4} + x^3y^2 = c$ ۲) $\frac{x^4}{4} + x^2y^3 = c$ ۳) $\frac{x^4}{4} + x^2y^2 = c$ ۴) $\frac{x^4}{4} + x^3y^3 = c$

۱۹۷ـ جواب خصوصی معادله‌ی $x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0$; $y(e) = 0$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^{-\frac{y}{x}} + \text{Ln}|x| = 2$ ۲) $\sin^{-1}(\frac{y}{x}) = \text{Ln}|x| - 1$

۳) $2\sin^{-1}(\frac{y}{x}) - \text{Ln}|x| = 1$ ۴) $\tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \text{Ln}|x^2 + y^2| - 1$

۱۹۸ـ جواب عمومی معادله‌ی $yLn\,dx + (x - Lny)\,dy = 0$ کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $x = e^{2y}(c - Lny)$ ۲) $Lny - Lnx = cx$ ۳) $2xLny = yLn^2y + c$ ۴) $(2x - Lny)Lny = c$

۱۹۹ـ اگر $y' = x + y - 2$ و $y(0) = 2$ باشد، $y(2)$ کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $e^2 + 1$ ۳) e ۴) $e^2 - 1$

۲۰۰ـ اگر $y' - 2xy + 16xy^3 = 0$ دارای جواب $y = \phi(x)$ باشد، $\lim_{x \to \infty} \phi(x)$ کدام است؟

(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) به شرایط اولیه بستگی دارد.

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۱» با نگاه دقیقتر به صورت مسأله، متوجه می‌شویم، معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر y' می‌باشد.

بنابراین ابتدا به حل معادله درجه دوم مذکور می‌پردازیم:

$$y' = \frac{-(x^2+y^2) \pm \sqrt{(x^2+y^2)-4x^2y^2}}{2xy} = \frac{-(x^2+y^2) \pm (x^2-y^2)}{2xy}$$

الف) $y' = \frac{-(x^2+y^2)+x^2-y^2}{2xy} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \ln y = -\ln x + \ln c_1 = \ln \frac{c_1}{x} \Rightarrow y = \frac{c_1}{x} \Rightarrow xy - c_1 = 0$

ب) $y' = \frac{-(x^2+y^2)-(x^2-y^2)}{2xy} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Rightarrow y^2 + x^2 - c_2 = 0 \quad ; (2c = c_2)$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت $(xy - c_1)(x^2 + y^2 - c_2) = 0$ بدست می‌آید.

تذکر. صحیح‌تر آن است جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول، تنها برحسب یک پارامتر بیان شود. در نتیجه در مسأله فوق مناسب‌تر بود، جواب عمومی با ضابطه $y = (xy - c)(x^2 + y^2 - c)$ ارائه می‌گردید.

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۴»

$$2\sin(y^2)\,dx + xy\cos(y^2)\,dy = 0$$

$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = y\cos(y^2) - 4y\cos(y^2) = -3y\cos(y^2) \neq 0$

$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{-3y\cos(y^2)}{-xy\cos(y^2)} = \frac{3}{x} = a(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$

$\xrightarrow{\text{(معادله)} \times \mu(x)} 2x^3\sin(y^2)\,dx + x^4 y\cos(y^2)\,dy = 0$

طبق تعریف عامل انتگرالساز ، معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} 2x^3\sin(y^2)\,dx = 0 \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int} \frac{x^4}{2}\sin(y^2) + c = 0 \Rightarrow$

$x^4\sin(y^2) = C \quad ; (-2c = C)$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۲»

$\xrightarrow{\text{با تقسیم معادلات برهم}} \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \ln y = \ln(ct) \Rightarrow y = ct \Rightarrow \frac{1}{c}y = t \Rightarrow t = Cy \quad ; (\frac{1}{c} = C)$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx$$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \tan y = x^2 + c \xrightarrow{x=0} \tan(y(0)) = c \xrightarrow{y(0)=\frac{\pi}{4}} \tan(\frac{\pi}{4}) = c \Rightarrow c = 1$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \tan y = x^2 + 1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \tan y = \infty$

در اینصورت تنها گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۲»

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^3$$

$\xrightarrow{\text{(معادله) } y^{-3}\times \text{ ; برنولی}} y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = 1 \xrightarrow{y^{-2}=u \Rightarrow y^{-3}y' = \frac{u'}{-2}} \frac{u'}{-2} + \frac{1}{x}u = 1 \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = -2$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ &

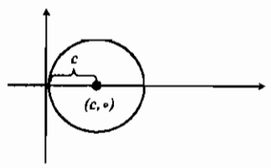
$u(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}}\left\{\int \frac{1}{x^2}\times(-2)\,dx + c\right\} = x^2(\frac{2}{x} + c) \Rightarrow u = 2x + cx^2$

$\xrightarrow{u=y^{-2}} y^{-2} = 2x + cx^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2x + cx^2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۱» معادله دسته دوایر مفروض با فرض اینکه شعاع آنها برابر c باشد، عبارتست از:

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2$$



در اینصورت برای محاسبه معادله دیفرانسیل متناظر با مسیرهای قائم بر دسته دوایر فوق، گامهای زیر را بر می‌داریم:

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2cx \Rightarrow 2c = \frac{x^2+y^2}{x}$$

$\xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری ; گام اول}} 0 = \frac{(2x + 2yy')x - (x^2+y^2)}{x^2} \Rightarrow 2x^2 + 2xyy' - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

$\xrightarrow{y' \mapsto -\frac{1}{y'} \text{ ; گام دوم}} -\frac{1}{y'} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ گزینه «۳»

$$xy' - ۲y = x^۲ \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{۲}{x}y = x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int(-\frac{۲}{x})dx} = e^{-۲\ln x} = \frac{۱}{x^۲} \quad \&$$

$$y(x) = x^۲\left\{\int \frac{۱}{x^۲} \times x\,dx + c\right\} = x^۲(\ln x + c) \quad \Rightarrow \quad y = x^۲\ln x + cx^۲$$

۸ـ گزینه «۳»

$$(x+y)dy + (x-y)dy = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{فرم باز همگن}]{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx)} (x+xu)(x\,du+u\,dx) + (x-xu)\,dx = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(۱+u)x\,du + (۱+u^۲)dx = ۰ \quad \Rightarrow \quad (\frac{۱+u}{۱+u^۲})du = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین } \int \text{ جدا شونده}]{} \int(\frac{۱}{۱+u^۲} + \frac{u}{۱+u^۲})du = -\ln x + c \quad \Rightarrow \quad tg^{-۱}u + \frac{۱}{۲}\ln(۱+u^۲) = -\ln x + c \quad \Rightarrow$$

$$۲tg^{-۱}u + \ln(۱+u^۲) + ۲\ln x = c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} ۲tg^{-۱}(\frac{y}{x}) + \ln(۱+(\frac{y}{x})^۲) + \ln(x^۲) = c \quad \Rightarrow \quad ۲tg^{-۱}(\frac{y}{x}) + \ln(\frac{x^۲+y^۲}{x^۲} \times x^۲) = c \quad \Rightarrow$$

$$۲tg^{-۱}(\frac{y}{x}) + \ln(x^۲+y^۲) = c$$

۹ـ گزینه «۲» حل اول:

$$x\,dy + y\,dx = \sin x\,dx \xrightarrow{\frac{۱}{x\,dx} \times \text{(معادله)}} \frac{dy}{dx} + \frac{۱}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int\frac{۱}{x}dx} = e^{\ln x} = x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{۱}{x}\left\{\int x \times (\frac{\sin x}{x})\,dx + c\right\} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{۱}{x}(-\cos x + c)$$

حل دوم:

$$x\,dy + y\,dx = \sin x\,dx$$

$$\xrightarrow{x\,dy+y\,dx=d(xy) \quad \& \quad \sin x\,dx = d(-\cos x)} d(xy) = d(-\cos x) \quad \Rightarrow \quad d(xy+\cos x) = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$xy + \cos x = c \quad \Rightarrow \quad xy = -\cos x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{۱}{x}(-\cos x + c)$$

۱۰ـ گزینه «۲»

$$۲(xy+x)y' = y \quad \Rightarrow \quad ۲x(y+۱)\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{۲(y+۱)}{y}dy = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین } \int \text{ جدا شونده}]{} \int(۲+\frac{۲}{y})dy = \ln x + c \quad \Rightarrow \quad ۲y + ۲\ln y = \ln x + c \quad \Rightarrow$$

$$\ln y^۲ - \ln x = c - ۲y \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{y^۲}{x} = c - ۲y \quad \Rightarrow \quad \frac{y^۲}{x} = e^{c-۲y} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^۲}{x} = Ce^{-۲y} \quad ;(e^c = C) \quad \Rightarrow \quad y^۲e^{۲y} = Cx$$

۱۱ـ گزینه «۲»

$$z' - \lambda z = a + bt \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } z \text{ بر حسب } t} \mu(t) = e^{\int -\lambda\,dt} = e^{-\lambda t} \quad \&$$

$$z(t) = \frac{۱}{e^{-\lambda t}}\left\{\int e^{-\lambda t} \times (a+bt)\,dt + c\right\} = e^{\lambda t}(-\frac{۱}{\lambda}(a+bt)e^{-\lambda t} - \frac{b}{\lambda^۲}e^{-\lambda t} + c) \quad \Rightarrow$$

$$z = -\frac{۱}{\lambda}(a+bt) - \frac{b}{\lambda^۲} + ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad z = cc^{\lambda t} - \frac{۱}{\lambda^۲}(\lambda(a+bt)+b)$$

راهنمایی.

$a+bt$	+	$e^{-\lambda t}$
	$\searrow$	$-\frac{۱}{\lambda}e^{-\lambda t}$
b		
	$\searrow$	$\frac{۱}{\lambda^۲}e^{-\lambda t}$
۰		

$$\Rightarrow \quad \int(a+bt)e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{۱}{\lambda}(a+bt)e^{-\lambda t} - \frac{b}{\lambda^۲}e^{-\lambda t}$$

۱۲ـ گزینه «۴» حل اول:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} - aP = -bP^۲$$

$$\xrightarrow[\text{برنولی}]{P^{-۲} \times \text{(معادله)}} P^{-۲}\frac{dP}{dt} - aP^{-۱} = -b \xrightarrow{P^{-۱}=u \Rightarrow P^{-۲}\frac{dp}{dt} = -u'} -u' - au = -b \quad \Rightarrow \quad u' + au = b$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } t} \mu(t) = e^{\int a\,dt} = e^{at} \quad \&$$

$$u(t) = \frac{۱}{e^{at}}\left\{\int e^{at} \times b\,dt + c\right\} = c^{-at}(\frac{b}{a}e^{at} + c) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{b}{a} + cc^{-at}$$

$$\xrightarrow{u=P^{-۱}} \frac{۱}{P} = \frac{b}{a} + ce^{-at} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\frac{۱}{P} = \frac{b}{a} \xrightarrow{a=۱۰^{-۱} \,\&\, b=۱۰^{-۷}} \lim_{t\to\infty}\frac{۱}{P} = \frac{۱۰^{-۷}}{۱۰^{-۱}} = ۱۰^{-۶} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} P = ۱۰^۶$$

حل دوم:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P(a-bP)} = dt$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین } \int \text{ جدا شونده}]{} \int(\frac{\frac{۱}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{a-bP})dP = t + c \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{a}(\ln P - \ln(a-bP)) = t + c \quad \Rightarrow$$

$$\ln(\frac{P}{a-bP}) = a(t+c) \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{a-bP} = e^{a(t+c)} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}(\frac{P}{a-bP}) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}(a-bP) = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} P = \frac{a}{b} = \frac{۱۰^{-۱}}{۱۰^{-۷}} = ۱۰^۶$$

۱۳ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -k\,dt$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \int \text{ جدا شونده}} \ln y = -kt + c \quad \Rightarrow \quad y = e^{-kt+c} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-kt} \quad ;(e^c = C) \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (t=0 \ \& \ y=y_0) \text{ در جواب عمومی}} y_0 = Ce^{-k\times 0} \quad \Rightarrow \quad C = y_0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی؛ } (t=20 \ ;y=\frac{1}{2}y_0) \ \& \ C=y_0} \frac{1}{2}y_0 = y_0 e^{-k\times 20} \quad \Rightarrow \quad e^{-20k} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -20k = \ln\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$-20k = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{20} = 0/035$$

۱۴ـ گزینه «۳»

$$y' = \frac{xy}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{y}dy = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله) } \int \text{ جدا شونده}} \int(1+\frac{1}{y})dy = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y + \ln y + \ln c = \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow$$

$$2y + 2\ln(cy) = x^2 \quad \Rightarrow \quad 2y + \ln(cy)^2 = x^2$$

۱۵ـ گزینه «۲»

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-10) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T-10} = -k\,dt \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \ln(T-10) = -kt + c \quad \Rightarrow$$

$$T - 10 = e^{-kt+c} = Ce^{-kt} \quad ;(e^c = C) \quad \Rightarrow \quad T(t) = 10 + Ce^{-kt} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

در اینصورت با توجه به شرطهای اولیه $T(4) = 60$ و $T(0) = 100$ به محاسبه ثابتهای C و k می‌پردازیم:

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } t=0 \text{ در جواب عمومی}} T(0) = 10 + C \xrightarrow{T(0)=100} 100 = 10 + C \quad \Rightarrow \quad C = 90$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (t=4 \ \& \ C=90) \text{ در جواب عمومی}} T(4) = 10 + 90e^{-k\times 4} \xrightarrow{T(4)=60} 60 = 10 + 90e^{-4k} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-4k} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad -4k = \ln\frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{4}\ln\frac{5}{9} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} T(t) = 10 + 90e^{-(-\frac{1}{4}\ln\frac{5}{9})t}$$

اکنون با توجه به فرض $T(t) = 20$ زمان مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$T(t) = 10 + 90e^{\frac{t}{4}\ln\frac{5}{9}} \xrightarrow{T(t)=20} 20 = 10 + 90\times(\frac{5}{9})^{\frac{t}{4}} \quad \Rightarrow \quad (\frac{5}{9})^{\frac{t}{4}} = \frac{20-10}{90} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{t}{4} = \log_{\frac{5}{9}}^{\frac{1}{9}} \quad \Rightarrow \quad t \simeq 14/9$$

۱۶ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dt} = -ky^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = -k\,dt$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} -\frac{1}{y} = -kt - c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y(t)} = kt + c \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } t=5 \text{ در جواب عمومی}} \frac{1}{y(5)} = k\times 5 + c \xrightarrow{y(5)=30} \begin{cases} \frac{1}{30} = 5k + c \\ \frac{1}{15} = 20k + c \end{cases} \xleftarrow{\text{با جایگذاری } t=20 \text{ در جواب عمومی}} \frac{1}{y(20)} = k\times 20 + c \xrightarrow{y(20)=15}$$

$$\Rightarrow \quad 15k = \frac{1}{30} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{450}$$

۱۷ـ گزینه «۳» با توجه به شکل ارائه گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را بصورت $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ انتخاب می‌کنیم. در اینصورت؛

$$(2y - 3xy^2)dx - x\,dy = 0 \xrightarrow{x^\alpha y^\beta \times \text{ (معادله)}} (2x^\alpha y^{1+\beta} - 3x^{1+\alpha}y^{2+\beta})dx - x^{1+\alpha}y^\beta dy = 0$$

معادله حاصل با توجه به تعریف عامل انتگرالساز یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\Delta = Q_x - P_y = -(1+\alpha)x^\alpha y^\beta - 2(1+\beta)x^\alpha y^\beta + 3(2+\beta)y^{1+\beta}x^{1+\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-(\alpha + 2\beta + 3)x^\alpha y^\beta + 3(2+\beta)x^{1+\alpha}y^{1+\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3 = 0 \\ 2 + \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \ \ \& \ \ \alpha = 1$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 2x\cos^2 x \xrightarrow{\frac{1}{\cos x} \times \text{ (معادله)}} y' + (\tg x)y = 2x\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int \tg x\,dx} = e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}}\left\{\int \frac{1}{\cos x}\times 2x\cos x\,dx + c\right\} = \cos x(x^2 + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x^2 + c)\cos x \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} y(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi^2}{16} + c)\cos\frac{\pi}{4} \xrightarrow{y(\frac{\pi}{4})=\frac{-15\sqrt{2}\pi^2}{32}} -\frac{15\sqrt{2}\pi^2}{32} = (\frac{\pi^2}{16} + c)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad c = -\pi^2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=-\pi^2 \ \& \ x=0) \text{ در جواب عمومی}} y(0) = (0 - \pi^2)\times 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = -\pi^2$$

۱۹ـ گزینه «۴»

$$(x+y)dx + dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -y - x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y = -x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int dx} = e^x \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{e^x}\left\{\int e^x \times (-x)\,dx + c\right\} = e^{-x}(e^x - xe^x + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - x + ce^{-x} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$\xrightarrow{x=0} y(0)=1+c \xrightarrow{y(0)=0} c=-1$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=-1 \ \& \ x=1) \text{ در جواب عمومی}} y(1)=-e^{-1}$

۲۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$y=cx^2-2y \quad \Rightarrow \quad 3y=cx^2 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{3y}{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف c بکمک مشتقگیری ; گام اول}} 0=\frac{3y'x^2-6xy}{x^4} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{2y}{x}$$

$$\xrightarrow{y'\mapsto -\frac{1}{y'} \text{ ; گام دوم}} -\frac{1}{y'}=2\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y\,dy=(-x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} y^2=-\frac{x^2}{2}+c \quad \Rightarrow \quad 2y^2+x^2=C \quad ;(2c=C)$$

۲۱ـ گزینه «۴»

$$2zy'y-y^2+z^2=0 \xrightarrow{\frac{1}{z}\times \text{(معادله)}} 2y'y-\frac{1}{z}y^2=-z \xrightarrow{y^2=u \Rightarrow 2y'y=u'} u'-\frac{1}{z}u=-z$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب z}} \mu(z)=e^{\int -\frac{1}{z}dz}=e^{-\ln z}=\frac{1}{z} \quad \&$$

$$u(z)=\frac{1}{\frac{1}{z}}\left\{\int \frac{1}{z}\times -z\,dz+c\right\} \quad \Rightarrow \quad u=z(-z+c)$$

$$\xrightarrow{u=y^2} y^2=-z^2+cz \quad \Rightarrow \quad z^2+y^2=cz$$

۲۲ـ گزینه «۴»

$$y'\ln(x-y)=1+\ln(x-y) \xrightarrow{(x-y=u \Rightarrow y'=1-u') \text{ ; معادله با یک متغیر خطی}} (1-u')\ln u=1+\ln u$$

$$\ln u-u'\ln u=1+\ln u \quad \Rightarrow \quad \ln u\frac{du}{dx}=-1 \quad \Rightarrow \quad (\ln u)\,du=-dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} u\ln u-u=-x+c \xrightarrow{u=x-y} (x-y)\ln(x-y)-(x-y)=-x+c \quad \Rightarrow$$

$$(x-y)\ln(x-y)+y=c$$

راهنمایی. با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$I=\int \underbrace{\ln x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} \xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du} \int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x$$

$$\begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\int dx=x \end{cases}$$

۲۳ـ گزینه «۳» حل اول:

$$x\,dy-y\,dx=xy^2\,dx \xrightarrow{\frac{1}{xdx}\times \text{(معادله)}} \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=y^2$$

$$\xrightarrow{y^{-2}\times \text{(معادله)} \text{ ; برنولی}} y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=1 \xrightarrow{y^{-1}=u \Rightarrow y^{-2}y'=-u'} -u'-\frac{1}{x}u=1 \quad \Rightarrow \quad u'+\frac{1}{x}u=-1$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x \quad \&$$

$$u(x)=\frac{1}{x}\left\{\int x\times(-1)\,dx+c\right\} \quad \Rightarrow \quad u=\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+c\right)$$

$$\xrightarrow{u=y^{-1}} \frac{1}{y}=\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+c\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=-\frac{x^2}{2}+c \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c$$

حل دوم:

$$x\,dy-y\,dx=xy^2\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{x\,dy-y\,dx}{y^2}=x\,dx$$

$$\xrightarrow{\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right) \ \& \ x\,dx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)} -d\left(\frac{x}{y}\right)=d\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right)=c \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=c$$

۲۴ـ گزینه «۳»

$$1+2xy^2+2x^2yy'=0 \xrightarrow{\frac{1}{x^2}\times \text{(معادله)}} \frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}y^2+2yy'=0 \quad \Rightarrow \quad 2yy'+\frac{2}{x}y^2=-\frac{1}{x^2}$$

$$\xrightarrow{y^2=u \Rightarrow 2yy'=u'} u'+\frac{2}{x}u=-\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2 \quad \&$$

$$u(x)=\frac{1}{x^2}\left\{\int x^2\times -\frac{1}{x^2}dx+c\right\} \quad \Rightarrow \quad u=\frac{1}{x^2}(-x+c)$$

$$\xrightarrow{u=y^2} y^2=\frac{1}{x^2}(-x+c) \quad \Rightarrow \quad x^2y^2+x=c$$

۲۵ـ گزینه «۲»

$$(x^2+1)y'+3xy=6x \quad \Rightarrow \quad (x^2+1)\frac{dy}{dx}=6x-3xy \quad \Rightarrow \quad (x^2+1)\frac{dy}{dx}=3x(2-y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{2-y}=\frac{3x}{x^2+1} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} -\ln(2-y)=\frac{3}{2}\ln c(x^2+1) \quad \Rightarrow$$

$$\ln(2-y)^{-1}=\ln(c(x^2+1))^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2-y}=(c(x^2+1))^{\frac{3}{2}}$$

$$\xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{2-y}\to\infty \quad \Rightarrow \quad (2-y)\to 0 \quad \Rightarrow \quad y\to 2$$

۲۶ـ گزینه «۱»

$$(x^۲ + xy\sin ۲x + y\sin^۲ x)\,dx + x\sin^۲ x\,dy = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = (\sin^۲ x + x\sin ۲x) - (x\sin ۲x + \sin^۲ x) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P \text{ : کامل}} x^۲\,dx + x\sin^۲ x\,dy = ۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} \frac{x^۳}{۳} + x\sin^۲ x\,(y) + c = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^۳}{۳} + xy\sin^۲ x + c = ۰$$

۲۷ـ گزینه «۲» حل اول:

$$x\,dy - ydx = y^۲\,dx \quad \Rightarrow \quad x\,dy = (y^۲ + y)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y(y+۱)} = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{، جدا شونده}} \int\left(\frac{۱}{y} - \frac{۱}{y+۱}\right)dy = \text{Ln}(cx) \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\,y - \text{Ln}(y+۱) = \text{Ln}(cx) \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\frac{y}{y+۱} = \text{Ln}(cx)$$

$$\xrightarrow{\text{Ln : تابعی ۱-۱ است}} \frac{y}{y+۱} = cx \xrightarrow{y \to ۰} ۰ = cx \quad \Rightarrow \quad x = ۰$$

حل دوم:

$$x\,dy - y\,dx = y^۲\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{y\,dx - x\,dy}{y^۲} = dx$$

$$\xrightarrow{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^۲} = d\left(\frac{x}{y}\right)} -d\left(\frac{x}{y}\right) = dx \quad \Rightarrow \quad d\left(x + \frac{x}{y}\right) = ۰ \quad \Rightarrow \quad x + \frac{x}{y} = c \quad \Rightarrow$$

$$x\left(۱ + \frac{۱}{y}\right) = c \quad \Rightarrow \quad x = c\,\frac{y}{y+۱} \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \to ۰} x = c \lim_{y \to ۰} \frac{y}{y+۱} = ۰$$

۲۸ـ گزینه «۳»

$$y\frac{dx}{dy} + ۲x = ۵y^۳ \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{۲}{y}x = ۵y^۲$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } x \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int \frac{۲}{y}dy} = e^{۲\text{Ln}\,y} = y^۲ \qquad \&$$

$$x(y) = \frac{۱}{y^۲}\left\{\int y^۲ \times (۵y^۲)\,dy + c\right\} \quad \Rightarrow \quad x(y) = \frac{۱}{y^۲}(y^۵ + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{y=۱} x(۱) = ۱ + c \xrightarrow{x(۱)=۰} c = -۱$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } y=۲ \text{ \& } c=-۱ \text{ در جواب عمومی}} x(۲) = \frac{۱}{۴}(۳۲ + (-۱)) \quad \Rightarrow \quad x(۲) = \frac{۳۱}{۴}$$

۲۹ـ گزینه «۴»

$$y' + y = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y' + y = x\,y^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله) } y^n \text{ : برنولی}} yy' + y^۲ = x \xrightarrow{y^۲ = u \Rightarrow yy' = \frac{u'}{۲}} \frac{u'}{۲} + u = x \quad \Rightarrow \quad u' + ۲u = ۲x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int ۲\,dx} = e^{۲x} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{۱}{e^{۲x}}\left\{\int e^{۲x} \times (۲x)\,dx + c\right\} = e^{-۲x}\left((x - \frac{۱}{۲})e^{۲x} + c\right) \quad \Rightarrow \quad u = x - \frac{۱}{۲} + ce^{-۲x}$$

$$\xrightarrow{u = y^۲} y^۲ = x - \frac{۱}{۲} + ce^{-۲x}$$

۳۰ـ گزینه «۲» حل اول:

$$y' = \frac{x^۲ + ۲y^۲}{xy} \xrightarrow{\text{فرم بسته همگن}; \left(\frac{y}{x} = u \Rightarrow y' = u + xu'\right)} u + xu' = \frac{x^۲ + ۲x^۲u^۲}{x^۲u} = \frac{۱ + ۲u^۲}{u} \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{۱ + ۲u^۲}{u} - u = \frac{۱ + u^۲}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{۱ + u^۲}\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{، جدا شونده}} \frac{۱}{۲}\text{Ln}(۱ + u^۲) = \text{Ln}(cx) \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(۱ + u^۲) = ۲\text{Ln}(cx) = \text{Ln}(cx)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{Ln : تابعی ۱-۱ است}} ۱ + u^۲ = c^۲x^۲ \xrightarrow{u = \frac{y}{x}} ۱ + \frac{y^۲}{x^۲} = c^۲x^۲ \quad \Rightarrow \quad y^۲ + x^۲ = c^۲x^۴ \xrightarrow{x=۰} y = ۰$$

حل دوم:

$$y' = \frac{x^۲ + ۲y^۲}{xy} = \frac{x}{y} + ۲\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{۲}{x}\,y = x\,y^{-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله) } y^n \text{ : برنولی}} yy' - \frac{۲}{x}\,y^۲ = x \xrightarrow{y^۲ = u \Rightarrow yy' = \frac{u'}{۲}} \frac{u'}{۲} - \frac{۲}{x}u = x \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{۴}{x}u = ۲x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{-۴}{x}dx} = e^{-۴\text{Ln}\,x} = x^{-۴} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{x^۴}}\left\{\int \frac{۱}{x^۴} \times ۲x\,dx + c\right\} = x^۴(-x^{-۲} + c) \quad \Rightarrow \quad u = -x^۲ + cx^۴$$

$$\xrightarrow{u = y^۲} y^۲ = -x + cx^۴ \xrightarrow{x=۰} y = ۰$$

۳۱ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۲ + ye^{xy}}{۲y - xe^{xy}} \quad \Rightarrow \quad (۲ + ye^{xy})\,dx + (xe^{xy} - ۲y)\,dy = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = (e^{xy} + xye^{xy}) - (e^{xy} + yxe^{xy}) = ۰$$

۳۲ـ گزینه «۴»

$$xy = c \xrightarrow{\text{حذف c بکمک مشتقگیری : گام اول}} y + xy' = 0 \Rightarrow xy' = -y$$

$$\xrightarrow[\text{گام دوم}]{y' \mapsto -\frac{1}{y'}} x\left(-\frac{1}{y'}\right) = -y \Rightarrow yy' = x \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y^2 - x^2 = c$$

۳۳ـ گزینه «۲»

$$y' + y = y^2(\cos x - \sin x) \Rightarrow y' + y = (\cos x - \sin x)\,y^2$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله) } \times\, y^{-2}\text{ ; برنولی}} y^{-2}y' + y^{-1} = \cos x - \sin x \xrightarrow{y^{-1}=u \Rightarrow y^{-2}y' = -u'} -u' + u = \cos x - \sin x \Rightarrow$$

$$u' - u = \sin x - \cos x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x} \quad \&$$

$$u(x) = \frac{1}{e^{-x}}\left\{\int e^{-x} \times (\sin x - \cos x)\,dx + c\right\} = e^{x}(-e^{-x}\sin x + c) \Rightarrow u = -\sin x + ce^{x}$$

$$\xrightarrow{u=y^{-1}} y^{-1} = -\sin x + ce^{x} \Rightarrow y = \frac{1}{ce^{x} - \sin x}$$

راهنمایی. با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$I = \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \underbrace{(\sin x - \cos x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du = -e^{-x}\,dx \\ v = \int(\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv = uv - \int v\,du} I = e^{-x}(-\cos x - \sin x) - \int \underbrace{e^{-x}}_{u} \underbrace{(\cos x + \sin x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du = -e^{-x}\,dx \\ v = \int(\cos x + \sin x)\,dx = \sin x - \cos x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv = uv - \int v\,du} I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \left(e^{-x}(\sin x - \cos x) - \int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx\right)$$

$$\xrightarrow{\int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx = I} I = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(\sin x - \cos x) - I \Rightarrow$$

$$2I = -2e^{-x}\sin x \Rightarrow I = \int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx = -e^{-x}\sin x$$

۳۴ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = 2y - 1 \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{2y-1}{y} = a(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int(\frac{2y-1}{y})dy} = e^{2y - \operatorname{Ln} y} = e^{2y} \times e^{-\operatorname{Ln} y} \Rightarrow \mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$$

۳۵ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\text{حذف c بکمک مشتقگیری ; گام اول}} (y = cx^2 \Rightarrow y' = 2cx) \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{گام دوم}]{y' \mapsto \frac{-1}{y'^2}} \frac{y}{(\frac{-1}{y'})} = \frac{x}{2} \Rightarrow -yy' = \frac{x}{2} \Rightarrow -y\,dy = \frac{x}{2}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} -\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{4} + c \Rightarrow x^2 + 2y^2 = C \quad ;(-4c = C) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=1 \& y=1) در جواب عمومی}} 1 + 2 = C \Rightarrow C = 3 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 3 \quad \text{(جواب خصوصی)}$$

۳۶ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y\cos x}{4y^3 - \sin x} \Rightarrow (3x^2 + y\cos x)\,dx + (\sin x - 4y^3)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = \cos x - \cos x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}} 3x^2dx + (\sin x - 4y^3)\,dy = 0 \xrightarrow{\text{(معادله) } \int} x^3 + \sin x(y) - y^4 + c = 0 \quad \text{(جواب عمومی)}$$

چون جواب مفروض از مبدأ مختصات می‌گذرد، در اینصورت:

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=0 \& y=0) در جواب عمومی}} c = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} x^3 + y\sin x - y^4 = 0 \quad \text{(جواب خصوصی)}$$

۳۷ـ گزینه «۳»

$$(x + y + 2)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0 \Rightarrow ((x+y) + 2)\,dx + (2(x+y) - 1)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{(x+y=u \Rightarrow dy = du - dx)} (u + 2)\,dx + (2u - 1)(du - dx) = 0 \Rightarrow (3 - u)\,dx = (1 - 2u)\,du \Rightarrow$$

$$\frac{1-2u}{3-u}\,du = dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} \int\frac{(6-2u)-5}{3-u}\,du = x + c \Rightarrow 2u + 5\operatorname{Ln}|3-u| = x + c \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{u=x+y} 2x + 2y + 5\operatorname{Ln}|3 - x - y| = x + c \Rightarrow x + 2y + 5\operatorname{Ln}|x + y - 3| = c$$

راهنمایی.

$$I = \int\frac{1-2u}{3-u}\,du = \int\frac{(6-2u)-5}{3-u}\,du = \int(2 - \frac{5}{3-u})\,du \Rightarrow \int\frac{1-2u}{3-u}\,du = 2u + 5\operatorname{Ln}|3-u|$$

۳۸ـ گزینه «۱»

$$x\frac{dy}{dx} - 3y = x^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^3$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\operatorname{Ln} x} = \frac{1}{x^3} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^3}}\left\{\int\frac{1}{x^3} \times (x^3)\,dx + c\right\} \Rightarrow y = x^3(x + c)$$

۳۹ـ گزینه «۲»

$$xy' + y = x^{۴}y^{۳} \quad \Rightarrow \quad y' + (\frac{۱}{x})y = x^{۳}y^{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-۳};\ \text{برنولی}} y^{-۳}y' + (\frac{۱}{x})y^{-۲} = x^{۳} \xrightarrow{y^{-۲}=u \Rightarrow y^{-۳}y'=\frac{u'}{-۲}} -\frac{u'}{۲} + u = x^{۳} \quad \Rightarrow \quad u' - (\frac{۲}{x})u = -۲x^{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -\frac{۲}{x}dx} = e^{-۲Ln\,x} = \frac{۱}{x^{۲}} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{x^{۲}}}\left\{\int \frac{۱}{x^{۲}} \times (-۲x^{۳})\,dx + c\right\} = x^{۲}(-x^{۲} + c) \xrightarrow{u=y^{-۲}} y^{-۲} = x^{۲}(-x^{۲} + c)$$

۴۰ـ گزینه «۱»

$$e^{y}dx + (x\,e^{y} + ۲y)dy = ۰ \xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = e^{y} - e^{y} = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}} e^{y}dx + ۲y\,dy = ۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) }\int} e^{y} \times x + y^{۲} + c = ۰$$

۴۱ـ گزینه «۲»

$$(x^{۲} + y^{۲})\,dx - xy\,dy = ۰$$

$$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx);\ \text{فرم باز همگن}} (x^{۲} + x^{۲}u^{۲})\,dx - x^{۲}u(x\,du + u\,dx) = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(۱ + u^{۲})\,dx - u(x\,du + u\,dx) = ۰ \quad \Rightarrow \quad dx - xu\,du = ۰ \quad \Rightarrow \quad u\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شونده}} \frac{u^{۲}}{۲} = Ln\,x + c \quad \Rightarrow \quad u^{۲} = ۲Ln\,x + C \quad ;(۲c = C)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{(\frac{y}{x})^{۲}}{۲} = Ln\,x^{۲} + C \quad \Rightarrow \quad \frac{y^{۲}}{۲} = x^{۲}(Ln\,x^{۲} + C) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۱} \frac{(y(۱))^{۲}}{۲} = Ln\,۱ + C \xrightarrow{y(۱)=۰} C = ۰ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y^{۲} = x^{۲}Ln\,x^{۲}$$

۴۲ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$y' + \frac{n}{x}y = x^{-n} \xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int \frac{n}{x}dx} = e^{n\,Ln\,x} = x^{n} \qquad \&$$

$$y(x) = \frac{۱}{x^{n}}\left\{\int x^{n} \times x^{-n}\,dx + c\right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{۱}{x^{n}}(x + c) \text{ (جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱) = (۱ + c) \xrightarrow{y(۱)=۰} c = -۱ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y = \frac{۱}{x^{n}}(x - ۱)$$

۴۳ـ گزینه «۱»

$$y' = \sqrt{y + \sin x} - \cos x \quad \Rightarrow \quad y' + \cos x = \sqrt{y + \sin x}$$

$$\xrightarrow{y+\sin x=u \Rightarrow y'+\cos x=u'} u' = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شونده}} ۲\sqrt{u} = x + c \xrightarrow{u=y+\sin x} ۲\sqrt{y(x) + \sin x} = x + c \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۰} ۲\sqrt{y(۰)} = c \xrightarrow{y(۰)=۰} c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=π \& c=۰) در جواب عمومی}} ۲\sqrt{y(\pi) + \sin\pi} = \pi + ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲\sqrt{y(\pi)} = \pi \quad \Rightarrow \quad y(\pi) = \frac{\pi^{۲}}{۴}$$

۴۴ـ گزینه «۴»

$$\frac{dI}{dt} + (\frac{۱۰}{۲t + ۵})I = ۱۰ \xrightarrow{\text{خطی نسبت به I بر حسب t}} \mu(t) = e^{\int (\frac{۱۰}{۲t+۵})dt} = e^{۵Ln(۲t+۵)} = (۲t + ۵)^{۵} \qquad \&$$

$$I(t) = \frac{۱}{(۲t + ۵)^{۵}}\left\{\int (۲t + ۵)^{۵} \times (۱۰)\,dt + c\right\} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{۱}{(۲t + ۵)^{۵}}(\frac{۵}{۶}(۲t + ۵)^{۶} + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{t=۰} I(۰) = \frac{۱}{۵^{۵}}(\frac{۵}{۶} \times ۵^{۶} + c) \xrightarrow{I(۰)=۰} \frac{۵^{۷}}{۶} + c = ۰ \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{۵^{۷}}{۶}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (t=-۳ \& c=-\frac{۵^{۷}}{۶}) در جواب عمومی}} I(-۳) = \frac{۱}{(۲\times -۳ + ۵)^{۵}}(\frac{۵}{۶}(۲\times -۳ + ۵)^{۶} + (-\frac{۵^{۷}}{۶})) \quad \Rightarrow \quad I(-۳) = ۱۳۰۲۰$$

راهنمایی.

۱) $\int \frac{۱۰}{۲t + ۵}\,dt = ۵\int \frac{۲}{۲t + ۵}\,dt = ۵Ln\,(۲t + ۵)$

۲) $\int ۱۰(۲t + ۵)^{۵} = ۵\int ۲(۲t + ۵)^{۵}\,dt = ۵\frac{(۲t + ۵)^{۶}}{۶}$

۴۵ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\frac{du}{dt} + au = ۱۰۰at \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب t}} \mu(t) = e^{\int a\,dt} = e^{at} \qquad \&$$

$$u(t) = \frac{۱}{e^{at}}\left\{\int e^{at} \times (۱۰۰at)\,dt + c\right\} \quad \Rightarrow \quad u(t) = e^{-at}(\frac{۱۰۰}{a}(at - ۱)e^{at} + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{t=۰} u(۰) = (\frac{۱۰۰}{a} \times -۱ + c) \xrightarrow{u(۰)=۰} c = \frac{۱۰۰}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (t=\frac{۱}{a} \& c=\frac{۱۰۰}{a}) در جواب عمومی}} u(\frac{۱}{a}) = e^{-a\times\frac{۱}{a}}(\frac{۱۰۰}{a}e^{a\times\frac{۱}{a}}(a \times \frac{۱}{a} - ۱) + \frac{۱۰۰}{a}) \quad \Rightarrow \quad u(\frac{۱}{a}) = \frac{۱۰۰}{a}e^{-۱}$$

۴۶ـ گزینه «۴» با توجه به شکل ارائه گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را بصورت $\mu(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ در نظر می‌گیریم. دراینصورت؛

$$\xrightarrow{x^{\alpha}y^{\beta}\times \text{(معادله)}} (۲x^{\alpha}y^{۱+\alpha}e^{x^{۲}y^{۲}} + ۲x^{\alpha}y^{۲+\alpha})\,dx + (۲x^{۱+\alpha}y^{\alpha}e^{x^{۲}y^{۲}} + ۳x^{۱+\alpha}y^{۱+\alpha})\,dy = ۰$$

معادله حاصل ، طبق تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\Delta = Q_x - P_y = ۲(۱+\alpha)x^{\alpha}y^{\alpha}e^{x^۲y^۲} + ۲(۲xy^۲e^{x^۲y^۲})x^{۱+\alpha}y^{\alpha} + ۳(۱+\alpha)x^{\alpha}y^{۱+\alpha}$$

$$-۲(۱+\alpha)x^{\alpha}y^{\alpha}e^{x^۲y^۲} - ۲(۲yx^۲e^{x^۲y^۲})x^{\alpha}y^{۱+\alpha} - ۲(۲+\alpha)x^{\alpha}y^{۱+\alpha} = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$۴x^{۲+\alpha}y^{۲+\alpha}e^{x^۲y^۲} + ۳(۱+\alpha)x^{\alpha}y^{۱+\alpha} - ۴y^{۲+\alpha}x^{۲+\alpha}e^{x^۲y^۲} - ۲(۲+\alpha)x^{\alpha}y^{۱+\alpha} = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha-۱)x^{\alpha}y^{۱+\alpha} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \alpha = ۱$$

۴۷ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{x+۳e^y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = x + ۳e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - x = ۳e^y$$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به x بر حسب y}}$ $\mu(y) = e^{\int(-۱)dy} = e^{-y}$ &

$$x(y) = \frac{۱}{e^{-y}}\left\{\int e^{-y}\times(۳e^y)dy + c\right\} \quad \Rightarrow \quad x = e^y(۳y+c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$\xrightarrow{y(۱)=۰ \Rightarrow \text{با جایگذاری } (x=۱ \,\&\, y=۰) \text{ در جواب عمومی}}$ $۱ = e^{۰}(۳\times۰ + c) \quad \Rightarrow \quad c = ۱$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=۱ \,\&\, y=-۱) \text{ در جواب عمومی}}$ $x = e^{-۱}(۳\times-۱+۱) \quad \Rightarrow \quad x = -۲e^{-۱}$

۴۸ـ گزینه «۳»

$$y' - ۲xy = \sin x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -۲x\,dx} = e^{-x^۲} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{۱}{e^{-x^۲}}\left\{\int e^{-x^۲}\sin x\,dx + c\right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{x^۲}\left\{\int_{۰}^{x} e^{-t^۲}\sin t\,dt + c\right\}$$

$\xrightarrow{x=۰}$ $y(۰) = e^{۰}\left\{\int_{۰}^{x} e^{-t^۲}\sin t\,dt + c\right\} \xrightarrow{y(۰)=۳}$ $c = ۳ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}}$ $y = e^{x^۲}\left\{\int_{۰}^{x} e^{-t^۲}\sin t\,dt + ۳\right\}$

۴۹ـ گزینه «۴» حل اول:

$$y'(y^۲ - x) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^۲ - x} \quad \Rightarrow \quad y\,dx + (x - y^۲)\,dy = ۰$$

$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y}$ $\Delta = ۱ - ۱ = ۰$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}}$ $(x - y^۲)\,dy = ۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int}$ $xy - \frac{y^۳}{۳} + c = ۰ \quad \Rightarrow \quad xy = \frac{y^۳}{۳} - c \quad \Rightarrow$

$$x = \frac{۱}{۳}y^۲ - \frac{c}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۱}{۳}y^۲ + \frac{A}{y} \quad ;(-c = A)$$

حل دوم:

$$y'(y^۲ - x) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y^۲ - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y^۲ - x}{y} = y - \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{۱}{y}x = y$$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به x بر حسب y}}$ $\mu(y) = e^{\int \frac{۱}{y}dy} = e^{\ln y} = y$ &

$$x(y) = \frac{۱}{y}\left\{\int y\times y\,dy + c\right\} = \frac{۱}{y}\left(\frac{y^۳}{۳} + c\right) \quad \Rightarrow \quad x(y) = \frac{۱}{۳}y^۲ + \frac{c}{y}$$

۵۰ـ گزینه «۱» با توجه به نکته آمده مثال ۱۵. در فصل اول معادله دیفرانسیل مورد نظر معادله‌ای با تابع جرم $m(t)$ بصورت $\frac{dm}{dt} = km$ است، که دارای جواب عمومی بصورت $m(t) = m_۰e^{kt}$ می‌باشد. ($m_۰$ جرم اولیه ماده رادیواکتیو می‌باشد.) در اینصورت با توجه به تعریف نیم‌عمر یک ماده رادیواکتیو (نیم عمر یک ماده رادیواکتیو، مدت زمان لازم جهت واپاشی نصف جرم اولیه آن می‌باشد و با T نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر $m(T) = \frac{۱}{۲}m_۰$.) بدست می‌آوریم:

$$m(t) = m_۰e^{kt} \xrightarrow{t=T=۱۶۰۰} m(T) = m_۰e^{k\times۱۶۰۰} \xrightarrow{m(T)=\frac{۱}{۲}m_۰} \frac{۱}{۲}m_۰ = m_۰e^{۱۶۰۰k} \quad \Rightarrow$$

$$e^{۱۶۰۰k} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad ۱۶۰۰k = \ln\frac{۱}{۲} = -\ln ۲ \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln ۲}{۱۶۰۰} \quad ;(۱)$$

اکنون برای تعیین زمانی که در آن تنها $\frac{۱}{۴}$ مقدار اولیه ماده رادیواکتیو باقی می‌ماند داریم:

$$m(t) = m_۰e^{kt} \xrightarrow{m(t)=\frac{۱}{۴}m_۰} \frac{۱}{۴}m_۰ = m_۰e^{kt} \quad \Rightarrow \quad e^{kt} = \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow$$

$$kt = \ln\frac{۱}{۴} = -\ln ۴ = -۲\ln ۲ \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} -\frac{\ln ۲}{۱۶۰۰}t = -۲\ln ۲ \quad \Rightarrow \quad t = ۲\times۱۶۰۰ = ۳۲۰۰$$

۵۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y}$ $\Delta = ۱ - ۱ = ۰$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}}$ $(x+y)\,dx + (-y)\,dy = ۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int}$ $\frac{x^۲}{۲} + yx - \frac{y^۲}{۲} + c = ۰$ (جواب عمومی)

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=۱ \,\&\, y=۱)}$ $\frac{۱}{۲} + ۱ - \frac{۱}{۲} + c = ۰ \quad \Rightarrow \quad c = -۱$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (c=-۱ \,\&\, x=۰) \text{ در جواب عمومی}}$ $۰ + ۰ - \frac{(y(۰))^۲}{۲} + (-۱) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (y(۰))^۲ = -۱$

۵۲ـ گزینه «۳»

$$(y + xy^۲)\,dx - x\,dy = ۰$$

$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y}$ $\Delta = -۱ - (۱ + ۲xy) = -۲(۱+xy) \neq ۰$

$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}}$ $\frac{\Delta}{P} = \frac{-۲(۱+xy)}{y(۱+xy)} = \frac{-۲}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int(-\frac{۲}{y})dy} = e^{-۲\ln y} = \frac{۱}{y^۲}$

۵۳ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری ؛ گام اول}} (r = c(1+\sin\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = c\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{dr}{d\theta}}{r} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\xrightarrow{\frac{dr}{d\theta} \mapsto -r^2\frac{d\theta}{dr}\text{ ؛ گام دوم}} \frac{-r^2\frac{d\theta}{dr}}{r} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad -r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = -\frac{dr}{r}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{ ؛ جدا شونده}} \int(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta)\,d\theta = -\ln r + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln(\sec\theta+\tan\theta) - \ln\cos\theta = \ln\frac{c}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\cos\theta} = \ln\frac{c}{r} \xrightarrow{\ln\text{: تابعی 1-1 است}} \frac{\sec\theta+\tan\theta}{\cos\theta} = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{c}{r} \quad \Rightarrow \quad r = c(1-\sin\theta)$$

۵۴ـ گزینه «۴» حل اول. از یک طرف؛

$$\lambda = \frac{1}{\cos y} \;;(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos y}) = \frac{dy}{dx}\times\frac{d}{dy}(\frac{1}{\cos y}) = (\frac{\sin y}{\cos^2 y})\frac{dy}{dx}$$

$$\xrightarrow{\lambda=\frac{1}{\cos y}} \quad \frac{d\lambda}{dx} = (\frac{\sin y}{\frac{1}{\lambda^2}})\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \sin y\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} \quad ;(2)$$

در اینصورت؛

$$\sin y\frac{dy}{dx} = \cos y(1-\cos y) \xrightarrow{\text{با جایگذاری تساویهای (1) و (2)}} \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}(1-\frac{x}{\lambda}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{dx} = \lambda - x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } \lambda \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x} \qquad \&$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{e^{-x}}\{\int e^{-x}\times(-x)dx + c\} = e^x(xe^{-x}+e^{-x}+c) \quad \Rightarrow \quad \lambda = x+1+ce^x$$

حل دوم:

$$\sin y\frac{dy}{dx} = \cos y - x\cos^2 y \xrightarrow{\cos y = u \;\Rightarrow\; \sin y\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx}} -\frac{du}{dx} = u - xu^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} + u = xu^2 \xrightarrow{\text{(معادله) } \times\, u^{-2}\text{ ؛ برنولی}} u^{-2}\frac{du}{dx} + u^{-1} = x$$

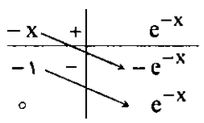
$$\xrightarrow{u^{-1}=v \;\Rightarrow\; u^{-2}\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dx}} -\frac{dv}{dx} + v = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} - v = -x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } v \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{-\int dx} = e^{-x} \qquad \&$$

$$v(x) = \frac{1}{e^{-x}}\{\int e^{-x}\times -x\;dx + c\} \quad \Rightarrow \quad v = e^x(xe^{-x}+e^{-x}+c) = x+1+ce^x$$

$$\xrightarrow{(v=u^{-1} \;\&\; u=\cos y) \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{\cos y}} \frac{1}{\cos y} = x+1+ce^x \xrightarrow{\frac{1}{\cos y}=\lambda} \lambda = x+1+ce^x$$

راهنمایی.



$$\Rightarrow \quad \int -xe^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x}$$

۵۵ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)} \xrightarrow{(x-y+1=u \;\Rightarrow\; y'=1-u')} 1-u' = 1+\frac{1}{\sin u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin u} \quad \Rightarrow$$

$$-\sin u\;du = dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{ ؛ جدا شونده}} \cos u = x+c \quad \Rightarrow \quad u = \cos^{-1}(x+c)$$

$$\xrightarrow{u=x-y+1} x-y+1 = \cos^{-1}(x+c) \xrightarrow{c=0} y = x+1-\cos^{-1}(x)$$

۵۶ـ گزینه «۲»

$$(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{همگن ؛ } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=x\,du+u\,dx)} (x^2+x^2u^2)dx + (x^2-x^2u)(x\,du+u\,dx) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2\Big((1+u^2)\,dx + (1-u)x\,du + (1-u)u\,dx\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+u)\,dx + (1-u)\times du = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u-1}{1+u}du = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{ ؛ جدا شونده}} \int\frac{(u+1)-2}{1+u}du = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad \int(1-\frac{2}{1+u})du = \ln(cx) \quad \Rightarrow$$

$$u - 2\ln(1+u) = \ln(cx) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad u = \ln(cx) + \ln(1+u)^2 \quad \Rightarrow \quad u = \ln(cx(1+u)^2)$$

$$\xrightarrow{(y(1)=1 \Rightarrow (x=1;\,y=1) \Rightarrow u=\frac{y}{x}=1)\text{ ؛ با جایگذاری در جواب عمومی}} 1 = \ln(c(1+1)^2) = \ln(4c) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{e}{4}$$

۵۷ـ گزینه «۲»

$$y' = 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{ ؛ جدا شونده}} \ln y = 3x + c$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln y = -\infty \quad \Rightarrow \quad \ln(\lim_{x\to-\infty} y) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} y = e^{-\infty} = 0$$

۵۸ـ گزینه «۲»

$$y = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad c = yx \xrightarrow{\text{حذف c بکمک مشتقگیری : گام اول}} 0 = y'x + y$$

$$\xrightarrow{y'\mapsto -\frac{1}{y^2}\text{ ؛ گام دوم}} (-\frac{1}{y^2})x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad yy' = x \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad y\,dy = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{ ؛ جدا شونده}} \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = c^* \quad ;(2c = c^*)$$

۵۹ـ گزینه «۲» از یک طرف؛

$$y = \int_{0}^{t} y\,dt + 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \int_{0}^{0} y\,dt + 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 1 \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$y = \int_{0}^{t} y\,dt + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dt \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{; جدا شونده}} \ln y = t + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ce^{t} \quad ;(e^{c} = C)$$

$$\xrightarrow{t=1} y(0) = C \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} C = 1 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y = e^{t}$$

لازم بذکر است، معمولاً اینگونه مسائل را به روش لاپلاس، حل می‌کنند.

راهنمایی. با توجه به قاعده مشتق انتگرالی داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a}^{t} f(x)\,dx\right) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t} y\,dt\right) = y$$

۶۰ـ گزینه «۳» با توجه به ضابطه $f(x,y) = x\sqrt{y}$ ، تابع $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته نمی‌باشد، در اینصورت از قضیه وجود یکتایی جواب (قضیه پیکار) نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

با توجه به ضابطه $y' = x\sqrt{y}$ تابع $y = 0$ یک جواب مسأله مقدار اولیه مفروض است. برای یافتن جوابهای دیگر؛

$$y' = x\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{, جدا شونده}} 2\sqrt{y} = \frac{x^{2}}{2} + c \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x^{2}}{4} + C\right)^{2} \quad ;\left(\frac{c}{2} = C\right) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

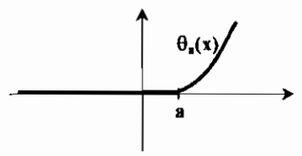
$$\xrightarrow{x=0} y(0) = C^{2} \xrightarrow{y(0)=0} C = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y = \frac{x^{4}}{16}$$

پس جواب دوم مسأله مقدار اولیه مفروض نیز محاسبه گردید.

برای تعیین جوابهای دیگر، ابتدا به ازاء هر $a > 0$ ، جوابی از معادله دیفرانسیل $y' = x\sqrt{y}$ که در شرط اولیه $y(a) = 0$ صدق کند، را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری شرط $y(a) = 0$ در جواب عمومی حاصل، جوابهای خصوصی مورد نظر برای هر $a > 0$، بصورت $y = \left(\frac{x^{2}}{4} - \frac{a^{2}}{4}\right)^{2}$ محاسبه می‌شوند.

بسادگی می‌توان بررسی کرد، هر کدام از جوابهای معادله دیفرانسیل مفروض، با شرط اولیه $y(a) = 0$; $a > 0$، جواب خصوصی با شرط آغازین $y(0) = 0$ را قطع می‌کنند. این دسته از جوابها را به مفهوم زیر بهم می‌چسبانیم:

$$\theta_a(x) = \begin{cases} 0 & ;x < a \\ \left(\frac{x^{2} - a^{2}}{4}\right)^{2} & ;x \geq a \end{cases}$$



در اینصورت به ازاء هر $a > 0$ تابع $y = \theta_a(x)$ تابعی مشتقپذیر است که در مسأله مقدار اولیه $y(0) = 0$; $y' = x\sqrt{y}$ نیز صدق می‌کند. در نتیجه مسأله مفروض بی‌شمار جواب دارد.

۶۱ـ گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را بصورت $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت؛

$$\xrightarrow{x^{\alpha}y^{\beta} \times \text{(معادله)}} (2x^{\alpha}y^{\beta+1} - 6x^{\alpha+1}y^{\beta})\,dx + (3x^{\alpha+1}y^{\beta} - 4x^{\alpha+2}y^{\beta-1})\,dy = 0$$

معادله حاصل با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\Delta = Q_x - P_y = 3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 4(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta-1} - (2(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 6\beta x^{\alpha+1}y^{\beta-1}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(3\alpha - 2\beta + 1)x^{\alpha}y^{\beta} - (8 + 4\alpha - 6\beta)x^{\alpha+1}y^{\beta-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3\alpha - 2\beta + 1 = 0 \\ 4\alpha - 6\beta + 8 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \quad \& \quad \beta = 2$$

۶۲ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = (2xy - 1) - 1 = 2(xy - 1) \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{2(xy-1)}{-x(xy-1)} = \frac{-2}{x} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^{2}}$$

۶۳ـ گزینه «۳»

$$y' = x + y \quad \Rightarrow \quad y' - y = x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x} \qquad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}}\left\{\int e^{-x} \times (x)\,dx + c\right\} = e^{x}(-x e^{-x} - e^{-x} + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = -x - 1 + ce^{x} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=0} y(0) = -1 + c \xrightarrow{y(0)=0} c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=2 \ \& \ c=1) \text{ در جواب عمومی}} y(2) = -2 - 1 + e^{2} \quad \Rightarrow \quad y(2) = -3 + e^{2}$$

۶۴ـ گزینه «۴»

$$\frac{dy}{dx} = (y - x - 1) + (x - y + 2)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (-(x-y) - 1) + ((x-y) + 2)^{-1}$$

$$\xrightarrow{\left(x-y=u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}\right)} 1 - \frac{du}{dx} = -u - 1 + (u+2)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = (u+2) - (u+2)^{-1}$$

۶۵ـ گزینه «۲»

i) $e^{x}y' - 4 + 2y = 0 \xrightarrow{e^{-x} \times \text{(معادله)}} y' + (2e^{-x})y = 4e^{-x} \quad \Rightarrow$ معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل خطی است.

ii) $y' = 4e^{-x} - 2e^{-x}y \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = 4e^{-x} - 2e^{-x}y$

از طرف دیگر معادله $y' = f(x,y)$ ، یک معادله دیفرانسیل همگن است، اگر به ازاء یک $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x,y)$$

که در معادله دیفرانسیل مفروض این شرط برقرار نمی‌باشد:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 4e^{-(\lambda x)} - 2e^{-(\lambda x)}(\lambda y) \neq \lambda^{\alpha} f(x,y) \quad ; \ \forall \alpha$$

۶۶ـ گزینه «۲»

$$y' = \sin(x+y) \xrightarrow{x+y=u \Rightarrow y'=u'-1} u'-1 = \sin u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \sin u + 1$$

۶۷ـ گزینه «۱»

$$(4x+xy^2)dx + (y+x^2y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x(4+y^2)dx = -y(1+x^2)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{4+y^2}dy = \frac{-x}{1+x^2}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \frac{1}{2}\text{Ln}(4+y^2) = \frac{-1}{2}\text{Ln}(1+x^2) + \text{Ln}\,c \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(4+y^2) + \text{Ln}(1+x^2) = 2\text{Ln}\,c \quad \Rightarrow$$

$$\text{Ln}((4+y^2)(1+x^2)) = \text{Ln}(c)^2 \quad \Rightarrow \quad (4+y^2)(1+x^2) = C \quad ;(c^2 = C) \quad \Rightarrow \quad 4+y^2 = \frac{C}{1+x^2}$$

۶۸ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = \sec y \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sec y} = \tan x\,dx \quad \Rightarrow \quad \cos y\,dy = \tan x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \sin y = -\text{Ln}(\cos x) + c \quad \Rightarrow \quad \sin y + \text{Ln}\cos x = c \xrightarrow{c=0} \sin y + \text{Ln}\cos x = 0$$

۶۹ـ گزینه «۱» حل اول:

$$\cos y\,dx + (x\sin y - \cos^2 y)dy = 0 \xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = \sin y - (-\sin y) = 2\sin y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{2\sin y}{\cos y} = 2\tan y = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int(2\tan y)dy} = e^{-2\text{Ln}\cos y} = e^{\text{Ln}\cos^{-2} y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\xrightarrow{\mu(y)\times \text{ (معادله)}} \left(\frac{1}{\cos y}\right)dx + \left(x\frac{\sin y}{\cos^2 y} - 1\right)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec y\,dx + (x\tan y\sec y - 1)dy = 0$$

معادله حاصل، بنابر تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} \sec y\,dx - dy = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} (\sec y)x - y + c = 0$$

حل دوم:

$$\cos y\,dx = (\cos^2 y - x\sin y)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\cos^2 y - x\sin y}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \cos y - x\tan y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} + (\tan y)x = \cos y \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } x \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int \tan y\,dy} = e^{-\text{Ln}\cos y} = \frac{1}{\cos y} \quad \&$$

$$x(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cos y}}\left\{\int \frac{1}{\cos y} \times (\cos y)\,dy + c\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \cos y\,(y+c) \quad \Rightarrow$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos y} = y + c \quad \Rightarrow \quad x\sec y - y = c \quad \Rightarrow \quad y - x\sec y = c \quad ;(-c = C)$$

۷۰ـ گزینه «۴»

$$y\,\text{Ln}\,y\,dx + (1+x^2)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad y\,\text{Ln}\,y\,dx = -(1+x^2)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y\,\text{Ln}\,y} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \text{Ln}(\text{Ln}\,y) + \text{Ln}\,c = -\text{tag}^{-1}x \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}(c\,\text{Ln}\,y) = -\text{tag}^{-1}x$$

راهنمایی.

$$\int \frac{dy}{y\,\text{Ln}\,y} = \int \frac{\frac{1}{y}}{\text{Ln}\,y}\,dy \xrightarrow{\int \frac{u'}{u}dx = \text{Ln}\,u} \int \frac{dy}{y\,\text{Ln}\,y} = \text{Ln}(\text{Ln}\,y)$$

۷۱ـ گزینه «۲»

$$y^2 = cx^3 + x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{y^2 - x^2 + 1}{x^3}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c \text{ به کمک مشتقگیری : گام اول}} 0 = \frac{(2yy' - 2x)x^3 - 3x^2(y^2 - x^2 + 1)}{x^6} \quad \Rightarrow \quad 2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3 \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{گام دوم ; } y' \mapsto -\frac{1}{y'}} 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = 3y^2 - x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad -2xy\frac{dx}{dy} = 3y^2 - x^2 + 3 \quad \Rightarrow$$

$$2xy\,dx + (3y^2 - x^2 + 3)dy = 0 \xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = -2x - 2x = -4x \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{-4x}{2xy} = -\frac{2}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\text{Ln}\,y} = \frac{1}{y^2}$$

$$\xrightarrow{\mu(y)\times \text{ (معادله)}} \frac{2x}{y}dx + \left(3 - \frac{x^2}{y^2} + \frac{3}{y^2}\right)dy = 0$$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} \frac{2x}{y}dx + \left(3 + \frac{3}{y^2}\right)dy = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} \frac{1}{y}x^2 + 3y - \frac{3}{y} + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 3y^2 - 3 = Cy \quad ;(-c = C)$$

۷۲ـ گزینه «۱»

$$y' = \frac{x-5}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2} \quad \Rightarrow \quad y^2dy = (x-5)dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + c \xrightarrow{x=0} \frac{(y(0))^3}{3} = c \xrightarrow{y(0)=\sqrt[3]{3}} c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=4 \,\&\, c=1) \text{ در جواب عمومی}} \frac{(y(4))^3}{3} = \frac{16}{2} - 20 + 1 \quad \Rightarrow \quad y^3 = -33 \quad \Rightarrow \quad y(4) = \sqrt[3]{-33}$$

۷۳ـ گزینه «۱»

$$x^۲y\frac{dy}{dx}-xy^۲=۱ \xrightarrow{y^۲=u \Rightarrow y\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\frac{du}{dx}} x^۲(\frac{۱}{۲}\frac{du}{dx})-xu=۱ \xrightarrow{\frac{۲}{x^۲}\times(\text{طرفین})} \frac{du}{dx}-\frac{۲u}{x}=\frac{۲}{x^۲}$$

۷۴ـ گزینه «۱»

$$\frac{xy'-y}{x^۲}+\frac{y}{x}=e^{-x} \xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow \frac{y'x-y}{x^۲}=u')} u'+u=e^{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int dx}=e^{x} \quad \&$$

$$u(x)=\frac{۱}{e^{x}}\{\int e^{x}\times(e^{-x})\,dx+c\} \Rightarrow u=e^{-x}(x+c)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{y}{x}=e^{-x}(x+c) \Rightarrow y=xe^{-x}(x+c)$$

۷۵ـ گزینه «۲»

$$y'+۲x^۲y=۳x^۲ \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int ۲x^۲dx}=e^{\frac{۲}{۳}x^۳} \quad \&$$

$$y(x)=\frac{۱}{e^{\frac{۲}{۳}x^۳}}\{\int e^{\frac{۲}{۳}x^۳}\times(۳x^۲)\,dx+c\}=e^{-\frac{۲}{۳}x^۳}(\frac{۳}{۲}e^{\frac{۲}{۳}x^۳}+c) \Rightarrow y(x)=\frac{۳}{۲}+ce^{-\frac{۲}{۳}x^۳}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱)=\frac{۳}{۲}+ce^{-\frac{۲}{۳}} \xrightarrow{y(۱)=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}+ce^{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow ce^{-\frac{۲}{۳}}=-۱ \Rightarrow c=-e^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y=\frac{۳}{۲}-e^{\frac{۲}{۳}(۱-x^۳)}$$

۷۶ـ گزینه «۴»

$$x^۲y'+xy=x+۱ \Rightarrow y'+\frac{۱}{x}y=\frac{۱}{x^۲}(x+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int\frac{۱}{x}dx}=e^{\text{Ln}\,x}=x \quad \&$$

$$y(x)=\frac{۱}{x}\{\int x\times\frac{۱}{x^۲}(x+۱)\,dx+c\} \Rightarrow y(x)=\frac{۱}{x}(x+\text{Ln}\,x+c) \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱)=(۱+c) \xrightarrow{y(۱)=۱} c=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی } ; (x=۳ \,\&\, c=۰)} y(۳)=\frac{۱}{۳}(۳+\text{Ln}\,۳)$$

۷۷ـ گزینه «۱»

$$۴\cos ۲u\,du-e^{-۵v}\,dv=۰ \Rightarrow e^{-۵v}dv=۴\cos ۲u\,du$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} -\frac{۱}{۵}e^{-۵v}=۲\sin ۲u+c \xrightarrow{u=۰} -\frac{۱}{۵}e^{-۵v(۰)}=c \xrightarrow{v(۰)=-۶} c=-\frac{۱}{۵}e^{۳۰}$$

$$\xrightarrow{(u=\pi \,\&\, c=-\frac{۱}{۵}e^{۳۰}) \text{ ; با جایگذاری در جواب عمومی}} -\frac{۱}{۵}e^{-۵v}=۲\sin(۲\pi)-\frac{۱}{۵}e^{۳۰} \Rightarrow e^{-۵v}=e^{۳۰} \Rightarrow v(\pi)=-۶$$

۷۸ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu' \text{ ; همگن}} x(u+xu')=xu+\sqrt{x^۲-x^۲u^۲}=x(u+\sqrt{۱-u^۲}) \Rightarrow$$

$$u+xu'=u+\sqrt{۱-u^۲} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\sqrt{۱-u^۲} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{۱-u^۲}}=\frac{dx}{x}$$

۷۹ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx+dy=du \\ dx-dy=dv \end{cases} ; (۱)$$

در اینصورت؛

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)^۲-(x-y)}{(x-y)+(x+y)^۲} \xrightarrow{(u=x+y \,\&\, v=x-y)} \frac{dy}{dx}=\frac{u^۲-v}{v+u^۲} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به راهنمایی}} \frac{dy+dx}{dx-dy}=\frac{(u^۲-v)+(v+u^۲)}{(v+u^۲)-(u^۲-v)}=\frac{۲u^۲}{۲v} \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \frac{du}{dv}=\frac{u^۲}{v}$$

راهنمایی.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A+B}{B-A}=\frac{C+D}{D-C}$$

۸۰ـ گزینه «۱» از آنجائیکه توابع $f(x,y)=۱+x\sin(xy)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=x^۲\cos(xy)$، توابعی پیوسته هستند، در اینصورت طبق قضیه پیکار، معادله دیفرانسیل مفروض دارای یک جواب منحصر بفرد است.

۸۱ـ گزینه «۳»

$$\frac{dy}{dx}=\text{tag}\,x\,\text{tag}\,y \Rightarrow \frac{dy}{\text{tg}\,y}=\text{tag}\,x\,dx \Rightarrow \text{cotg}\,y\,dy=\text{tag}\,x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \text{Ln}\sin y=-\text{Ln}\cos x+\text{Ln}\,c \Rightarrow \text{Ln}\sin x+\text{Ln}\cos x=\text{Ln}\,c \Rightarrow$$

$$\text{Ln}(\sin y\cos x)=\text{Ln}\,c \xrightarrow{\text{Ln} : \text{تابعی ۱-۱ است}} \sin y\cos x=c$$

۸۲ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{۱+x^۲} \Rightarrow dy=x\sqrt{۱+x^۲}\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} y=\frac{۱}{۲}\int ۲x(۱+x^۲)^{\frac{۱}{۲}}dx \Rightarrow y=\frac{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}$$

۸۳ـ گزینه «۱»

$$y' = xy^2 - y \quad \Rightarrow \quad y' + y = xy^2$$

$$\xrightarrow{\text{برنولی ; } y^{-2}\times \text{(معادله)}} y^{-2}y' + y^{-1} = x \xrightarrow{y^{-1}=u \Rightarrow y^{-2}y' = -u'} -u' + u = x \quad \Rightarrow \quad u' - u = -x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int -dx} = e^{-x} \qquad \&$$

$$u(x) = \frac{1}{e^{-x}}\left\{\int e^{-x}\times(-x)\,dx + c\right\} = e^{x}(xe^{-x} + e^{-x} + c) \quad \Rightarrow \quad u = x + 1 + ce^{x}$$

$$\xrightarrow{u=y^{-1}} y^{-1} = x + 1 + ce^{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x + 1 + ce^{x}} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=0 \& y=1)}} 1 = \frac{1}{1+c} \quad \Rightarrow \quad c = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y = \frac{1}{x+1} \quad \text{(جواب خصوصی)}$$

۸۴ـ گزینه «۳» حل اول:

$$(y + 6xy^3 - 4y^3)\,dx - (2x + 4y)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{y^m\times \text{(معادله)}} (y^{m+1} + 6xy^{m+3} - 4y^{m+3})\,dx - (2xy^m + 4y^{m+1})\,dy = 0$$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\Delta = Q_x - P_y = -2y^m - ((m+1)y^m + 6(m+3)xy^{m+2} - 4(m+3)y^{m+2}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-(m+3)y^m + (m+3)(4-6x)y^{m+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -3$$

حل دوم:

$$(y + 6xy^3 - 4y^3)\,dx - (2x + 4y)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = -2 - (1 + 18xy^2 - 12y^2) = -3(1 + 6xy^2 - 4y^2) \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{-3(1+6xy^2-4y^2)}{y(1+6xy^2-4y^2)} = \frac{-3}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int -\frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3} \quad \Rightarrow \quad m = -3$$

۸۵ـ گزینه «۴»

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx - 4x\,dy + x^2 dx = 0 \xrightarrow{\frac{1}{dx}\times \text{(معادله)}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x\frac{dy}{dx} + x^2 = 0$$

معادله حاصل، یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر $\frac{dy}{dx}$ است. بنابراین؛

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 4x^2}}{2} = \frac{4x \pm \sqrt{12x^2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \pm \sqrt{3}\,x \quad \Rightarrow \quad dy = (2 \pm \sqrt{3})\,x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} y = (2 \pm \sqrt{3})\frac{x^2}{2} + c$$

۸۶ـ گزینه «۱»

$$y^2 = x(y-x)y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{همگن ; } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} u + xu' = \frac{x^2u^2}{x^2u - x^2} = \frac{u^2}{u-1} \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u = \frac{u}{u-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} u - \ln u = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad u = \ln u + \ln x + \ln c = \ln(cxu)$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{y}{x} = \ln(cx(\frac{y}{x})) \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \ln(cy) \quad \Rightarrow \quad cy = e^{\frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{\frac{y}{x}} \qquad ;(\frac{1}{c} = C)$$

۸۷ـ گزینه «۴»

$$x^2 + y^2 = 2c_1x \quad \Rightarrow \quad 2c_1 = \frac{x^2+y^2}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c_1 \text{ بکمک مشتقگیری ; گام اول}} \frac{d}{dx}: \frac{(2x+2yy')x - (x^2+y^2)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

$$\xrightarrow{y' \mapsto -\frac{1}{y'} \text{ ; گام دوم}} -\frac{1}{y'} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$\xrightarrow{\text{همگن ; } (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} u + xu' = \frac{2x^2u}{x^2 - x^2u^2} = \frac{2u}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2} - u \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \int(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2})du = \ln(cx) \quad \Rightarrow$$

$$\ln u - \ln(1+u^2) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{u}{1+u^2} = \ln(cx) \xrightarrow{\ln: \text{تابعی } 1\text{-}1 \text{ است}} \frac{u}{1+u^2} = cx$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = cx \quad \Rightarrow \quad \frac{xy}{x^2+y^2} = cx \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x^2+y^2} = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = -Cy \qquad ;(\frac{1}{c} = -C)$$

۸۸ـ گزینه «۳»

$$y' + (1+y^2)(\tan^{-1}y - x) = 0 \xrightarrow{\frac{1}{1+y^2}\times \text{(معادله)}} \frac{y'}{1+y^2} + \tan^{-1}y = x$$

$$\xrightarrow{(\tan^{-1}y = u \Rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = u')} u' + u = x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int dx} = e^x \qquad \&$$

$$u(x)=\frac{1}{e^x}\left\{\int e^x\times(x)\,dx+c\right\}=e^{-x}\,(e^x(x-1)+c)\quad\Rightarrow\quad u=x-1+ce^{-x}$$

$$\xrightarrow{u=\tan^{-1}y}\ \tan^{-1}y=x-1+ce^{-x}\xrightarrow{x=0}\tan^{-1}(y(0))=-1+c\xrightarrow{y(0)=0}\tan^{-1}(0)=-1+c\quad\Rightarrow\quad c=1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } c=1 \text{ در جواب عمومی}}\tan^{-1}y=x-1+e^{-x}\quad\Rightarrow\quad y=\tan(x-1+e^{-x})$$

۸۹ـ گزینه «۱» از آنجائیکه شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطه (x,y) واقع بر آن، برابر با مقدار y' در نقطه مفروض است، در نتیجه منحنی مورد نظر در واقع جواب مسأله مقدار اولیه $y'=x^2+y\ ;\ y(0)=0$ می‌باشد:

$$y'=x^2+y\quad\Rightarrow\quad y'-y=x^2\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x}\mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}\qquad\&$$

$$y(x)=\frac{1}{e^{-x}}\left\{\int e^{-x}\times x^2dx+c\right\}=e^x(-(x^2+2x+2)e^{-x}+c)\quad\Rightarrow\quad y=-(x^2+2x+2)+ce^x$$

$$\xrightarrow{x=0}\ y(0)=2+c\xrightarrow{y(0)=0}\ c=2\xrightarrow{\text{با جایگذاری دو جواب عمومی}}\ y=-(x^2+2x+2)+2e^x$$

یادآوری. با توجه به قاعده انتگرالگیری به روش جزء به جزء می‌توان بدست آورد:

الف) $\int x^n e^x\,dx=(x^n-nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}-\cdots+(-1)^n n!)e^x$

ب) $\int x^n e^{-x}\,dx=-(x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!)e^{-x}$

۹۰ـ گزینه «۳» بالاترین مرتبه مشتق حاضر در معادله دیفرانسیل مفروض ۳ است.

۹۱ـ گزینه «۲» از یک طرف؛

$$y=e^{\int u\,dx}\quad\Rightarrow\quad y'=ue^{\int u\,dx}\xrightarrow{e^{\int u\,dx}=y}y'=uy\quad;(1)\qquad\&$$

$$y'=uy\quad\Rightarrow\quad y''=u'y+uy'\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}y''=u'y+u^2y\quad\Rightarrow\quad y''=y(u'+u^2)\quad;(2)$$

در اینصورت؛

$$x^2yy''=(y-xy')^2\xrightarrow{\text{تساویهای (1) و (2)}}x^2y^2(u'+u^2)=(y-xuy)^2\quad\Rightarrow$$

$$x^2y^2(u'+u^2)=y^2(1-xu)^2\quad\Rightarrow\quad x^2(u'+u^2)=1+x^2u^2-2xu\quad\Rightarrow\quad x^2u'=1-2xu$$

۹۲ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$\omega=r\phi\quad\Rightarrow\quad\phi=\frac{\omega}{r}\xrightarrow{\frac{d}{dr}\text{(طرفین)}}\frac{d\phi}{dr}=\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\times\omega)=-\frac{1}{r^2}\times\omega+\frac{1}{r}\times\frac{d\omega}{dr}\quad\Rightarrow$$

$$r^2\frac{d\phi}{dr}=-\omega+r\frac{d\phi}{dr}\xrightarrow{\frac{d}{dr}\text{(طرفین)}}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr})=-\frac{d\omega}{dr}+(\frac{d\omega}{dr}+r\times\frac{d^2\omega}{dr^2})\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr})=r\frac{d^2\omega}{dr^2}\quad;(1)$$

در اینصورت؛

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr})+B^2\phi=0\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}\frac{1}{r^2}(r\frac{d^2\omega}{dr^2})+B^2\phi=0\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2\omega}{dr^2}+B^2r\phi=0\xrightarrow{r\phi=\omega}\frac{d^2\omega}{dr^2}+B^2\phi=0$$

۹۳ـ گزینه «۳» با توجه به گزینه‌ها، x'' باید محاسبه شود:

$$x=c_1\sin(\omega t+c_2)\quad\Rightarrow\quad x'=c_1\omega\cos(\omega t+c_2)\quad\Rightarrow\quad x''=-c_1\omega^2\sin(\omega t+c_2)$$

لازم بذکر است، در مسأله فوق تساوی $x''=-\omega^2x$ نیز برقرار است.

۹۴ـ گزینه «۳» باید ثابتهای a و b بکمک مشتقگیری حذف گردند:

$$(y-a)^2=2bx\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}}2y'(y-a)=2b\quad\Rightarrow\quad(y-a)=\frac{b}{y'}\quad;(1)$$

در اینصورت؛

$$(y-a)^2=2bx\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}\frac{b^2}{y'^2}=2bx\quad\Rightarrow\quad b=2xy'^2\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}}0=2y'^2+4xy''y'\quad\Rightarrow\quad y'+2xy''=0$$

۹۵ـ گزینه «۳» باید ثابتهای a و b بکمک مشتقگیری حذف گردند:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}}\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{b^2}{a^2}=-\frac{yy'}{x}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}}0=-\frac{(y'^2+yy'')x-yy'}{x^2}\quad\Rightarrow\quad x(yy''+y'^2)=yy'$$

۹۶ـ گزینه «۴»

$$xy'-y=e^{\frac{1}{x}}\quad\Rightarrow\quad y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x}\mu(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}\qquad\&$$

$$y(x)=\frac{1}{-\frac{1}{x}}\left\{\int\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}dx+c\right\}\quad\Rightarrow\quad y(x)=x(-e^{\frac{1}{x}}+c)\qquad\text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=1}y(1)=-e+c\xrightarrow{y(1)=e}e=-e+c\quad\Rightarrow\quad c=2e$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } c=2e \text{ در جواب عمومی}}y=x(-e^{\frac{1}{x}}+2e)\quad\Rightarrow\quad y=-xe^{\frac{1}{x}}+2ex$$

۹۷ـ گزینه «۲»

$$3x^2y^2\frac{dy}{dx}=-2xy^3\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{y}=\frac{-2}{3}\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}}\ln y=\frac{-2}{3}\ln x+\ln c\quad\Rightarrow\quad\ln y=\ln(x)^{-\frac{2}{3}}+\ln c\quad\Rightarrow$$

$$\ln y=\ln(c(x)^{-\frac{2}{3}})\xrightarrow{\ln:\text{ تابعی 1-1 است.}}y=cx^{-\frac{2}{3}}$$

۹۸ـ گزینه «۳»

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}\times y^2\xrightarrow{\text{(معادله) }\times y^{-2}:\text{ برنولی}}y^{-2}y'-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow{y^{-1}=u\Rightarrow y^{-2}y'=-u'}-u'-\frac{1}{x}u=-\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad u'+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x}$$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u برحسب x}}$ $\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$ &

$u(x)=\frac{1}{x}\{\int x\times\frac{1}{x}dx+c\} \Rightarrow u=\frac{1}{x}(x+c) \xrightarrow{u=y^{-1}} \frac{1}{y}=\frac{x+c}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{x+c}$

۹۹ـ گزینه «۲» حل اول:

$\frac{dy}{dx}+x^2y=2x^2\times y^{-2} \xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^2;\ \text{برنولی}} y^2\frac{dy}{dx}+x^2y^3=2x^2$

$\xrightarrow{y^3=P \Rightarrow y^2\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\frac{dP}{dx}} \frac{1}{3}\frac{dP}{dx}+x^2P=2x^2 \Rightarrow \frac{dP}{dx}+3x^2P=6x^2$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به P برحسب x}}$ $\mu(x)=e^{\int 3x^2dx}=e^{x^3}$ &

$P(x)=\frac{1}{e^{x^3}}\{\int e^{x^3}\times 6x^2dx+c\}=e^{-x^3}\{2\int(3x^2)e^{x^3}dx+c\} \Rightarrow P=e^{-x^3}(2e^{x^3}+c) \Rightarrow$

$P=2+ce^{-x^3} \xrightarrow{P=y^3} y^3=2+ce^{-x^3} \Rightarrow y=\sqrt[3]{2+ce^{-x^3}}$

حل دوم:

$\frac{dy}{dx}=2\frac{x^2}{y^2}-x^2y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x^2(\frac{2}{y^2}-y) \Rightarrow \frac{y^2}{2-y^3}dy=x^2dx$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} -\frac{1}{3}\ln(2-y^3)=\frac{x^3}{3}+c \Rightarrow \ln(2-y^3)=-x^3-3c \Rightarrow$

$2-y^3=e^{-x^3}e^{-3c} \Rightarrow 2-y^3=-Ce^{-x^3} \quad ;(e^{-3c}=-C) \Rightarrow$

$y^3=2+Ce^{-x^3} \Rightarrow y=\sqrt[3]{2+Ce^{-x^3}}$

راهنمایی.

$\int\frac{y^2}{2-y^3}dy=-\frac{1}{3}\int\frac{-3y^2}{2-y^3}dy \xrightarrow{\int\frac{u'}{u}dx=\ln u+c} \int\frac{y^2}{2-y^3}dy=-\frac{1}{3}\ln(2-y^3)$

۱۰۰ـ گزینه «۳»

$y(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1})dx+(\ln x+\tan^{-1}x)dy=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}}{\ln x+\tan^{-1}x})dx$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \ln y=-\int(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}}{\ln x+\tan^{-1}x})dx \xrightarrow{\int\frac{u'}{u}dx=\ln c(u)} \ln y=-\ln c(\ln x+\tan^{-1}x) \Rightarrow$

$\ln y=\ln\frac{1}{c(\ln x+\tan^{-1}x)} \Rightarrow y=\frac{1}{c(\ln x+\tan^{-1}x)} \Rightarrow y(\ln x+\tan^{-1}x)=C \quad ;(\frac{1}{c}=C)$

۱۰۱ـ گزینه «۴»

$y'\sin x-y\ln y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y \Rightarrow \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}dy=\int\frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln(\ln y)=\ln(c\tan\frac{x}{2}) \Rightarrow \ln y=c\tan\frac{x}{2}$

$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \ln y(\frac{\pi}{2})=c\tan\frac{\pi}{4} \xrightarrow{y(\frac{\pi}{2})=e} \ln e=c \Rightarrow c=1$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \ln y=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow y=e^{\tan\frac{x}{2}}$

۱۰۲ـ گزینه «۴»

$\int_0^x ty(t)dt=x^2y(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} xy(x)=2xy(x)+x^2y'(x) \Rightarrow -xy=x^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \ln y=-\ln(x)+\ln c \Rightarrow \ln y=\ln(x^{-1})+\ln c \Rightarrow$

$\ln y=\ln\frac{c}{x} \xrightarrow{\ln:\text{ تابعی 1-1 است.}} y=\frac{c}{x} \Rightarrow xy=c$

راهنمایی. با توجه به قضیه مشتق انتگرالی داریم:

$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)\,dt)=f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\int_0^x t\,y(t)\,dt)=x\,y(x)$

۱۰۳ـ گزینه «۲»

$y'=\sin(x-y) \xrightarrow{(x-y=u \Rightarrow y'=1-u')} 1-u'=\sin u \Rightarrow \frac{du}{dx}=1-\sin u \Rightarrow$

$\frac{du}{1-\sin u}=dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \int\frac{du}{1-\sin u}=x+c \Rightarrow \tan u+\sec u=x+c$

$\xrightarrow{u=x-y} \tan(x-y)+\sec(x-y)=x+c$

راهنمایی.

$I=\int\frac{du}{1-\sin u}=\int\frac{1}{1-\sin u}\times\frac{1+\sin u}{1+\sin u}du=\int\frac{1+\sin u}{1-\sin^2u}du=\int\frac{1+\sin u}{\cos^2u}du \Rightarrow$

$I=\int\frac{du}{\cos^2u}+\int\frac{\sin u}{\cos^2u}du \Rightarrow I=\tan u+\frac{1}{\cos u}=\tan u+\sec u$

۱۰۴ـ گزینه «۲»

$(x^2y^2-1)dy+2xy^2dx=0 \xrightarrow{(y=z^\alpha \Rightarrow dy=\alpha z^{\alpha-1}dz)} (x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz+2xz^{2\alpha}dx=0$

$\xrightarrow{\frac{1}{z^{\alpha-1}}\times\text{(معادله)}} \alpha(x^2z^{2\alpha}-1)dz+2xz^{2\alpha+1}dx=0$

لازم به یادآوری است، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول با جملات چند جمله‌ای، همگن است اگر و تنها اگر تمامی جملات آن دارای درجه‌هایی برابر باشند. در اینصورت از آنجائیکه درجه جمله $P(x)=1$ برابر صفر است، درجه سایر جملات نیز باید برابر صفر شود.

بنابراین با توجه به اینکه درجه جملات $x^{2}z^{2\alpha}$ و $xz^{2\alpha+1}$ در معادله دیفرانسیل حاصل، برابر $2\alpha+2$ می‌باشد، داریم:

$$2\alpha+2=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۵ـ گزینه «۴» معادله دیفرانسیل $y'=\frac{x+y-2}{3x+2y-5}$ ، یک معادله با دو متغیر خطی است:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}} (\alpha=1 \ \& \ \beta=1) \qquad \text{(مختصات محل تلاقی)}$$

در اینصورت معادله دیفرانسیل مفروض با تغییر متغیر $\begin{cases} x=X+\alpha=X+1 \\ y=Y+\beta=Y+1 \end{cases}$ و یا به عبارت دیگر $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases}$ معادله دیفرانسیل مفروض به معادله دیفرانسیل همگن $Y'=\frac{X+Y}{3X+2Y}$ تبدیل می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۶ـ گزینه «۱»

$$x(x^{2}+3y^{2})dx+y(y^{2}+3x^{2})dy=0 \xrightarrow{\Delta=Q_x-P_x} \Delta=6xy-6xy=0$$

$$\xrightarrow{\text{با حذف جملات شامل } x \text{ در } Q \text{ ؛کامل}} (x^{3}+3xy^{2})dx+y^{3}dy=0 \xrightarrow{\int \text{(معادله حاصل)}} \frac{x^{4}}{4}+3y^{2}\frac{x^{2}}{2}+\frac{y^{4}}{4}+c=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^{4}+6x^{2}y^{2}+y^{4}=C \quad ;(-4c=C)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۷ـ گزینه «۲»

$$(2y\sin x+3y^{4}\sin x\cos x)dx-(4y^{3}\cos^{2}x+\cos x)dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=8y^{3}\cos x\sin x+\sin x-(2\sin x+12y^{3}\sin x\cos x) \quad \Rightarrow \quad \Delta=-\sin x-4y^{3}\sin x\cos x\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{-\sin x(1+4y^{3}\cos x)}{\cos x(4y^{3}\cos x+1)}=-\tan x=a(x) \quad \Rightarrow$$

$$\mu(x)=e^{\int -\tan x\,dx}=e^{\ln\cos x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x)=\cos x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۸ـ گزینه «۳»

$$y\,dx+(x+yx^{3}(1+\ln y))\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=(1+3x^{3}y(1+\ln y))-1=3x^{3}y(1+\ln y)\neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع سوم}} \frac{\Delta}{xP-yQ}=\frac{3x^{3}y(1+\ln y)}{xy-yx-y^{3}x^{3}(1+\ln y)}=\frac{3}{xy}=a(z) \quad ;(z=xy)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۹ـ گزینه «۳»

$$y'+\frac{2}{x\ln x}y=4x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int\frac{2}{x\ln x}dx}$$

راهنمایی.

$$\int\frac{2}{x\ln x}dx=2\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx \xrightarrow{\int\frac{u'}{u}dx=\ln u} \int\frac{2}{x\ln x}dx=2\ln(\ln x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۰ـ گزینه «۱»

$$y(\frac{dy}{dx})^{2}+2x(\frac{dy}{dx})-y=0 \quad \Rightarrow \quad yy'^{2}+2xy'-y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{y-yy'^{2}}{y'} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{y}{y'}-yy'$$

معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول ـ حالت سوم است. در اینصورت؛

$$2x=\frac{y}{y'}-yy' \xrightarrow{y'\mapsto P} 2x=\frac{y}{P}-yP \xrightarrow{\frac{d}{dy}\text{ (طرفین)}} 2\frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}+y\times-\frac{1}{P^{2}}\frac{dP}{dy}-P-y\frac{dP}{dy}$$

$$\xrightarrow{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{P}} \frac{2}{P}=\frac{1}{P}-P-y(\frac{1}{P^{2}}+1)\frac{dP}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}+P=-y(\frac{1}{P^{2}}+1)\frac{dP}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+P^{2}}{P}=-\frac{y}{P}(\frac{1+P^{2}}{P})\frac{dP}{dy}$$

با توجه به تساوی حاصل، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض با فرض $P\neq 0$ بدست می‌آید:

$$\xrightarrow{\frac{P}{1+P^{2}}\times\text{(معادله)}} 1=\frac{-y}{P}\frac{dP}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-\frac{dP}{P}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{؛ جدا شونده}} \ln y=-\ln(P)+\ln c \quad \Rightarrow \quad \ln y=\ln\frac{c}{P} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{c}{P}$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض به صورت پارامتری زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} 2x=\frac{y}{P}-yP \\ y=\frac{c}{P} \end{cases}$$

که در آن با حذف پارامتر P، جواب صریح بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 2x=\frac{y}{P}-yP \\ P=\frac{c}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{y}{(\frac{c}{y})}-y.\frac{c}{y} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{y^{2}}{c}-c$$

معادله حاصل یک سهمی افقی است، و از آنجائیکه با تبدیل $y\mapsto -y$ ، معادله سهمی مذکور، تغییر نمی‌کند، بنابراین محور x ها تقارن آن است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۱ـ گزینه «۳» معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله درجه دوم نسبت به متغیر y' است که قابل تجزیه نیز می‌باشد:

$$y'^{۲}+(y-۱)y'-y=۰ \quad \Rightarrow \quad y'^{۲}+yy'-y'-y=y'(y'+y)-(y'+y)=۰ \quad \Rightarrow$$

$$(y'+y)(y'-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y'-۱=۰ \Rightarrow y=x+c \Rightarrow \boxed{y-x+C=۰} \ ;(-c=C) \\ y'+y=۰ \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=-dx \Rightarrow \operatorname{Ln} y=-x+c \Rightarrow y=e^{-x+c}=e^{-x}\times e^{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ y=Ce^{-x} \ ;(e^{c}=\overline{C}) \Rightarrow \boxed{y-\overline{C}e^{-x}=۰}$$

در اینصورت از آنجائیکه صحیح‌تر است، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب یک پارامتر ارائه شود، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض با ضابطه $(y-x+c)(y-ce^{-x})=۰$ بیان می‌گردد.

۱۱۲ـ گزینه «۴»

$$y'=\frac{y-x}{y-x-۱} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{y-x}{(y-x)-۱} \xrightarrow{(y-x=u \ \Rightarrow \ y'=u'+۱)} u'+۱=\frac{u}{u-۱} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{u}{u-۱}-۱ \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{۱}{u-۱} \quad \Rightarrow \quad (u-۱)du=dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \frac{u^{۲}}{۲}-u=x+c$$

$$\xrightarrow{u=y-x} \frac{(y-x)^{۲}}{۲}-(y-x)=x+c \quad \Rightarrow \quad \frac{(y-x)^{۲}}{۲}=y+c$$

۱۱۳ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، به دلیل حضور عبارت yy' غیرخطی و از آنجائیکه $f(x)=\cos x$ مخالف صفر است، غیرهمگن نیز می‌باشد.

یادآوری. معادله دیفرانسیل با نمایش عمومی $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-۱}(x)y^{(n-۱)}+\cdots+a_۱(x)y'+a_۰(x)y=f(x)$، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n نامیده می‌شود.

لازم بذکر است، معمولاً اصطلاح همگن، برای معادلات دیفرانسیل خطی بکارگرفته می‌شود.

۱۱۴ـ گزینه «۲» معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دارای نمایشی بصورت $a_۲(x)\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+a_۱(x)\dfrac{dy}{dx}+a_۰(x)y=f(x)$ است.

در نتیجه؛ $m=۱$.

۱۱۵ـ گزینه «۴»

معادله دیفرانسیل مفروض معمولی است. $\Rightarrow$ u تابعی یک متغیره برحسب t است.

معادله دیفرانسیل مفروض از مرتبه ۳ است. $\Rightarrow$ بالاترین مرتبه مشتق حاضر، ۳ است.

و با توجه به نمایش معادله دیفرانسیل خطی و اینکه $f(t)=e^{t}\neq ۰$ است، یک معادله خطی غیرهمگن نیز می‌باشد.

۱۱۶ـ گزینه «۱»

$$y''=f(x)(۱+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}} \quad \Rightarrow \quad y''^{\frac{۲}{۳}}=(f(x))^{\frac{۲}{۳}}(۱+y'^{۲})$$

در اینصورت، معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه دوم از درجه $\frac{۲}{۳}$ است. از نمایش عمومی معادلات دیفرانسیل خطی تبعیت نمی‌کند، بنابراین خطی نیست. عبارت سمت راست غیر صفر دارد، در نتیجه غیرهمگن است.

۱۱۷ـ گزینه «۳»

$$y=cx^{۲}+d \xrightarrow{\text{حذف ثابتها بکمک مشتقگیری}} (y'=۲cx \quad \& \quad y''=۲c) \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y''}=x \quad \Rightarrow \quad xy''-y'=۰$$

۱۱۸ـ گزینه «۳» فرض کنید معادله دیفرانسیل مفروض دارای جواب است. در اینصورت؛

$$|y'|+|y|=۰ \xrightarrow{x=۰} |y'(۰)|+|y(۰)|=۰ \xrightarrow{y(۰)=۱} |y'(۰)|=-۱$$

که تساوی فوق غیرممکن است.

۱۱۹ـ گزینه «۴»

$$y'=\frac{y+x}{x} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{y}{x}+۱ \quad \Rightarrow \quad y'-\frac{۱}{x}y=۱$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{\int -\frac{۱}{x}dx}=e^{-\operatorname{Ln} x}=\frac{۱}{x} \quad \&$$

$$y(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}\left\{\int \frac{۱}{x}\times ۱\,dx+c\right\} \quad \Rightarrow \quad y(x)=x(\operatorname{Ln} x+c) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} y(x)=\lim_{x\to ۰^{+}} x(\operatorname{Ln} x+c)=\lim_{x\to ۰^{+}} x\operatorname{Ln} x=۰$$

راهنمایی.

$$\lim_{x\to ۰^{+}} x\operatorname{Ln} x=\lim_{x\to ۰^{+}} \frac{\operatorname{Ln} x}{\frac{۱}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۰^{+}} x\operatorname{Ln} x=\lim_{x\to ۰^{+}} \frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{۱}{x^{۲}}}=\lim_{x\to ۰^{+}} (-x)=۰$$

۱۲۰ـ گزینه «۱»

$$x^{۲}dy=(xy-y^{۲})dx \quad \Rightarrow \quad x^{۲}\frac{dy}{dx}=xy-y^{۲} \quad \Rightarrow \quad y'-\frac{۱}{x}y=-\frac{۱}{x^{۲}}\times y^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-۲};\ \text{برنولی}} y^{-۲}y'-\frac{۱}{x}y^{-۱}=-\frac{۱}{x^{۲}} \xrightarrow{y^{-۱}=u \ \Rightarrow \ y^{-۲}y'=-u'} -u'-\frac{۱}{x}u=-\frac{۱}{x^{۲}} \quad \Rightarrow \quad u'+\frac{۱}{x}u=\frac{۱}{x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{\int \frac{۱}{x}dx}=e^{\operatorname{Ln} x}=x \quad \&$$

$$u(x)=\frac{۱}{x}\left\{\int x\times\frac{۱}{x^{۲}}dx+c\right\} \ \Rightarrow \ u(x)=\frac{۱}{x}(\operatorname{Ln} x+c) \xrightarrow{u=y^{-۱}} \frac{۱}{y(x)}=\frac{\operatorname{Ln} x+c}{x} \ \Rightarrow \ y(x)=\frac{x}{\operatorname{Ln} x+c}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱)=c \xrightarrow{y(۱)=۱} c=۱ \xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=e \ \& \ c=۱) \text{ در جواب عمومی}} y(c)=\frac{c}{\operatorname{Ln} e+۱} \quad \Rightarrow \quad y(e)=\frac{e}{۲}$$

۱۲۱ـ گزینه «۱»

$$y'=xe^{x^{۲}-y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=xe^{x^{۲}}e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^{y}dy=xe^{x^{۲}}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{; جدا شونده}} e^{y}=\int xe^{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int (۲x)e^{x^{۲}}dx \quad \Rightarrow \quad e^{y}=\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}+c \quad \Rightarrow \quad ۲e^{y}-ce^{x^{۲}}=C \ ;(۲c=C)$$

۱۲۲ـ گزینه «۱»

$$y' = y\tan 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\tan 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (\tan 2x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ ; جدا شونده)}} \ln y = \int \tan 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + \ln c \quad \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln|\cos 2x|^{-\frac{1}{2}} + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln\frac{c}{\sqrt{|\cos 2x|}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{\sqrt{|\cos 2x|}} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=0} y(0) = c \xrightarrow{y(0)=2} c = 2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی; } (x=\pi \ \& \ c=2)} y(\pi) = \frac{2}{\sqrt{|\cos 2\pi|}} \quad \Rightarrow \quad y(2) = 2$$

۱۲۳ـ گزینه «۳»

$$yy' = (1+y^2)x^2 \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = (1+y^2)x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1+y^2}dy = x^2dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ : جدا شونده)}} \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \frac{x^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{x^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad \ln(y^2+1) = \frac{2x^3}{3} + 2c \quad \Rightarrow$$

$$y^2 + 1 = e^{\frac{2}{3}x^3 + 2c} \quad \Rightarrow \quad y^2 + 1 = Ce^{\frac{2}{3}x^3} \quad ;(e^{2c} = C) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=0} (y(0))^2 + 1 = c \xrightarrow{y(0)=1} c = 2 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y^2 + 1 = 2e^{\frac{2}{3}x^3} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y^2+1) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{\frac{2}{3}x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}(y^2+1) = 0$$

که تساوی آخر غیرممکن است.

لازم بذکر است، با توجه به ضابطه جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض، برای حل مسأله فوق هیچ نیازی به شرط اولیه $y(0) = 2$ نیست. در واقع عدم وجود حد، وقتی $x \to -\infty$ میل می‌کند یک خاصیت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض است.

۱۲۴ـ گزینه «۴»

$$y' = 2(6x+3y)^2 - 2 \xrightarrow{(6x+3y=u \Rightarrow y' = \frac{u'-6}{3})} \frac{u'-6}{3} = 2u^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad u' - 6 = 6u^2 - 6 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 6u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = 6dx \xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ ; جدا شونده)}} \frac{-1}{u} = 6x + c \xrightarrow{u=6x+3y} \frac{1}{6x+3y} = -6x - c \quad \Rightarrow$$

$$(6x+3y)(C-6x) = 1 \quad ;(-c = C)$$

۱۲۵ـ گزینه «۲»

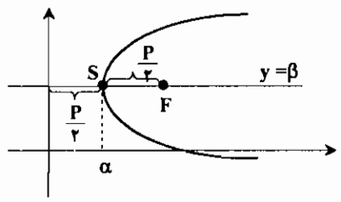
$$yy' = (1+y^2)x^2 \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = (1+y^2)x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1+y^2}dy = x^2dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ : جدا شونده)}} \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{x^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad \ln(1+y^2) = \frac{2}{3}x^3 + 2c \quad \Rightarrow \quad 1+y^2 = e^{\frac{2}{3}x^3 + 2c} \quad \Rightarrow$$

$$1+y^2 = e^{\frac{2}{3}x^3} \times e^{2c} \quad \Rightarrow \quad 1+y^2 = Ce^{\frac{2}{3}x^3} \quad ;(e^{2c} = C) \quad \Rightarrow \quad y^2 = Ce^{\frac{2}{3}x^3} - 1$$

$$\xrightarrow{x=0} (y(0))^2 = C - 1 \xrightarrow{y(0)=1} 1 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y^2 = 2e^{\frac{2}{3}x^3} - 1$$

۱۲۶ـ گزینه «۳» در حالت کلی معادله سهمی که محور تقارن آن خط $y = \beta$ و رأس آن بر نقطه $S(\alpha, \beta)$ واقع باشد، بصورت $(y-\beta)^2 = 4P(x-\alpha)$ خواهد بود. که در آن P پارامتر سهمی است. و از آنجائیکه محور ox محور تقارن آن است، معادله سهمی بصورت $y^2 = 4P(x-\alpha)$ بدست می‌آید که به دو پارامتر دلخواه α و P بستگی دارد.



$$y^2 = 4P(x-\alpha) \xrightarrow{\text{حذف ثابتها بکمک مشتقگیری}} 2yy' = 4P \quad \Rightarrow \quad yy' = 2P \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} y'^2 + yy'' = 0$$

۱۲۷ـ گزینه «۲» با توجه به تساوی $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ می‌توان بدست آورد:

$$d(\tan^{-1}\frac{y}{x}) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$x\,dy - y\,dx = (x^2+y^2)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx = dx \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} d(\tan^{-1}\frac{y}{x}) = dx \quad \Rightarrow$$

$$d(\tan^{-1}\frac{y}{x} - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y}{x} - x = c \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y}{x} = x + c \quad \Rightarrow \quad y = x\tan(x+c)$$

۱۲۸ـ گزینه «۳»

$$y(1+xy)dx + (1-xy)x\,dy = 0 \xrightarrow{(xy=u \Rightarrow dy = \frac{x\,du - u\,dx}{x^2})} (\frac{u}{x})(1+u)dx + (1-u)x(\frac{x\,du - u\,dx}{x^2}) = 0$$

$$\xrightarrow{x\times(\text{معادله})} u(1+u)dx - u(1-u)dx + (1-u)x\,du = 0 \quad \Rightarrow \quad x(1-u)\,du = -2u^2\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-u}{u^2} = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ ; جدا شونده)}} -\frac{1}{u} - \ln u = -2\ln x + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} = -\ln u + \ln x^2 - c \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u} = \ln\frac{x^2}{u} - c \xrightarrow{u=xy} \frac{1}{xy} = \ln\frac{x}{y} - c \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{x}{y} = \frac{1}{xy} + c$$

۱۲۹ـ گزینه «۲» معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. و از آنجائیکه بالاترین مرتبه مشتقگیری در آن، مرتبه ۳ است، در نتیجه معادله مفروض از مرتبه سوم می‌باشد.

۱۳۰ـ گزینه «۳» تغییر متغیر مفروض، معادله ریکاتی را به یک معادله خطی تبدیل می‌کند. و با توجه به نمایش عمومی معادله ریکاتی $y' + a(x)y = b(x)y^2 + c(x)$ با شرط $b(x) \neq 0$ & $c(x) \neq 0$ تنها گزینه (۳) صحیح است:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{4x^2}y^2 + x^3$$

۱۳۱ـ گزینه «۲»

$$y' = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y \Rightarrow \frac{dx}{dy} - (\cos y)x = \sin 2y$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } x \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int -\cos y\, dy} = e^{-\sin y} \quad \&$$

$$x(y) = \frac{1}{e^{-\sin y}}\left\{\int e^{-\sin y} \times \sin 2y\, dy + c\right\} = e^{\sin y}\left\{\int 2\sin y \cos y\, e^{-\sin y}\, dy + c\right\} \Rightarrow$$

$$x = c^{\sin y}(2(-\sin y - 1)c^{-\sin y} + c) \Rightarrow x = -2\sin y - 2 + ce^{\sin y}$$

راهنمایی.

$$I = \int \sin y \cos y\, c^{-\sin y} dy + c \xrightarrow{-\sin y = u \Rightarrow \cos y\, dy = -du} I = \int u e^u\, du = (u-1)e^u$$

$$\xrightarrow{u = -\sin y} I = (-\sin y - 1)e^{-\sin y}$$

۱۳۲ـ گزینه «۱» حل اول:

$$x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2} \xrightarrow{y'\times(\text{معادله})} xy' = y + \frac{1}{y'} \Rightarrow y = xy' - \frac{1}{y'}$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل کلرو نسبت به y بر حسب x است، که برای محاسبه جواب عمومی آن کافیست $y' \mapsto P$ جایگذاری شود:

$$\xrightarrow{y' \mapsto P} y = xP - \frac{1}{P} \Rightarrow x = \frac{1}{P}y + \frac{1}{P^2} \Rightarrow x = cy + c^2 \qquad ;(\frac{1}{P} = c)$$

حل دوم:

$$x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2} \xrightarrow{y' = \frac{1}{x'}} x = yx' + x'^2$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل کلرو نسبت به x بر حسب y است، که برای محاسبه جواب عمومی آن کافیست $x' \mapsto P$ جایگذاری شود:

$$\xrightarrow{x' \mapsto P} x = Py + P^2$$

۱۳۳ـ گزینه «۱» با توجه به تساوی $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ می‌توان بدست آورد:

$$d(\text{Ln}(x^2+y^2)) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy \qquad ;(*)$$

در اینصورت؛

$$(x^2+y^2+x)dx + y\,dy = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)dx + x\,dx + y\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{x^2+y^2}\times(\text{معادله})} dx + (\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy) = 0 \xrightarrow{\text{تساوی }(*)} \frac{1}{2}d(\text{Ln}(x^2+y^2)) + dx = 0 \Rightarrow$$

$$d(\text{Ln}(x^2+y^2) + 2x) = 0 \Rightarrow \text{Ln}(x^2+y^2) + 2x = c$$

۱۳۴ـ گزینه «۱» با توجه به تساوی $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ می‌توان بدست آورد:

$$d(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \qquad ;(*)$$

در اینصورت؛

$$yy' = -x + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y\,dy + x\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times(\text{معادله})} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx = dx \xrightarrow{\text{تساوی }(*)} d(\sqrt{x^2+y^2}) = dx \Rightarrow$$

$$d(\sqrt{x^2+y^2} - x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x + c \Rightarrow x^2+y^2 = x^2 + c^2 + 2cx \Rightarrow y^2 = 2cx + c^2$$

۱۳۵ـ گزینه «۳» با توجه به ضابطه $f(t,x) = x^{\frac{2}{3}}$، تابع $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیست، در اینصورت از قضیه وجود یکتایی جواب (قضیه پیکار) نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

همانگونه که ملاحظه می‌کنیم $x = 0$، یک جواب مسأله مقدار اولیه مفروض است. برای یافتن جوابهای دیگر:

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = dt \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شوند}} 3x^{\frac{1}{3}} = t + c \Rightarrow x(t) = (\frac{t+c}{3})^3 \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{t=0} x(0) = (\frac{c}{3})^3 \xrightarrow{x(0)=0} c = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} x(t) = (\frac{t}{3})^3$$

بنابراین جواب دوم مسأله مقدار اولیه مفروض نیز محاسبه گردید.

برای تعیین جوابهای دیگر، ابتدا به ازاء هر جوابی از معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}}$ که در شرط اولیه $x(b) = 0$ صدق کند، را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری شرط $x(b) = 0$ در جواب عمومی حاصل، جوابهای خصوصی مورد نظر برای هر $b > 0$، بصورت $x = (\frac{t}{3} - \frac{b}{3})^3$ محاسبه می‌شوند.

بسادگی می‌توان بررسی کرد، هر کدام از جوابهای معادله دیفرانسیل مفروض، با شرط اولیه $x(b)=0$ ؛ $0<b<a$، جواب خصوصی با شرط آغازین $x(0)=0$ را قطع می‌کنند. این دسته از جوابها را به مفهوم زیر بهم می‌چسبانیم:

$$\theta_b(t)=\begin{cases}0 & ;t<b\\ (\frac{t-b}{3})^3 & ;t\geq b\end{cases}$$

در اینصورت به ازاء هر $0<b<a$ تابع $x=\theta_b(t)$، تابعی مشتقپذیر است که در مسأله مقدار اولیه $x(0)=0$ ؛ $\frac{dx}{dt}=x^{\frac{2}{3}}$ نیز صدق می‌کند. در نتیجه مسأله مفروض بی‌شمار جواب در فاصله $[0,a]$ دارد.

۱۳۶ـ گزینه «۳» دو دسته منحنی ۱ـ پارامتری بر هم عمودند، اگر حاصلضرب شیب‌های آنها برابر مقدار ۱ـ شود. در اینصورت ابتدا به محاسبه شیب دسته منحنی‌های مفروض می‌پردازیم:

$$1)\ x^n+y^n=a \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} nx^{n-1}+ny'y^{n-1}=0 \Rightarrow y'_1=-\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

$$2)\ y=\frac{x}{1-bx} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} y'=\frac{1}{(1-bx)^2} \xrightarrow{\frac{1}{1-bx}=\frac{y}{x}} y'_2=(\frac{y}{x})^2$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\text{شرط تعامد}} y'_1\times y'_2=-1 \Rightarrow -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}\times\frac{y^2}{x^2}=-1 \Rightarrow n=3$$

۱۳۷ـ گزینه «۲»

$$x^3y^3(2y\,dx+x\,dy)-(5y\,dx+7x\,dy)=0 \Rightarrow (2x^3y^4-5y)dx+(x^4y^3-7x)dy=0$$

$$\xrightarrow{x^my^n\times\text{(معادله)}} (2x^{m+3}y^{n+4}-5x^my^{n+1})dx+(x^{m+4}y^{n+3}-7x^{m+1}y^n)dy=0$$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\Delta=Q_x-P_y=(m+4)x^{m+3}y^{n+3}-7(m+1)x^my^n-(2(n+4)x^{m+3}y^{n+3}-5(n+1)x^my^n)=0 \Rightarrow$$

$$(m-2n-4)x^{m+3}y^{n+3}+(-7m+5n-2)x^my^n=0 \Rightarrow \begin{cases}m-2n=4\\ -7m+5n=2\end{cases} \Rightarrow m=\frac{-8}{3}\ \&\ n=\frac{-10}{3}$$

۱۳۸ـ گزینه «۳»

$$y'+2x=\sin\pi x \Rightarrow y'=\sin\pi x-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(\sin\pi x-2x) \Rightarrow$$

$$dy=(\sin\pi x-2x)\,dx \xrightarrow{\int\text{ (طرفین) حداشونده}} y(x)=\frac{-1}{\pi}\cos\pi x-x^2+c \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=1} y(1)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi-1+c \xrightarrow{y(1)=4} 4=+\frac{1}{\pi}-1+c \Rightarrow c=5-\frac{1}{\pi}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری}(c=5-\frac{1}{\pi}\text{ در جواب عمومی})\ \&\ x=-1} y(-1)=-\frac{1}{\pi}\cos(-\pi)-1+5-\frac{1}{\pi} \Rightarrow y(-1)=+\frac{1}{\pi}+4-\frac{1}{\pi} \Rightarrow y(-1)=4$$

۱۳۹ـ گزینه «۲» با توجه به شکل گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را به صورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ در نظر می‌گیریم:

$$y^2(1-x^2)dx+(x^3y+2x^2+xy)dy=0 \Rightarrow (y^2-y^2x^2)dx+(x^3y+2x^2+xy)dy=0$$

$$\xrightarrow{x^\alpha y^\beta\times\text{(معادله)}} (x^\alpha y^{\beta+2}-y^{\beta+2}x^{\alpha+2})dx+(x^{\alpha+3}y^{\beta+1}+2x^{\alpha+2}y^\beta+x^{\alpha+1}y^{\beta+1})dy=0$$

طبق تعریف عامل انتگرالساز، معادله حاصل کامل است. بنابراین:

$$\Delta=Q_x-P_y=((\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta+(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1})$$

$$-((\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}-(\beta+2)y^{\beta+1}x^{\alpha+2})=0 \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta+5)x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta+(\alpha-\beta-1)x^\alpha y^{\beta+1}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+5=0\\ \alpha+2=0\\ \alpha-\beta-1=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=-2\ \&\ \beta=-3 \xrightarrow{\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta} \mu(x,y)=x^{-2}y^{-3}$$

۱۴۰ـ گزینه «۲»

$$y'+(3x^2)y=6x^2 \xrightarrow{\text{معادله خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int(3x^2)dx}=e^{x^3}$$

$$y=\frac{1}{e^{x^3}}\{\int e^{x^3}\times 6x^2dx+c\}=e^{-x^3}\{2\int(3x^2)e^{x^3}dx+c\}=e^{-x^3}(2e^{x^3}+c) \Rightarrow$$

$$y=2+ce^{-x^3} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}(2+ce^{-x^3}) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}y=2$$

۱۴۱ـ گزینه «۲»

$$yy''+y'^2=0 \xrightarrow{yy''+y'^2=d(yy')} d(yy')=0 \Rightarrow yy'=c_1 \Rightarrow y\frac{dy}{dx}=c_1$$

$$y\,dy=c_1dx \xrightarrow{\int\text{ (طرفین) جداشونده}} \frac{y^2}{2}=c_1x+c_2 \Rightarrow y^2(x)=2c_1x+2c_2 \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x=0} y^2(0)=0+2c_2 \xrightarrow{y(0)=0} 0=2c_2 \Rightarrow c_2=0\\ \xrightarrow{x=1} y^2(1)=2c_1+2c_2 \xrightarrow{y(1)=1} 1=2c_1+2c_2 \quad c_2=0 \to c_1=\frac{1}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y^2=x$$

لازم بذکر است، بدون محاسبه ثابتها، نیز می‌توانستیم حکم مسأله را تعیین کنیم.

۱۴۲ـ گزینه «۳»

$$xy' + 2y = -\frac{1}{x} \xrightarrow{\frac{1}{x}\times(\text{معادله})} y' + \frac{2}{x}y = -\frac{1}{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2 \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left\{\int x^2 \times -\frac{1}{x^2}\,dx + c\right\} = \frac{1}{x^2}(-x + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=1} y(1) = -1 + c \xrightarrow{y(1)=2} c = 3$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی : } (c=3 \ \& \ x=2)} y(2) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad y(2) = \frac{1}{4}$$

۱۴۳ـ گزینه «۲»

$$(3x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{گام اول}} \Delta = Q_x - P_y = (2xy - 1) - 1 = 2xy - 2 \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{2xy - 2}{-(x^2y - x)} = \frac{2(xy-1)}{-x(xy-1)} = -\frac{2}{x} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

۱۴۴ـ گزینه «۴» حل اول:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)} \quad \Rightarrow \quad 4y\,dx - x(y-3)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{xy}\times(\text{معادله})} \frac{4}{x}dx - \frac{y-3}{y}dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{x}dx + (\frac{3}{y} - 1)\,dy = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، طبق تعریف فاکتور انتگرال، کامل است. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} \frac{4}{x}dx + (\frac{3}{y} - 1)\,dy = 0 \xrightarrow{\int(\text{طرفین})} \int(\frac{4}{x}dx + (\frac{3}{y} - 1)\,dy) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4\ln x + 3\ln y - y + \ln c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln x^4 + \ln y^3 + \ln c \quad \Rightarrow \quad y = \ln(c x^4 y^3)$$

حل دوم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{y}dy = 4\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\int(\text{طرفین}),\ \text{جدا شونده}} y - 3\ln y = 4\ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad y = \ln y^3 + \ln x^4 + \ln c \quad \Rightarrow \quad y = \ln(c x^4 y^3)$$

۱۴۵ـ گزینه «۴»

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^4 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = x^2 \times y^4 \xrightarrow{y^{-4}\times(\text{معادله}) \ ;\ \text{برنولی}} y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-3} = x^2$$

$$\xrightarrow{y^{-3} = u \ \Rightarrow\ y^{-4}y' = -\frac{u'}{3}} -\frac{u'}{3} + \frac{1}{x}u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{3}{x}u = -3x^2$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3} \quad \&$$

$$u = \frac{1}{x^{-3}}\left\{\int x^{-3} \times -3x^2\,dx + c_1\right\} = x^3(-3\int\frac{dx}{x} + c) = x^3(-3\ln x + c_1) \quad \Rightarrow$$

$$u = x^3(-3\ln x + 3\ln c) \quad ;(c_1 = 3\ln c) \quad \Rightarrow \quad u = x^3(3\ln\frac{c}{x}) = 3x^3\ln\frac{c}{x}$$

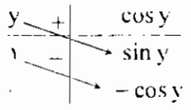
$$\xrightarrow{u=y^{-3}} y^{-3} = 3x^3\ln\frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad y^3 = \frac{1}{3x^3\ln\frac{c}{x}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\frac{c}{x}}}$$

۱۴۶ـ گزینه «۴»

$$yy' = -2x\sec y \quad \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = -2x\sec y \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sec y}dy = -2x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$y\cos y\,dy = -2x\,dx \xrightarrow{\int(\text{طرفین}),\ \text{جداشونده}} \int y\cos y\,dy = -x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y\sin y + \cos y = -x^2 + c$$

راهنمایی. با انتگرالگیری به روش جزء به جزء داریم:



$$\Rightarrow \quad \int y\cos y\,dy = y\sin y + \cos y$$

۱۴۷ـ گزینه «۲»

$$y\,dx + x(x^2y - 1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3y}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -x^3$$

$$\xrightarrow{x^{-3}\times(\text{معادله}) \ ;\ \text{برنولی نسبت به } x} x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-2} = -1 \xrightarrow{x^{-2} = u \ \Rightarrow\ -2x^{-3}\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}} -\frac{1}{2}\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{2}{y}u = 2 \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2 \quad \&$$

$$u(y) = \frac{1}{y^2}\left\{\int y^2 \times (2)\,dy + c\right\} = \frac{1}{y^2}(\frac{2y^3}{3} + c) \xrightarrow{u=x^{-2}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2}(\frac{2}{3}y^3 + c) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2}{3}y^3 + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2x^2} = \frac{y^3}{3} + 2c \quad \Rightarrow \quad -\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3} = C \quad ;(-2c = C)$$

۱۴۸ـ گزینه «۳»

$$y' = \frac{x - y}{x + y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y} \quad \Rightarrow \quad (x - y)dx - (x + y)dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = -1 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q \text{ ، کامل}} (x - y)dx - y\,dy = 0 \xrightarrow{\text{معادله حاصل}\ \int} \frac{x^2}{2} - yx - \frac{y^2}{2} + c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = C \quad ;(-2c = C)$$

۱۴۹ـ گزینه «۴»

$$a\frac{dx}{dt}+x=A\sin\omega t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt}+\frac{1}{a}x=\frac{A}{a}\sin\omega t$$

$\xrightarrow{\text{خطی مرتبه اول نسبت به } x \text{ بر حسب } t}$ $\mu(t)=e^{\int\frac{1}{a}dt}=e^{\frac{1}{a}t}$

$$x(t)=\frac{1}{e^{\frac{t}{a}}}\left\{\int e^{\frac{t}{a}}\times\frac{A}{a}\sin\omega t\,dt+c\right\}=e^{-\frac{t}{a}}\left\{\frac{A}{a}\int e^{\frac{t}{a}}\sin\omega t\,dt+c\right\}\quad\Rightarrow$$

$$x=\frac{A}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int e^{\frac{t}{a}}\sin\omega t\,dt+ce^{-\frac{t}{a}}\qquad\text{(جواب عمومی)}$$

که با توجه به حضور جمله $ce^{-\frac{t}{a}}$ در جواب عمومی، تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

۱۵۰ـ گزینه «۱»

$xy=C$ $\xrightarrow{\text{حذف C بکمک مشتقگیری : گام اول}}$ $y=xy'=0$ $\xrightarrow{y'\mapsto-\frac{1}{y'};\ \text{گام دوم}}$ $y+x(-\frac{1}{y'})=0 \quad\Rightarrow$

$$y=x\frac{dx}{dy}\quad\Rightarrow\quad y\,dy=x\,dx\ \xrightarrow{\int\text{(طرفین)}:\ \text{جدا شونده}}\ \frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c\quad\Rightarrow\quad y^2-x^2=C\qquad;(2c=C)$$

۱۵۱ـ گزینه «۳»

$(3x^2e^y+2xy)dx+(x^3e^y+x^2)dy=0$ $\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_x}$ $\Delta=3x^2e^y+2x-(3x^2e^y+2x)=0$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q\ :\ \text{کامل}}$ $(3x^2e^y+2xy)dx=0$ $\xrightarrow{\int\text{(معادله حاصل)}}$ $e^y\times x^3+y\times x^2+c=0$

۱۵۲ـ گزینه «۴»

$$(1+y^2)dx=(\tan^{-1}y-x)dy\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{dy}=\frac{\tan^{-1}y-x}{1+y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y^2}x=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

معادله حاصل یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به x بر حسب y است.

۱۵۳ـ گزینه «۴»

$\xrightarrow{\text{حذف c بکمک مشتقگیری : گام اول}}$ $(y=ce^{3x}\quad\Rightarrow\quad y'=3ce^{3x})\quad\Rightarrow\quad\frac{y}{y'}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad y'=3y$

$\xrightarrow{y'\mapsto-\frac{1}{y'}\ :\ \text{گام دوم}}$ $-\frac{1}{y'}=3y\quad\Rightarrow\quad-\frac{dx}{dy}=3y\quad\Rightarrow\quad3y\,dy=-dx$

$\xrightarrow{\int\text{(طرفین)}\ ;\ \text{جدا شونده}}$ $3\frac{y^2}{2}=-x+c$ $\xrightarrow{\text{از نقطه } (x=1\ \&\ y=2) \text{ می‌گذرد}}$ $\frac{3}{2}\times4=-1+c\quad\Rightarrow\quad c=7$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}}$ $\frac{3}{2}y^2=-x+7\quad\Rightarrow\quad3y^2+2x=14$

۱۵۴ـ گزینه «۲» معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول ـ حالت دوم است:

$4y=8xy'+8x^2+y'^2$ $\xrightarrow{y'\mapsto P}$ $\boxed{4y=8xP+8x^2+P^2}$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{(طرفین)}}$ $4\frac{dy}{dx}=8P+8x\frac{dP}{dx}+16x+2P\frac{dP}{dx}$ $\xrightarrow{\frac{dy}{dx}=y'=P}$ $4P=8P+16x+(8x+2P)\frac{dP}{dx}\quad\Rightarrow$

$$4(4x+P)+2(4x+P)\frac{dP}{dx}=0\quad\Rightarrow\quad(4x+P)(2+\frac{dP}{dx})=0$$

در اینصورت جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض با توجه به معادله $4x+P=0$ و از حل دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}4x+P=0\\4y=8xP+8x^2+P^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=-4x\\4y=8xP+8x^2+P^2\end{cases}\Rightarrow\quad4y=8x(-4x)+8x^2+(-4x)^2\quad\Rightarrow$$

$$4y=-8x^2\quad\Rightarrow\quad y+2x^2=0$$

۱۵۵ـ گزینه «۱» با توجه به تساوی $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ بدست می‌آوریم:

$$d(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\qquad;(1)$$

در اینصورت؛

$x\,dx+(y-\sqrt{x^2+y^2})\,dy=0$ $\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\text{(طرفین)}}$ $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy-dy=0$

$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}$ $d(\sqrt{x^2+y^2})-dy=0\quad\Rightarrow\quad d(\sqrt{x^2+y^2}-y)=0\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x^2+y^2}-y=c\quad\Rightarrow$

$$x^2+y^2=(y+c)^2\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=y^2+2cy+c^2\quad\Rightarrow\quad x^2=2cy+c^2$$

۱۵۶ـ گزینه «۴» با توجه شکل گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را بصورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ در نظر می‌گیریم:

$(y^2+xy)\,dx-x^2\,dy=0$ $\xrightarrow{x^\alpha y^\beta\times\text{(معادله)}}$ $(x^\alpha y^{\beta+2}+x^{\alpha+1}y^{\beta+1})\,dx-x^{\alpha+2}y^\beta\,dy=0$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرالساز یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین؛

$$\Delta=Q_x-P_y=-(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta-((\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}+(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta)=0\quad\Rightarrow$$

$$(-\alpha-\beta-3)x^{\alpha+1}y^\beta-(\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\\beta+2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\alpha=-1\quad\&\quad\beta=-2$$

$\xrightarrow{\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta}$ $\mu(x,y)=x^{-1}y^{-2}$

۱۵۷ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}\ \xrightarrow{z=\arcsin x\ \Rightarrow\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz}\qquad;(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{dy}{dz})=-\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\times\frac{dy}{dz}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz})\Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\times\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dz})$$

$$\xrightarrow{\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}\quad;(2)$$

در اینصورت؛

$$(1-x^2)y''-xy'-4y=0$$

$$\xrightarrow{\text{تساویهای (۱) و (۲)}}(1-x^2)(\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2})-x(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz})-4y=0\Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dz}-4y=0\Rightarrow\frac{d^2y}{dz^2}-4y=0$$

◇ ◇ ◇ ◇

۱۵۸ـ گزینه «۲» حل اول:

$$y=Ae^x+Bxe^x\xrightarrow{\text{حذف ثابتها}}\begin{cases}y'=Ae^x+Be^x+Bxe^x\\y''=Ae^x+2Be^x+Bxe^x\end{cases}\xrightarrow{Ae^x+Bxe^x=y}\begin{cases}y'=y+Be^x\\y''=y+2Be^x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y'-y=Be^x\\y''-y=2Be^x\end{cases}\Rightarrow y''-y=2(y'-y)\Rightarrow y''-2y'+y=0$$

حل دوم: هر چهار گزینه ارائه شده، دارای نمایشی بصورت معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرائب ثابت می‌باشند. بنابراین با توجه به حل این دسته از معادلات و با توجه به اینکه جواب عمومی، بر حسب یک ترکیب خطی از توابع e^x و xe^x بیان شده است داریم:

i) جواب e^x، بیانگر اینست که $m=1$، یک ریشه معادله مشخصه متناظر است.

ii) جواب xe^x، بیانگر اینست که $m=1$، ریشه مضاعف معادله مشخصه متناظر است.

در اینصورت، معادلات شاخصی متناظر، دارای ضابطه‌ای بصورت زیر است:

$$(m-1)^2=0\Rightarrow m^2-2m+1=0$$

و از آنجا، نمایش معادله دیفرانسیل مطلوب، بصورت $y''-2y'+y=0$ بدست می‌آید.

◇ ◇ ◇ ◇

۱۵۹ـ گزینه «۴»

$$e^{\sin x}dy+(y-1)\cos x\,e^{\sin x}dx=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=\cos x\,e^{\sin x}-\cos x\,e^{\sin x}=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q، کامل}}(y-1)\cos x\,e^{\sin x}dx=0\xrightarrow{\text{معادله حاصل}\int}(y-1)\int\cos x\,e^{\sin x}dx=0\Rightarrow$$

$$(y-1)e^{\sin x}+c=0\Rightarrow ye^{\sin x}-e^{\sin x}=C\quad;(-c=C)$$

◇ ◇ ◇ ◇

۱۶۰ـ گزینه «۳»

$$xy'-y=x^2\cos x\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=x\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}}\mu(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}\quad\&$$

$$y(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}\{\int\frac{1}{x}\times x\cos x\,dx+c\}=x(\sin x+c)\Rightarrow y=x\sin x+cx$$

◇ ◇ ◇ ◇

۱۶۱ـ گزینه «۲» حل اول:

$$y'+y=y^2\xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-2};\text{برنولی}}y^{-2}y'+y^{-1}=1\xrightarrow{y^{-1}=u\Rightarrow y^{-2}y'=-u'}-u'+u=1\Rightarrow u'-u=-1$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}}\mu(x)=e^{\int-dx}=e^{-x}\quad\&$$

$$u(x)=\frac{1}{e^{-x}}\{\int e^{-x}\times(-1)\,dx+c\}=e^x(e^{-x}+c)\Rightarrow u=1+ce^x\xrightarrow{u=\frac{1}{y}}\frac{1}{y}=1+ce^x\Rightarrow$$

$$y(x)=\frac{1}{1+ce^x}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}y(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+ce^x}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}y(x)=1$$

حل دوم:

$$y'+y=y^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=y^2-y\Rightarrow\frac{dy}{y^2-y}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}}\int\frac{dy}{y(y-1)}=x+c\Rightarrow\ln\frac{y-1}{y}=x+c\Rightarrow$$

$$\frac{y-1}{y}=Ce^x\quad;(e^c=C)\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{y-1}{y}=C\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{y-1}{y}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}y=1$$

◇ ◇ ◇ ◇

۱۶۲ـ گزینه «۳»

$$(y+x^4)dx-x\,dy=0\Rightarrow x\,dy=(y+x^4)dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y+x^4}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^3$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}}\mu(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}\quad\&$$

$$y(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}\{\int\frac{1}{x}\times x^3dx+c\}=x(\frac{x^3}{3}+c)\Rightarrow y=\frac{x^4}{3}-Cx\quad;(c=-C)$$

◇ ◇ ◇ ◇

۱۶۳ـ گزینه «۱»

$$(x^3+\cos y+\frac{1}{x})dy=(\frac{y}{x^2}-3yx^2)dx\Rightarrow(\frac{y}{x^2}-3yx^2)dx-(x^3+\cos y+\frac{1}{x})dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}(-3x^2+\frac{1}{x^2})-(\frac{1}{x^2}-3x^2)=0$$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}} -(x^۳+\cos y+\frac{۱}{x})dy=۰ \xrightarrow{\int(\text{طرفین})} -(x^۳y+\sin y+\frac{۱}{x}y+c)=۰ \Rightarrow$

$x^۳y+\sin y+\frac{y}{x}=c$

۱۶۴ـ گزینه «۴» حل اول: با توجه به تساوی $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ می‌توان بدست آورد:

$d(\text{Ln}(x^۲+y^۲))=\frac{۲x}{x^۲+y^۲}dx+\frac{۲y}{x^۲+y^۲}dy \quad ;(۱)$

از طرف دیگر؛

$(x^۲+y^۲-x)dx-y\,dy=۰ \xrightarrow{\frac{۱}{x^۲+y^۲}\times(\text{معادله})} (۱-\frac{x}{x^۲+y^۲})dx-\frac{y}{x^۲+y^۲}dy=۰ \Rightarrow$

$dx-\frac{۱}{۲}(\frac{۲x}{x^۲+y^۲}dx+\frac{۲y}{x^۲+y^۲}dy)=۰ \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} dx-\frac{۱}{۲}d(\text{Ln}(x^۲+y^۲))=۰ \Rightarrow$

$d(x-\frac{۱}{۲}\text{Ln}(x^۲+y^۲))=۰ \Rightarrow x-\text{Ln}(x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}=c \Rightarrow x-\text{Ln}\sqrt{x^۲+y^۲}=c$

حل دوم: با توجه به مقدار $\frac{\Delta}{-Q}=\frac{-۲y}{+y}=-۲=a(x)$، می‌توان با محاسبه عامل انتگرال‌ساز متناظر، به حل معادله دیفرانسیل مفروض پرداخت.

۱۶۵ـ گزینه «۲» با توجه به تساوی $df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$ می‌توان بدست آورد:

$d(\text{Arctag}\frac{y}{۲x})=\frac{-\frac{y}{۲x^۲}}{۱+(\frac{y}{۲x})^۲}dx+\frac{\frac{۱}{۲x}}{۱+(\frac{y}{۲x})^۲}dy \Rightarrow d(\text{Arctag}\frac{y}{۲x})=\frac{-۲y}{۴x^۲+y^۲}dx+\frac{۲x}{۴x^۲+y^۲}dy \quad ;(۱)$

از طرف دیگر؛

$xdy-ydx=(۴x^۲+y^۲)dy \xrightarrow{\frac{۱}{۴x^۲+y^۲}\times(\text{معادله})} \frac{x}{۴x^۲+y^۲}dy-\frac{y}{۴x^۲+y^۲}dx=dy \Rightarrow$

$\frac{۱}{۲}(\frac{۲x}{۴x^۲+y^۲}dy+\frac{-۲y}{۴x^۲+y^۲}dx)-dy=۰ \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \frac{۱}{۲}d(\text{Arctag}\frac{y}{۲x})-dy=۰ \Rightarrow$

$d(\frac{۱}{۲}\text{Arctag}\frac{y}{۲x}-y)=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\text{Arctag}\frac{y}{۲x}-y=c$

۱۶۶ـ گزینه «۱» حل اول: معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله دیفرانسیل همگن از درجه ۲ است:

$(x^۲+۳y^۲)dx-۲xy\,dy=۰ \xrightarrow{\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=xdu+udx} (x^۲+۳x^۲u^۲)dx-۲x^۲u(xdu+udx)=۰ \Rightarrow$

$\xrightarrow{\frac{۱}{x}\times(\text{معادله})} (۱+۳u^۲)dx-۲uxdu-۲u^۲dx=۰ \Rightarrow (۱+u^۲)dx=۲xudu \Rightarrow$

$\frac{۲u}{۱+u^۲}du=\frac{dx}{x} \xrightarrow{\int(\text{طرفین});\text{ حدا شوند}} \text{Ln}(۱+u^۲)=\text{Ln}(cx) \Rightarrow ۱+u^۲=cx$

$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} ۱+(\frac{y}{x})=cx \Rightarrow \frac{x^۲+y^۲}{x^۲}=cx \Rightarrow x^۲+y^۲=cx^۳ \Rightarrow x^۳=C(x^۲+y^۲) \quad ;(\frac{۱}{c}=C)$

حل دوم:

$(x^۲+۳y^۲)dx-۲xy\,dy=۰$

$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} -۲y-۶y=-۸y\neq۰$

$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q}=\frac{-۸y}{+۲xy}=\frac{-۴}{x}=a(x) \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{-۴}{x}dx}=e^{-۴\text{Ln}x}=\frac{۱}{x^۴}$

$\xrightarrow{\mu(x)\times(\text{معادله})} (\frac{۱}{x^۲}+\frac{۳y^۲}{x^۴})dx-\frac{۲y}{x^۳}dy=۰$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرال‌ساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$\xrightarrow{\text{حذف جملات y در P}} \frac{۱}{x^۲}dx-\frac{۲y}{x^۳}dy=۰ \xrightarrow{\int(\text{طرفین})} \frac{-۱}{x}-\frac{y^۲}{x^۳}+c=۰ \Rightarrow$

$-\frac{x^۲+y^۲}{x^۳}-c=۰ \Rightarrow \frac{x^۲+y^۲}{x^۳}=c \Rightarrow x^۳=C(x^۲+y^۲) \quad ;(\frac{۱}{c}=C)$

۱۶۷ـ گزینه «۲»

$(۱+x^۲)(dy-dx)=۲xy\,dx \Rightarrow (۱+x^۲)dy=(۱+x^۲+۲xy)dx \Rightarrow$

$(۱+x^۲)\frac{dy}{dx}=۱+x^۲+۲xy \Rightarrow (۱+x^۲)\frac{dy}{dx}-۲xy=۱+x^۲ \xrightarrow{\frac{۱}{۱+x^۲}\times(\text{معادله})} \frac{dy}{dx}-\frac{۲x}{۱+x^۲}y=۱$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int-\frac{۲x}{۱+x^۲}dx}=e^{-\text{Ln}(۱+x^۲)}=\frac{۱}{۱+x^۲} \quad \&$

$y(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{۱+x^۲}}\{\int\frac{۱}{۱+x^۲}\times۱\,dx+c\} \Rightarrow y(x)=(۱+x^۲)(\text{Arctag}x+c)$

$\xrightarrow{x=۰} y(۰)=c \xrightarrow{y(۰)=۱} c=۱ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y=(۱+x^۲)(\text{Arctag}x+۱)$

۱۶۸ـ گزینه «۱»

$۳xy'+y+x^۲y^۴=۰ \Rightarrow ۳xy'+y=-x^۲y^۴ \Rightarrow y'+\frac{۱}{۳x}y=-\frac{x}{۳}y^۴$

$\xrightarrow{\text{برنولی ; }y^{-۴}\times(\text{طرفین})} y^{-۴}y'+\frac{۱}{۳x}y^{-۳}=-\frac{x}{۳} \xrightarrow{y^{-۳}=u \Rightarrow y^{-۴}y'=-\frac{۱}{۳}u'} -\frac{۱}{۳}u'+\frac{۱}{۳x}u=-\frac{x}{۳} \Rightarrow$

$u'-\frac{۱}{x}u=x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int-\frac{۱}{x}dx}=e^{-\text{Ln}x}=\frac{۱}{x} \quad \&$

$u(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}\{\int\frac{۱}{x}\times x\,dx+c\} \Rightarrow u=x(x+c) \xrightarrow{u=y^{-۳}} y^{-۳}=x(x+c) \Rightarrow y^۳=\frac{۱}{x^۲+cx}$

۱۶۹ـ گزینه «۱»

$$(y+1)dx - x\,dy = 0 \xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور مرجع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{-2}{-(-x)} = \frac{-2}{x} = a(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

۱۷۰ـ گزینه «۳»

$$y' - 3x^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ جدا شوند)}} \ln y = x^3 + c \xrightarrow{x=0} \ln y(0) = c \xrightarrow{y(0)=1} c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \ln y = x^3 \quad \Rightarrow \quad y = e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

۱۷۱ـ گزینه «۴» فرض کنید معادله دیفرانسیل $y'(y-1) = 1$ دارای جواب ثابت بصورت $y = k$ باشد، در اینصورت؛

$$(y = k \quad \Rightarrow \quad y' = 0) \quad \Rightarrow \quad (y-1)y' = 0$$

که در ضابطه معادله دیفرانسیل $y'(y-1) = 1$ صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دیفرانسیل مفروض، دارای جواب ثابتی نیست.

۱۷۲ـ گزینه «۳» فرض کنید $y = k$ یک جواب ثابت معادله دیفرانسیل $y' = y^2 + 2y - 3$ باشد، در اینصورت؛

$$(y = k \quad \Rightarrow \quad y' = 0) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} 0 = k^2 + 2k - 3 \quad \Rightarrow \quad k = 1, -3$$

۱۷۳ـ گزینه «۱» فرض کنید $y = e^{mx}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 0$ باشد، در اینصورت؛

$$(y = e^{mx} \quad \Rightarrow \quad y' = me^{mx}) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} me^{mx} + 2e^{mx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m+2)e^{mx} = 0$$

$$\xrightarrow{e^{mx} \neq 0;\ \forall x} m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -2$$

۱۷۴ـ گزینه «۲» فرض کنید $y = x^m$ یک جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + 2y' = 0$ باشد، در اینصورت؛

$$(y = x^m \quad \Rightarrow \quad y' = mx^{m-1} \quad \& \quad y'' = m(m-1)x^{m-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy'' + 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x(m(m-1)x^{m-2} + 2mx^{m-1}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m(m-1)x^{m-1} + 2mx^{m-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (m^2 + m)x^{m-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -1, 0$$

۱۷۵ـ گزینه «۴»

$$2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ جدا شوند)}} \ln y = -\frac{1}{2}x + c \xrightarrow{\text{با فرض } c=0} \ln y = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\frac{x}{2}}$$

۱۷۶ـ گزینه «۲»

$$x\,dy - (y + x^2)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + x^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left\{\int \frac{1}{x} \times x\,dx + c\right\} = x(x + c) \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 + cx \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: } (x=1 \ \& \ y=2)} 2 = 1 + c \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: } (c=1 \ \& \ x=2)} y(2) = 4 + 1 \times 2 \quad \Rightarrow \quad y(2) = 6$$

۱۷۷ـ گزینه «۱»

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ جدا شوند)}} -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\xrightarrow{\text{(تساوی) } \times 2y} -2 = x^2 y + 2cy \quad \Rightarrow \quad x^2 y + 2 = Cy \quad ; (-2c = C)$$

۱۷۸ـ گزینه «۲» اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ مشتقپذیر باشد، آنگاه شیب خط مماس بر منحنی تابع مفروض، در نقطه $x = x_0$ واقع بر آن برابر مقدار $y'(x_0)$ می‌باشد. در اینصورت؛

$$y' = 3x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad dy = (3x^2 + 2)dx \xrightarrow{\text{(طرفین } \int \text{ جدا شوند)}} y = x^3 + 2x + c$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی: } (x=1 \ \& \ y=-1)} -1 = 1 + 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -4 \quad \Rightarrow \quad y = x^3 + 2x - 4$$

از طرف دیگر لازم بذکر است، تنها منحنی ارائه شده در گزینه (۲)، از نقطه $(1, -1)$ می‌گذرد.

۱۷۹ـ گزینه «۴»

$$xy\,dy - (1 + y^2)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad xy\,dy = (1 + y^2)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1 + y^2}dy = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int \text{ جدا شوند}} \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1 + y^2}dy = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln(cx) \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + y^2) = 2\ln(cx) \quad \Rightarrow$$

$$\ln(1 + y^2) = \ln(cx)^2 \xrightarrow{\ln: \text{تابعی } 1\text{-}1 \text{ است.}} 1 + y^2 = Cx^2 \quad ; (c^2 = C)$$

۱۸۰ـ گزینه «۳»

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{1}{x}y = y^3$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \times y^{-3}: \text{برنولی}} y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = 1 \xrightarrow{y^{-2} = u \ \Rightarrow \ y^{-3}y' = -\frac{1}{2}u'} -\frac{1}{2}u' + \frac{1}{x}u = 1 \quad \Rightarrow \quad u' - \frac{2}{x}u = -2$$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int -\frac{۲}{x}dx}=e^{-۲\ln x}=\frac{۱}{x^۲}$ &

$u(x)=\frac{۱}{\frac{۱}{x^۲}}\left\{\int \frac{۱}{x^۲}\times -۲\,dx+c\right\} \Rightarrow u=x^۲(\frac{۲}{x}+c)=۲x+cx^۲ \xrightarrow{u=y^{-۲}} \frac{۱}{y^۲}=۲x+cx^۲ \Rightarrow y^۲=\frac{۱}{۲x+cx^۲}$

۱۸۱ـ گزینه «۲» حل اول:

$xy'+y+۴=۰ \Rightarrow x\frac{dy}{dx}=-(y+۴) \Rightarrow \frac{dy}{y+۴}=-\frac{dx}{x}$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) ∫ ; جدا شونده}} \ln(y+۴)=-\ln(cx) \Rightarrow \ln(y+۴)=\ln\frac{۱}{cx} \Rightarrow y+۴=\frac{۱}{cx} \Rightarrow$

$xy+۴x=C \quad ;(\frac{۱}{c}=C)$

حل دوم:

$xy'+y+۴=۰ \xrightarrow{\frac{۱}{x}\times(\text{معادله})} y'+\frac{۱}{x}y+\frac{۴}{x}=۰ \Rightarrow y'+\frac{۱}{x}y=-\frac{۴}{x}$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$ &

$u(x)=\frac{۱}{x}\left\{\int x\times\frac{-۴}{x}\,dx+c\right\}=\frac{۱}{x}(-۴x+c) \Rightarrow y=\frac{۱}{x}(-۴x+c) \Rightarrow xy=-۴x+c \Rightarrow xy+۴x=c$

حل سوم:

$xy'+y+۴=۰ \Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y+۴ \xrightarrow{dx\times(\text{معادله})} x\,dy+(y+۴)\,dx=۰$

$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=۱-۱=۰$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}} (y+۴)\,dx=۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) ∫}} yx+۴x+c=۰$

۱۸۲ـ گزینه «۳»

$xy'+y=e^x \Rightarrow y'+\frac{۱}{x}y=\frac{۱}{x}e^x$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$ &

$y(x)=\frac{۱}{x}\left\{\int x\times\frac{۱}{x}e^x\,dx+c\right\} \Rightarrow y=\frac{۱}{x}(e^x+c)$

۱۸۳ـ گزینه «۲»

$\frac{dy}{dx}-y=xy^۵ \xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-۵};\ \text{برنولی}} y^{-۵}y'-y^{-۴}=x$

$\xrightarrow{y^{-۴}=u \Rightarrow y^{-۵}y'=-\frac{۱}{۴}u'} -\frac{۱}{۴}u'-u=x \Rightarrow u'+۴u=-۴x$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int ۴dx}=e^{۴x}$ &

$u(x)=\frac{۱}{e^{۴x}}\left\{\int e^{۴x}\times -۴x\,dx+c\right\}=e^{-۴x}(-x\,e^{۴x}+\frac{۱}{۴}e^{۴x}+c) \Rightarrow u=-x+\frac{۱}{۴}+ce^{-۴x}$

$\xrightarrow{u=y^{-۴}} \frac{۱}{y^۴}=-x+\frac{۱}{۴}+ce^{-۴x}$

راهنمایی.

$-۴x$	+	$e^{۴x}$
-۴	−	$\frac{۱}{۴}e^{۴x}$
۰		$\frac{۱}{۱۶}e^{۴x}$

$\Rightarrow \int -۴x\,e^{۴x}\,dx=-x\,e^{۴x}+\frac{۱}{۴}e^{۴x}$

۱۸۴ـ گزینه «۲»

$۲xy\,dx+(x^۲-۱)\,dy=۰ \Rightarrow ۲xy\,dx=-(x^۲-۱)\,dy \Rightarrow$

$\frac{۲x}{x^۲-۱}dx=-\frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{(طرفین) ∫ ; جداشونده}} \ln(x^۲-۱)=-\ln y+\ln c \Rightarrow$

$\ln(x^۲-۱)=\ln(\frac{c}{y}) \Rightarrow (x^۲-۱)=\frac{c}{y} \Rightarrow y=\frac{c}{x^۲-۱} \Rightarrow y=\frac{C}{۱-x^۲} \quad ;(-c=C)$

۱۸۵ـ گزینه «۳»

$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=-۲x-(-۲x)=۰$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}} (۳x^۲+۲)\,dx+(۶y^۲-x^۲+۳)\,dy=۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) ∫}} x^۳+۲x+۲y^۳-x^۲y+۳y=c$

۱۸۶ـ گزینه «۱»

$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=b-b=۰$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}} ax\,dx+(bx+cy)\,dy=۰ \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) ∫}} a\frac{x^۲}{۲}+bxy+c\frac{y^۲}{۲}=K$

لازم بذکر است، معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه اول همگن است.

۱۸۷ـ گزینه «۱»

$x\,e^y\frac{dy}{dx}=۳x^۴+e^y \xrightarrow{e^y=u \Rightarrow e^y\frac{dy}{dx}=du} x\frac{du}{dx}=۳x^۴+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}-u=۳x^۴ \Rightarrow$

$\frac{du}{dx}-\frac{۱}{x}u=۳x^۳ \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x)=e^{\int -\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{۱}{x}$ &

$u=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}\left\{\int \frac{۱}{x}\times ۳x^۳\,dx+c\right\}=x(x^۳+c) \xrightarrow{u=e^y} e^y=x(x^۳+c) \Rightarrow$

$y=\ln x(x^۳+c) \xrightarrow{x\times(\text{طرفین})} xy=x\ln(x(x^۳+c)) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} xy = \lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{Ln}(x^4+cx) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{Ln}(x^4+cx)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to 0^+} xy = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{4x^3+c}{x^4+cx}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(4x^3+c)}{x(x^3+c)} = 0$$

تذکر.

۱ـ برای حل مسأله فوق، هیچ نیازی به شرط اولیه «جواب از نقطه $(0,0)=(x,y)$ می‌گذرد» نبود. بعبارت دیگر همه جوابهای خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض در حکم مسأله صدق می‌کنند.

۲ـ جواب عمومی معادله مفروض را از روش محاسبه عامل انتگرالساز نیز می‌توان بدست آورد.

۱۸۸ـ گزینه «۳»

$$(3x^2y+2xy+y^3)\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta = 2x-(3x^2+2x+3y^2) = -3(x^2+y^2)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{-3(x^2+y^2)}{-(x^2+y^2)} = 3 = a(x) \quad \Rightarrow \mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}$$

۱۸۹ـ گزینه «۴»

$$3x\,e^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y} \xrightarrow{e^{2y}=u \;\Rightarrow\; 2e^{2y}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}} x\frac{du}{dx} = 3x^4+u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}-u = 3x^4 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u = 3x^3 \xrightarrow{\text{خطی نسبت به u بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\mathrm{Ln}\,x} = \frac{1}{x} \quad \&$$

$$u = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left\{\int \frac{1}{x}\times 3x^3\,dx + c\right\} = x(x^3+c) \quad \Rightarrow \quad u = x^4+cx$$

$$\xrightarrow{u=e^{2y}} e^{2y} = x^4+cx \quad \Rightarrow \quad 2y = \mathrm{Ln}(x^4+cx) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(x^4+cx) = \mathrm{Ln}\sqrt{x^4+cx}$$

۱۹۰ـ گزینه «۲»

$$3x^2-2y^2+(1-4xy)\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad (3x^2-2y^2)\,dx+(1-4xy)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta = -4y-(-4y)=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}} (3x^2-2y^2)\,dx+dy=0 \xrightarrow{\int\ (\text{معادله حاصل})} x^3-2y^2x+y+c=0$$

۱۹۱ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\text{حذف c به کمک مشتقگیری ; گام اول}} \left(y=\frac{c}{e^{2x}}=ce^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y'=-2ce^{-2x}\right) \quad \Rightarrow \quad y'=-2y$$

$$\xrightarrow{y'\mapsto -\frac{1}{y'}\text{ ; گام دوم}} -\frac{1}{y'}=-2y \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y\,dy=dx$$

$$\xrightarrow{\int\ \text{(طرفین) ; گام سوم}} y^2=x+c \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{x+c}$$

۱۹۲ـ گزینه «۳» یادآوری. معادله دیفرانسیل برنولی $y'+a(x)y=b(x)y^n$ با تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ به یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به u بر حسب x تبدیل می‌شود.

در اینصورت، معادله دیفرانسیل مفروض با تغییر متغیر $u=y^{1-\frac{5}{3}}=y^{-\frac{2}{3}}$ به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

۱۹۳ـ گزینه «۴»

$$(xy\cos xy+\sin xy)\,dx+(x^2\cos xy+e^y)\,dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=(2x\cos xy-x^2y\sin xy)-(x\cos xy-x^2y\sin xy+x\cos xy)=0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P ; کامل}} (x^2\cos xy+e^y)\,dy=0 \xrightarrow{\int\ (\text{معادله حاصل})} x\sin xy+e^y=C$$

۱۹۴ـ گزینه «۳»

$$y=xy'+\sqrt{y'} \xrightarrow{y'\mapsto P\text{ ; معادله کلرو}} y=xP+\sqrt{P} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

۱۹۵ـ گزینه «۳»

$$x(y^2-1)\,dx-y(x^2-1)\,dy=0 \quad \Rightarrow \quad x(y^2-1)\,dx=y(x^2-1)\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y^2-1}dy=\frac{x}{x^2-1}dx$$

$$\xrightarrow{\int\ \text{(طرفین) ; جدا شونده}} \int\frac{y}{y^2-1}\,dy=\int\frac{x}{x^2-1}d \quad \Rightarrow \quad \int\frac{2y}{y^2-1}\,dx=\int\frac{2x}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}(y^2-1)=\mathrm{Ln}\,c(x^2-1) \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Ln}\text{ : تابعی 1-1 است}} y^2-1=c(x^2-1)$$

۱۹۶ـ گزینه «۱»

$$(x+3y^2)\,dx+2xy\,dy=0$$

$$\xrightarrow{x^2\times(\text{معادله})} (x^3+3y^2x^2)\,dx+2x^3y\,dy=0$$

معادله حاصل با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q ; کامل}} (x^3+3y^2x^2)\,dx=0 \xrightarrow{\int\ (\text{معادله حاصل})} \frac{x^4}{4}+y^2x^3=c$$

۱۹۷ـ گزینه «۲»

$$x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2 - y^2}\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,dy - (y + \sqrt{x^2 - y^2})\,dx = 0$$

$$\xrightarrow{\text{همگن};\ (\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx)} x(x\,du + u\,dx) - (xu + \sqrt{x^2 - x^2u^2})\,dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x\,du + u\,dx - (u + \sqrt{1-u^2})\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,du - \sqrt{1-u^2}\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,du = \sqrt{1-u^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} \sin^{-1} u = \operatorname{Ln}|x| + c \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \sin^{-1}\frac{y}{x} = \operatorname{Ln}|x| + c \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{y(e)=0 \text{ ; با جایگذاری } (x=e\ :\ y=0) \text{ در جواب عمومی}} \sin^{-1}(0) = \operatorname{Ln} e + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} \sin^{-1}\frac{y}{x} = \operatorname{Ln}|x| - 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹۸ـ گزینه «۴» حل اول:

$$y\,\operatorname{Ln} y\,dx + (x - \operatorname{Ln} y)\,dy = 0 \xrightarrow{\frac{1}{(y\operatorname{Ln} y)\,dy} \times \text{(معادله)}} \frac{dx}{dy} + \frac{x - \operatorname{Ln} y}{y\operatorname{Ln} y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\operatorname{Ln} y}x = \frac{1}{y} \xrightarrow{\text{معادله خطی نسبت به } x \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y\operatorname{Ln} y}} = e^{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} y)} = \operatorname{Ln} y \qquad \&$$

$$x = \frac{1}{\operatorname{Ln} y}\left\{\int \operatorname{Ln} y \times \frac{1}{y}\,dy + c\right\} = \frac{1}{\operatorname{Ln} y}\left(\frac{(\operatorname{Ln} y)^2}{2} + c\right) \quad \Rightarrow \quad x\operatorname{Ln} y = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}^2 y + c \quad \Rightarrow$$

$$2x\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln}^2 y + C \quad ;(2c = C) \quad \Rightarrow \quad (2x - \operatorname{Ln} y)\operatorname{Ln} y = C$$

حل دوم:

$$y\operatorname{Ln} y\,dx + (x - \operatorname{Ln} y)\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = 1 - (\operatorname{Ln} y + 1) = -\operatorname{Ln} y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{-\operatorname{Ln} y}{y\operatorname{Ln} y} = -\frac{1}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\operatorname{Ln} y} = \frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{y} \times \text{(معادله)}} \operatorname{Ln} y\,dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{\operatorname{Ln} y}{y}\right)dy = 0$$

معادله حاصل، با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P} \left(\frac{x}{y} - \frac{\operatorname{Ln} y}{y}\right)dy = 0 \xrightarrow{\int \text{(معادله حاصل)}} x\operatorname{Ln} y - \frac{(\operatorname{Ln} y)^2}{2} = c \quad \Rightarrow$$

$$2x\operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln}^2 y = C \quad ;(2c = C) \quad \Rightarrow \quad (2x - \operatorname{Ln} y)\operatorname{Ln} y = C$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۹۹ـ گزینه «۴» معادله دیفرانسیل مفروض، معادله‌ای مرتبه اول با یک متغیر خطی است:

$$y' = x + y - 2 \xrightarrow{(x+y-2=u \ \Rightarrow\ y'=u'-1)} u' - 1 = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u + 1$$

$$\frac{du}{u+1} = dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جداشونده}} \operatorname{Ln}(u+1) = x + c \quad \Rightarrow \quad u + 1 = e^{x+c} \quad \Rightarrow \quad u + 1 = Ce^x \quad ;(e^c = C)$$

$$\xrightarrow{u=x+y-2} x + y - 1 = Ce^x \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - x + Ce^x \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=0} y(0) = 1 + C \xrightarrow{y(0)=2} 2 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی};\ (C=2\ \&\ x=2)} y(2) = 1 - 2 + e^2 \quad \Rightarrow \quad y(2) = -1 + e^2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۲۰۰ـ گزینه «۳»

$$y' - 2xy + 16xy^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - 2xy = -16x \times y^4$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله) } \times\ y^{-4}\text{ ; برنولی}} y^{-4}y' - 2xy^{-3} = -16x \xrightarrow{y^{-3}=u \ \Rightarrow\ y^{-4}y' = -\frac{u'}{3}} -\frac{u'}{3} - 2xu = -16x \quad \Rightarrow$$

$$u' + 6xu = 48x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int 6x\,dx} = e^{3x^2}$$

$$u = \frac{1}{e^{3x^2}}\left\{\int e^{3x^2} \times 48x\,dx + c\right\} = e^{-3x^2}\left\{8\int 6x \times e^{3x^2}dx + c\right\} \quad \Rightarrow \quad u = e^{-3x^2}(8e^{3x^2} + c) \quad \Rightarrow$$

$$u = 8 + ce^{-3x^2} \xrightarrow{u=y^{-3}} y^{-3} = 8 + ce^{-3x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{8 + ce^{-3x^2}}} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8 + ce^{-3x^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

تست‌های تکمیلی فصل اول

۱ـ در معادله دیفرانسیل $y' + xyLny = xye^{-x^2}$ با شرط $y(0) = 1$ حاصل $\lim_{x\to\infty} y(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) e ۳) ۱ ۴) ∞

۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $x^2y' + 2xy = e^x$ وقتی که $x \to -\infty$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ∞

۳ـ معادله دیفرانسیل $(x^4 \sin y + xy)dy - dx = 0$ با کدام تغییر متغیر قابل حل است؟

۱) $u = y^{-3}$ ۲) $u = x^3$ ۳) $x = u^3$ ۴) $y = u^3$

۴ـ معادله دیفرانسیل $(x^2 \tan y + \cos^{-2} y)y' - x = 0$ دارای جوابی به صورت زیر است:

۱) $x^2\cos^2 y - 2y = c$ ۲) $x^2\cos y + y = c$ ۳) $x\cos^2 y + 2y = c$ ۴) $x^2\cos^2 y - y = c$

۵ـ معادله دیفرانسیل $e^{2x}y' - y^2 - e^x y + e^{2x} = 0$ با تغییر متغیر $y = e^x + \frac{1}{u}$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) $u' - 3u = -e^{-x}$ ۲) $u' + 3u = -e^{-x}$ ۳) $u' + 3u = e^{-x}$ ۴) $u' - 3u = e^{-x}$

۶ـ پوش دسته دایره‌های $(x-c)^2 + y^2 = 1$ عبارتست از:

۱) یک سهمی ۲) دو خط متقاطع ۳) یک دایره ۴) دو خط راست

۷ـ پوش منحنی‌های $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ عبارتست از:

۱) $x = 0$ ۲) $y = 0$ ۳) موجود نمی‌باشد. ۴) $y = x$

۸ـ معادله $yy' + x(Lnx - Lny)$ معادله از نوع:

۱) خطی است. ۲) همگن است. ۳) کامل است. ۴) برنولی است.

۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{xdx + ydy}{(x+y)^2} = 0$ کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 = c$ ۲) $\frac{1}{2}\text{Ln}(x^2 + y) = c$ ۳) $x^2 + y^2 = 2yc$ ۴) $2\text{Ln}(x^2 + y) = c$

۱۰ـ معادله دیفرانسیل $y' - \frac{1}{x}yLny = xy$ با تغییر متغیر $u = Lny$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) جدا شدنی ۲) کامل ۳) برنولی ۴) خطی

۱۱ـ کدامیک از توابع زیر یک فاکتور انتگرال معادله $(x^2 + xy^2)dy + (2y^3 - 3xy)dx = 0$ است؟

۱) $\frac{x^2}{y}$ ۲) x^2y ۳) $\frac{x}{y^2}$ ۴) $\frac{y}{x^2}$

۱۲ـ معادله دیفرانسیل $(x+3y-1)dx + (2x+6y-2)dx = 0$ با کدام تغییر متغیر:

۱) $u = x + y$ ۲) $u = x + 3y - 1$ ۳) $u = \frac{y}{x}$ ۴) $u = \text{Ln}(x+y)$

۱۳ـ جواب معادله دیفرانسیل $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$ با شرط $y(-1) = 1$ کدام است؟

۱) $y = e^{1+\frac{y}{x}}$ ۲) $y = e^{\frac{y}{x}}$ ۳) $y = e^{1-\frac{y}{x}}$ ۴) $y = e^{\frac{y}{x}-1}$

۱۴ـ جواب مسأله با مقدار اولیه $(x^3 - y^3)dx + xy^2dy = 0$ با شرط $y(1) = 1$ عبارتست از:

۱) $y = x(1 - \text{Lnx})^{\frac{1}{3}}$ ۲) $y = x(1 - 3\text{Lnx})^{\frac{1}{3}}$ ۳) $y = (x^3 + \text{Lnx})^3$ ۴) $y = (x^3 - \text{Lnx})^3$

۱۵ـ جواب غیرعادی معادله $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$ عبارتست از:

۱) $y = x + \frac{1}{2}$ ۲) جواب غیرعادی ندارد. ۳) $y = 0$ ۴) $y = 2x + 1$

۱۶ـ جواب معادله با مقدار اولیه $y(1) = 1$; $3xy' + y + x^2y^4 = 0$ کدام است؟

۱) $x^3y^2 = 1$ ۲) $x^2y^2 = 1$ ۳) $xy^2 = 1$ ۴) $x^2y^3 = 1$

۱۷ـ جواب مسأله $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ با شرط $y(1) = 2$ وقتی که $y_1 = x$ یک جواب خصوصی آن باشد کدام است؟

۱) $y = x + \frac{x}{x+1}$ ۲) $y = x + \frac{x}{3x-1}$ ۳) $y = x + \frac{2x}{3x-1}$ ۴) $y = x + \frac{2x}{x+1}$

۱۸ـ جواب عمومی معادله $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$ کدام است؟

۱) $2x + e^{xy} + y^2 + c = 0$ ۲) $2x - y^2 + e^{xy} + c = 0$

۳) $e^{xy} - y^2 - 2x + c = 0$ ۴) $2x - e^{xy} - y^2 + c = 0$

۱۹ـ جواب عمومی معادله $y' = (y + 4x - 1)^2$ کدام است؟

۱) $y = 2\tan(2x + c) - 4x + 1$ ۲) $y = 2\tan(2x + c) - 4x - 1$

۳) $y = 1 + 2\tan(2x + c) + 4x$ ۴) $y = 2\tan(2x + c) + 4x + 1$

۲۰ـ عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $(y\sin x + xy)dx = 0$ $(y^2x + xe^y)dy$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{x^2y}$ ۲) $\frac{1}{xy^2}$ ۳) $\frac{1}{xy}$ ۴) $\frac{x^2}{y}$

۲۱ـ کدام یک از توابع زیر فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل $(x + x^2y)dy + (2y + y^2x)dx = 0$ است؟

۱) $x^{-2}y^2$ ۲) $x^{-1}y^{-1}$ ۳) x^2y^{-2} ۴) $x^{-1}y^{-2}$

۲۲ـ اگر $\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $(xy + 2x + y + 2)dx + (y^2 - 4)dy = 0$ باشد آنگاه:

۱) $\mu(x,y) = \frac{1}{x+2}$ ۲) $\mu(x,y) = \frac{2}{x+1}$ ۳) $\mu(x,y) = \frac{1}{y+2}$ ۴) $\mu(x,y) = \frac{2}{y+1}$

۲۳ـ اگر $y_1(x) = -x^2$ جواب خصوصی معادله $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ باشد، جواب عمومی معادله کدامست؟

۱) $y = -\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c} + 2x^2$ ۲) $y = \frac{x^2e^{x^2}}{e^x+c} - x$ ۳) $y = \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c} - x^2$ ۴) $y = \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c} - x^2$

۲۴ـ یک جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $y = xy' - \sqrt{y'}$ کدام است؟

۱) $2xy + 3 = 0$ ۲) $xy - 1 = 0$ ۳) $4xy + 1 = 0$ ۴) $xy - 2 = 0$

۲۵ـ یک جواب معادله $xy' = y + e^{y'}$ برابر است با:

۱) $y = \frac{1}{x}(\text{Lnx} - x)$ ۲) $y = x(\text{Lnx} - 1)$ ۳) $y = \text{Lnx} - x$ ۴) $y = x^2(1 - \text{Lnx})$

۲۶ـ مقدار α چقدر باشد تا $y = x^{\alpha}\cos x$ جواب معادله زیر باشد؟

$$x^{۲}y'' + xy' + (x^{۲} - \frac{۱}{۴})y = ۰$$

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y = c_۱x + c_۲ Lnx$ کدام است؟

۱) $x^{۲}(۱-Lnx)y'' + xy' - y = ۰$ ۲) $x^{۲}(۱-Lnx)y'' + y' - xy = ۰$

۳) $(۱-Lnx)y'' + xy' - y = ۰$ ۴) $x(۱-Lnx)y'' + y' - xy = ۰$

۲۸ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y + ae^{\frac{x}{۲}} = ۲$ کدام است؟

۱) $۲y' - y = -۲$ ۲) $y' + ۲y = ۲$ ۳) $۲y' + y = ۲$ ۴) $y' + ۲y = ۴$

۲۹ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y = cx^{۲} + c^{۲}$ عبارتست از:

۱) $x^{۲}y = ۲x^{۳}y' + y'^{۲}$ ۲) $۴x^{۲}y = ۲x^{۳}y' + y'^{۲}$ ۳) $x^{۲}y = x^{۳}y' + y'^{۲}$ ۴) $۴x^{۲}y' = ۲x^{۳}y + y'^{۲}$

۳۰ـ معادله دیفرانسیل دسته دایره‌های $x^{۲} + y^{۲} - \lambda y = ۰$ کدام است؟

۱) $(x^{۲} - y^{۲})y' = ۲xy$ ۲) $(x^{۲} + y^{۲})y' = ۲xy$

۳) $x^{۲}y' - ۲(x^{۲} + y)y = ۰$ ۴) هیچکدام

۳۱ـ در مورد جواب مسأله $xy' - y = x^{۲}e^{-x}$ و $y(۱) = \frac{e-۱}{e}$ کدام گزاره درست است؟

۱) $y = ۱$ مجانب افقی آن است. ۲) $y = x$ مجانب مایل آن است.

۳) مسأله جواب یکتا ندارد. ۴) دامنه جواب مسأله $(۰,+\infty)$ است.

۳۲ـ معادله $y'\cos y + x^{۲}e^{x}\sin y = ۲x\sin^{۳} y$ با کدام یک از تغییر متغیرهای زیر به معادله خطی تبدیل می‌شود؟

۱) $z = \sin^{۲} y$ ۲) $z = \frac{۱}{y^{۲}}$

۳) $z = \csc^{۲} y$ ۴) به معادله خطی تبدیل نمی‌شود.

۳۳ـ کدامیک از تغییر متغیرهای داده شده، معادله $y'(y^{۲}x + yx^{۳}) = ۲$ را به معادله‌ای خطی تبدیل می‌کند؟

۱) $z = \frac{۱}{y}$ ۲) $z = \frac{۱}{x}$ ۳) $z = \frac{۱}{y^{۲}}$ ۴) $z = \frac{۱}{x^{۲}}$

۳۴ـ کدامیک از تغییر متغیرها، معادله $y' - xy + (۲x-۱)y^{۲} = x - ۱$ را به معادله برنولی تبدیل می‌کند؟

۱) $y = ۱ + \frac{۱}{u}$ ۲) $y = -۱ + u$ ۳) $y = -۱ + \frac{۱}{u}$ ۴) $y = ۱ + u$

۳۵ـ کدامیک از تغییر متغیرهای داده شده معادله $y' + ۲xy + ۲y^{۲} = -۱$ را به معادله خطی تبدیل می‌کند؟

۱) $y = \frac{۱}{x} + u$ ۲) $y = -x + u$ ۳) $y = -x + \frac{۱}{u}$ ۴) $y = x + \frac{۱}{u}$

۳۶ـ دامنه اعتبار جواب برای معادله $y' = xy^{۳}(۱+x^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ با شرط $y(۰) = ۱$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-\frac{\sqrt{۵}}{۲}, \frac{\sqrt{۵}}{۲})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۴) $\mathbb{R}$

۳۷ـ کدامیک از توابع زیر در معادله $y(x) = \int_{۰}^{x} \cos t\, y(t)\, dt + ۱$ صدق می‌کند؟

۱) $y(x) = e^{\cos x}$ ۲) $y(x) = e^{-۲\cos x}$ ۳) $y(x) = e^{\sin x}$ ۴) $y(x) = e^{-\sin x}$

۳۸ـ کدام تغییر متغیر معادله $(y-۱)\tan(\frac{y+x}{x+۱}) + y'(x+۱) = ۰$ را به معادله‌ای تفکیک پذیر تبدیل می‌کند؟

۱) $u = \frac{y+۱}{x}$ ۲) $u = \frac{y+۱}{x+۱}$ ۳) $u = \frac{y-۱}{x+۱}$ ۴) $u = \frac{y-۱}{x}$

۳۹ـ معادله دیفرانسیل $(۲x - \sin y + ۱)\cos y\, dy - (۲x - ۲\sin y)dx = ۰$ با استفاده از کدام تغییر متغیر زیر به معادله تفکیک پذیر تبدیل می‌شود؟

۱) $u = ۲x + \sin y$ ۲) $u = x + \sin y$ ۳) $u = ۲x + \cos y$ ۴) $u = ۲x - \sin y$

۴۰ـ جواب معادله $y' = \frac{۲y - x + ۵}{۲x - y - ۴}$ کدام است؟

۱) $y - x + ۳ = c(x+y+۱)^{۳}$ ۲) $y - x = c(x+y+۱)^{۳}$

۳) $y - x + ۲ = c(x+y+۱)^{۲}$ ۴) $y - x = c(x+y+۱)^{۲}$

۴۱ـ اگر $\mu = \frac{۵}{xy^{۲}}$ عامل انتگرال‌ساز معادله $(Kxy - ۲y^{۲})dx + (۳xy - x^{۲})dy = ۰$ باشد، K کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۴۲ـ اگر معادله $y(x+y)dx + (x + by - ۱)dy = ۰$ دارای عاملی برحسب x باشد b کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳ـ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله زیر کدام است؟

$$(y + xy^{۳} + ۳x^{۳}y)dx + (x + ۲x^{۲}y^{۲})dy = ۰$$

۱) $\mu = x^{-۱}y^{-۱}$ ۲) $\mu = x^{-۲}y^{-۲}$ ۳) $\mu = xy$ ۴) $\mu = x^{۲}y^{۲}$

۴۴ـ جواب (انتگرال) معادله $y'(y + e^{x}) + ۲(y + e^{x}) + ۳ye^{x} = ۰$ عبارتست از:

۱) $y^{۲}e^{x} + ۴ye^{x} = c$ ۲) $y^{۲}e^{x} + ۲ye^{۲x} = c$ ۳) $y^{۲} - ۲yc^{x} = c$ ۴) $y^{۲}e^{x} - ۲ye^{۲x} = c$

۴۵ـ جواب عمومی معادله $x = ۲y' + ۳y'^{۲}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = ۲p + ۳p^{۲} \\ y = p^{۲} - ۲p^{۳} + c \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = ۲p + ۳p^{۲} \\ y = ۲Lnp + ۴p + c \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = ۲p + ۳p^{۲} \\ y = ۲p^{۲} + ۳p^{۳} + c \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = ۲p + ۳p^{۲} \\ y = p^{۲} + ۲p^{۳} + c \end{cases}$

۴۶ـ در معادله $x = y' + e^{y'}$ با فرض $y' = p$ مقدار y کدام است؟

۱) $\frac{p^{۲}}{۲} + \int \frac{e^{p}}{p}dp + c$ ۲) $\frac{۱}{۲}p^{۲} + (p+۱)e^{p} + c$ ۳) $\frac{p^{۲}}{۲} + pe^{p} + c$ ۴) $\frac{p^{۲}}{۲} + (p-۱)e^{p} + c$

۴۷ـ جواب عمومی معادله $x = ۲y' + \sin y'$ کدامیک از توابع زیر می‌باشد؟

۱) $\begin{cases} x = ۲p + \sin p \\ y = p^{۲} - p\cos p - \sin p + c \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = ۲p + \sin p \\ y = p^{۲} + p\cos p + \sin p + c \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = ۲p + \sin p \\ y = p^{۲} + p\sin p + \cos p + c \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = ۲p + \sin p \\ y = p^{۲} + p\sin p - \cos p + c \end{cases}$

۴۸ـ جواب معادله $y = xy' + y'^2 + x$ عبارتست از:

۱) $\begin{cases} x = -2p + 2 \\ y = -p^2 + 3p \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = 2p + 2 \\ y = 3p^2 + p \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = 2p - 2 \\ y = 3p^2 + 2p \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = -p + 1 \\ y = 0 \end{cases}$

۴۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y = -\frac{1}{x^2 y'} - xy'$ کدام است؟

۱) $y = -\frac{x^2 + c}{cx}$ ۲) $y = \frac{x + c^2}{cx^2}$ ۳) $y = -\frac{x + c^2}{cx}$ ۴) $y = \frac{x^2 + c}{cx^2}$

۵۰ـ جواب عمومی معادله $x = y'^2 + \frac{y}{y'}$ کدام است؟

۱) $y = cx - c^2$ ۲) $y = cx^2 + c^2$ ۳) $y = cx + \frac{1}{c^2}$ ۴) $y = cx^2 + c$

۵۱ـ جواب غیرعادی معادله $x = \frac{y}{y'} + Lny'$ عبارتست از:

۱) $y = e^x - 1$ ۲) $y = e^{x-1}$ ۳) $x = e^{y-1}$ ۴) $x = e^y - 1$

۵۲ـ جواب غیرعادی معادله $y = xy'^2 + \frac{1}{2y'}$ عبارتست از:

۱) $y = x + 1$ و $y = 0$ ۲) $y = x + \frac{1}{2}$ ۳) $y = x - 1$ و $y = 0$ ۴) $y = x + 1$

۵۳ـ جواب غیرعادی معادله $y = xy'^3 + Lny'$ عبارتست از:

۱) $y = x + 1$ و $y = 0$ ۲) $y = 0$ ۳) $y = x$ ۴) $y = x + 1$

۵۴ـ جواب عمومی معادله $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$ عبارتست از:

۱) $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\frac{1}{p} + c) \\ y = 2xp + \frac{1}{p^2} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = \frac{1}{p}(-\frac{2}{p} + c) \\ y = 2xp + \frac{1}{p^2} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(-\frac{1}{p} + c) \\ y = 2xp + \frac{1}{p^2} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\frac{2}{p} - c) \\ y = 2xp + \frac{1}{p^2} \end{cases}$

۵۵ـ مسیرهای متعامد $r = c(1 + \sin\theta)$ که در آن r شعاع، و θ زاویه و c مقدار ثابت باشد کدام است؟

۱) $r = k(2 + \sin 2\theta)$ ۲) $r = k(2 - \sin\theta)$ ۳) $r = k(1 - \sin\theta)$ ۴) $r = k(1 + \sin 2\theta)$

۵۶ـ معادله مسیرهای متعامد دسته منحنی‌های $r = c(\sin\theta - \cos\theta)$ عبارت است از:

۱) $r = A\sin\theta$ ۲) $r = A(\cos\theta + \sin\theta)$ ۳) $r = A\tan\theta$ ۴) $r = A(\tan\theta + \cot\theta)$

۵۷ـ جواب معادله $y' = y(1 - y)$ حول نقطه $(0, 2)$ چگونه است؟

۱) دارای ماکزیمم ۲) دارای می‌نیمم ۳) صعودی اکید ۴) نزولی اکید

۵۸ـ جواب عمومی معادله $y' + 3x^2 y = 6x^2$ برابر است با:

۱) $y = 6 + ce^{-x^3}$ ۲) $y = 2 + ce^{-x^3}$ ۳) $y = 6 + ce^{x^3}$ ۴) $y = 2 + cc^{x^3}$

۵۹ـ جواب معادله $y' = \frac{y}{x + y^3}$ همراه با شرط $y(1) = 1$ در $y = 2$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۶۰ـ اگر $y' - 2xy + 16xy^3 = 0$ آنگاه $\lim_{x \to -\infty} y$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۱ـ اگر $y' + xy = 2xy^3$ و $y(0) = \frac{1}{4}$ آنگاه مقدار $y(2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4 + 2e^2}$ ۲) $\frac{1}{2 + 2e^2}$ ۳) $\frac{1}{2 - e^4}$ ۴) $\frac{1}{2 - 2e^4}$

۶۲ـ جواب معادله $y^3 dx + (2x^2 - 2xy^2)dy = 0$ عبارتست از:

۱) $x(c + \ln y^2) = y^2$ ۲) $x^2(c + \ln y^2) = 2y$ ۳) $x(c + \ln y) = y^2$ ۴) $c + \ln y = xy^2$

۶۳ـ اگر معادله $y(1 + \sqrt{1 + x^2 y^2})dx + 2xdy = 0$ با اعمال تغییر متغیر $y = t^a$ همگن شود، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\frac{-1}{2}$

۶۴ـ پوش دسته منحنی‌های $(y - c)^2 = x^2$ عبارتست از:

۱) $x = \pm 2$ ۲) $y = \pm 2x$ ۳) $x = \pm 1$ ۴) $y = \pm x$

۶۵ـ پوش دسته خطوط $y = cx - \ln c$ عبارتست از:

۱) $y = \ln x^2$ ۲) $y = 1 - \ln x^2$ ۳) $y = 1 + \ln x$ ۴) $y = 1 + \ln x^2$

۶۶ـ جواب عمومی معادله $y = y'^2 + 4y'^3$ به صورت پارامتری کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = 2p + 6p^2 + c \\ y = p^2 + 4p^3 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = 2p - 6p^2 + c \\ y = p^2 + 4p^3 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = 2p - 2p^2 + c \\ y = p^2 + 4p^3 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = 2p + 2p^2 + c \\ y = p^2 + 4p^3 \end{cases}$

۶۷ـ در معادله دیفرانسیل $x = 2y' - \ln y'$ با فرض $y' = p$ مقدار y کدام است؟

۱) $p^2 + 2p + c$ ۲) $p^2 + p + c$ ۳) $p^2 - 2p + c$ ۴) $p^2 - p + c$

۶۸ـ جواب غیرعادی معادله $y = xy' - \ln y'$ کدام است؟

۱) $y = 1 + \ln^2 x$ ۲) $y = 1 + \ln x$ ۳) $y = 1 - \ln x$ ۴) $y = 2 + \ln x$

۶۹ـ یک جواب معادله $y = xy' - \frac{1}{y'}$ کدامیک از منحنی‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $y = 4x + 1$ ۲) $y^2 - 4x = 0$ ۳) $y^2 + 4x = 0$ ۴) $y = 4x - 1$

۷۰ـ جواب غیر عادی معادله $x = y'^3 + \frac{y}{y'}$ کدام است؟

۱) $27y^2 = 4x^3$ ۲) $27x^3 = 4y^2$ ۳) $27x^2 = 4y^3$ ۴) $4x^2 = 27y^3$

فصل دوم
«معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم»

۲-۱- مقدمه

معادله‌ای که بالاترین مرتبه مشتق آن نسبت به یک متغیر مستقل دو باشد را معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم می‌نامیم و آن را به شکل کلی

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad (۱-۲)$$

نشان می‌دهیم که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته به x است ساده‌ترین معادله مرتبه دوم $y'' = 0$ می‌باشد که با دوبار انتگرالگیری از آن دارای جواب عمومی $y = c_1x + c_2$ است بنابراین قالب کلی جواب عمومی معادلات مرتبه دوم بصورت $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ است لذا برای تعیین جواب یکتا لازم است دو شرط

$$y(x_0) = \alpha \quad , \quad y'(x_0) = \beta \qquad (۲-۲)$$

مشخص شود این شرایط را شرایط اولیه (آغازی) می‌نامیم.

۲-۲- حالات خاص حل معادلات مرتبه دوم

معادله (۲-۱) را در حالات زیر به سادگی می‌توان حل نمود.

حالت اول: معادله به شکل $y'' = f(x)$ باشد در این صورت با دوبار انتگرالگیری از طرفین معادله، جواب عمومی معادله به دست می‌آید.

بعنوان مثال. برای حل معادله $y'' = e^{3x}$ با یکبار انتگرالگیری از طرفین معادله داریم: $y' = \frac{1}{3}e^{3x} + c_1$

و با انتگرالگیری مجدد از آن خواهیم داشت: $y = \frac{1}{9}e^{3x} + c_1x + c_2$

حالت دوم: معادله (۲-۱) فاقد y (فاقد متغیر وابسته) باشد یعنی به شکل $f(x, y', y'') = 0$ باشد. در این حالت با تغییر متغیر $y' = z$ در نتیجه $y'' = z'$ یک معادله مرتبه اول به شکل $f(x, z, z') = 0$ حاصل می‌شود پس از حل این معادله و جایگذاری $y' = z$ یک معادله مرتبه اول دیگر حاصل می‌شود که آن را نیز حل می‌نمائیم.

مثال ۱. جواب عمومی معادله $xy'' + y' = x$ برابر است با:

۱) $y = x^2 \ln x + c_1x + c_2$
۲) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{x} + c_2$
۳) $y = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2$
۴) $y = c_1 x \ln x + c_2$

☑ **حل.** گزینه «۳». با جایگذاری $y' = z$ و $y'' = z'$ معادله $xz' + z = x$ حاصل می‌شود که یک معادله خطی مرتبه اول است با تقسیم طرفین معادله بر x داریم:

$$z' + \frac{1}{x}z = 1$$

حال مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c_1\right] = e^{-\ln x}\left[\int e^{\ln x}dx + c_1\right] = \frac{1}{x}\left[\int x dx + c_1\right] = \frac{1}{x}(\frac{x^2}{2} + c_1) = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}$$

حال با جایگذاری $z = y'$ یک معادله مرتبه اول دیگر به شکل $y' = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x}$ حاصل می‌شود که از نوع تفکیک‌پذیر است لذا برای حل آن داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} \longrightarrow \int dy = \int (\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x})dx$$

$$\longrightarrow y = \frac{x^2}{4} + c_1 \ln x + c_2$$

مثال ۲. جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 2y''' = 0$ برابر است با:

۱) $Ax^4 + Bx^2 + Cx + D$
۲) $Ax^4 + Bx^3$
۳) $Ax^4 + Bx + C$
۴) $Ax^4 + Bx^3 + x$

☑ **حل.** گزینه «۳». با جایگذاری $y'' = z$ و $y''' = z'$ معادله‌ای به شکل $xz' - 2z = 0$ حاصل می‌شود که از نوع تفکیک‌پذیر است لذا برای حل آن داریم:

$$x\frac{dz}{dx} = 2z \longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{x} \longrightarrow \ln z = 2\ln x + \ln c_1 \longrightarrow z = c_1x^2$$

حال با جایگذاری $z = y''$ یک معادله مرتبه دوم به شکل $y'' = c_1x^2$ حاصل می‌شود که از نوع حالت اول می‌باشد با ۲ بار انتگرالگیری از معادله داریم:

$$y' = c_1\frac{x^3}{3} + c_2 \longrightarrow y = c_1\frac{x^4}{12} + c_2x + c_3 = Ax^4 + Bx + C$$

مثال ۳. جوابی از معادله دیفرانسیل $xy'' + y' = 2x\ln x$ که منحنی نمایش آن از مبداء عبور کرده و در این نقطه برمحور yها مماس نباشد.

۱) $y = \frac{x^2}{2}\ln x$
۲) $y = \frac{x^2}{2}\ln(\frac{x}{e})$
۳) $y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x}{2}$
۴) $y = x^2 \ln x - e$

☑ **حل.** گزینه «۱». معادله داده شده فاقد y می‌باشد با تغییر متغیر $y' = z$ و $y'' = z'$ داریم:

$$xz' + z = 2x\ln x$$

با تقسیم طرفین معادله بر x و به کمک فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$z'+\frac{۱}{x}z=۲\ln x \Rightarrow z=e^{-\int\frac{۱}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{۱}{x}dx}\,۲\ln x\,dx+c_۱\right]=\frac{۱}{x}\left[\int ۲x\ln x\,dx+c_۱\right]=\frac{۱}{x}(x^۲\ln x-\frac{x^۲}{۲}+c_۱)$$

$$=x\ln x-\frac{x}{۲}+\frac{c_۱}{x}$$

حال با جاگذاری $z=y'$ یک معادله مرتبه اول دیگر به شکل $y'=x\ln x-\frac{x}{۲}+\frac{c_۱}{x}$ حاصل می‌شود که از نوع تفکیک پذیر است لذا برای حل آن داریم:

$$\frac{dy}{dx}=x\ln x-\frac{x}{۲}+\frac{c_۱}{x}\Rightarrow\int dy=\int(x\ln x-\frac{x}{۲}+\frac{c_۱}{x})dx\Rightarrow y=\frac{x^۲}{۲}\ln x-\frac{x^۲}{۲}+c_۱\ln x+c_۲$$

دسته منحنی فوق از مبدأ عبور نمی‌کند زیرا $\ln x$ در $x=۰$ تعریف نشده می‌باشد بنابراین هیچ‌یک از گزینه‌ها صحیح نیست.

حالت سوم: معادله (۲-۱) فاقد x (فاقد متغیر مستقل) باشد یعنی به شکل $f(y,y',y'')=۰$ باشد در این حالت نیز $y'=z$ می‌گیریم ولی $y''=z\frac{dz}{dy}$ قرار می‌دهیم زیرا:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}y'=z\frac{dz}{dy}$$

بدین ترتیب یک معادله مرتبه اول حاصل می‌شود که متغیر مستقل آن y و متغیر وابسته آن z است پس از حل این معادله و جایگذاری $y'=z$ یک معادله مرتبه اول دیگر حاصل می‌شود که آن را نیز حل می‌نمائیم.

مثال ۴. جواب معادله $yy''+(y')^۲=۰$ عبارت است از:

۱) $y^۲+c_۱x^۲=c_۲$ ۲) $y^۲+c_۱x=c_۲$ ۳) $xy^۲+c_۱x^۲=c_۲$ ۴) $x^۲y^۲+c_۱y=c_۲x$

☑ **حل.** گزینه «۲». معادله فاقد x است با جایگزینی $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$yz\frac{dz}{dy}+z^۲=۰\rightarrow\int\frac{dz}{z}=\int\frac{-dy}{y}\rightarrow\ln(z)=-\ln(y)+\ln c_۱\rightarrow z=\frac{c_۱}{y}$$

با قرار دادن $z=y'=\frac{dy}{dx}$ معادله مرتبه اول دیگری از نوع تفکیک‌پذیر حاصل می‌شود داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_۱}{y}\rightarrow\int ydy=\int c_۱dx\rightarrow\frac{y^۲}{۲}=c_۱x+c_۲\rightarrow y^۲=\underbrace{۲c_۱}_{C_۱}x+\underbrace{۲c_۲}_{C_۲}$$

مثال ۵. اگر معادله دیفرانسیل $y''+\sin y=۰$ معادله تغییر مکان یک متحرک با شرایط اولیه $y(۰)=\frac{\pi}{۳}$ و $y'(۰)=۰$ باشد در اینصورت سرعت V برابر است با:

۱) $V=\sqrt{۲\cos y-۱}$ ۲) $V=\sqrt{۲\cos y-\frac{۱}{۲}}$ ۳) $V=\sqrt{۴\cos y-۲}$ ۴) $V=\sqrt{۸\cos y-۴}$

☑ **حل.** گزینه «۱». با جایگذاری $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy}+\sin y=۰\longrightarrow\int zdz=-\int\sin y\,dy\longrightarrow\frac{z^۲}{۲}=\cos y+c_۱$$

حال با جایگذاری $z=y'$ یک معادله مرتبه اول دیگر به شکل $\frac{(y')^۲}{۲}=\cos y+c_۱$ حاصل می‌شود بنابراین: $y'=\sqrt{۲\cos y+۲c_۱}$

چون $y'(۰)=۰$ و $y(۰)=\frac{\pi}{۳}$ داریم:

$$y'(۰)=\sqrt{۲\cos(y(۰))+۲c_۱}\longrightarrow۰=\sqrt{۲\cos(\frac{\pi}{۳})+۲c_۱}\longrightarrow۰=\sqrt{۱+۲c_۱}\longrightarrow c_۱=\frac{-۱}{۲}$$

$$\longrightarrow y'=\sqrt{۲\cos y-۱}$$

$$\longrightarrow V=\sqrt{۲\cos y-۱}$$

مثال ۶. جواب ضمنی معادله دیفرانسیل زیر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$\begin{cases}۲y''-۲(y')^۲-e^{۲y}=۰\\ y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۲\end{cases}$$

۱) $x=\int_۱^x e^{y}(y+e^{-۲}-۴)^{\frac{-۱}{۲}}dy$ ۲) $x=\int_۰^x e^{-y}(y+۴e^{-۲}-۱)^{\frac{-۱}{۲}}dy$

۳) $y=\int_۱^y(e^{y}\sqrt{y}+c_۱+e^{۲})dy$ ۴) $y=\int_۰^x(e^{-y}\sqrt{y}+۴e^{۲})dy$

☑ **حل.** گزینه «۲». معادله فاقد متغیر مستقل x می‌باشد با جایگزینی $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$۲z\frac{dz}{dy}-۲z^۲-e^{۲y}=۰$$

با تغییر متغیر $u=z^۲$ می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{du}{dy}=۲z\frac{dz}{dy}$ با جایگذاری آنها در معادله فوق داریم:

$$\frac{du}{dy}-۲u=e^{۲y}$$

معادله فوق از نوع خطی مرتبه اول است مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$u=e^{-\int-۲dy}\left[\int e^{\int-۲dy}e^{۲y}dy+c_۱\right]=e^{۲y}[y+c_۱]$$

چون $u=z^۲=(y')^۲$ است داریم:

$$(y')^۲=e^{۲y}(y+c_۱)$$

با قرار دادن $x=۰$ در معادله فوق داریم:

$$(y'(۰))^۲=e^{۲y(۰)}(y(۰)+c_۱)\rightarrow۴=e^{۲}(۱+c_۱)\rightarrow۴=e^{۲}(۱+c_۱)\rightarrow c_۱=۴e^{-۲}-۱$$

در نتیجه:

$$(y')^۲=e^{۲y}(y+۴e^{-۲}-۱)\rightarrow y'=e^{y}\sqrt{y+۴e^{-۲}-۱}$$

معادله فوق از نوع تفکیک‌پذیر است، بنابراین برای حل آن داریم:

$$\frac{dy}{dx}=e^{y}\sqrt{y+۴e^{-۲}-۱}\Rightarrow dx=e^{-y}(y+۴e^{-۲}-۱)^{\frac{-۱}{۲}}dy\Rightarrow x=\int_۰^x e^{-y}(y+۴e^{-۲}-۱)^{\frac{-۱}{۲}}dy$$

حالت چهارم: معادله (۲-۱) نسبت به y و y' و y'' همگن باشد یعنی:

$$f(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'') = \lambda^n f(x,y,y',y'') \quad (\frac{y'}{y}=u \Rightarrow y'=yu \Rightarrow y''=y(u'+u^2))$$

در اینصورت با تغییر متغیر معادله (۲-۱) به یک معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود توجه شود که تحت این تغییر متغیر جایگزینی‌های زیر را انجام می‌دهیم.

بعنوان مثال. معادله $yy''-(y')^2-6xy^2=0$ نسبت به y و y' و y'' همگن است در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{(\frac{y'}{y}=u \Rightarrow y''=y(u'+u^2))} y^2(u'+u^2)-(uy)^2-6xy^2=0 \Rightarrow u'+u^2-u^2-6x=0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}=6x \Rightarrow du=6x\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} u=3x^2+c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y'}{y}} \frac{y'}{y}=3x^2+c \Rightarrow \frac{dy}{y}=(3x^2+c)\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \ln y = x^3+cx+d$$

۲-۳- معادلات خطی مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوئیم اگر به شکل زیر باشد.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (۲-۳)$$

چنانچه $r(x)=0$ باشد یعنی معادله به شکل

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲-۴)$$

باشد آن را همگن در غیر اینصورت آن را ناهمگن می‌نامیم قضیه زیر تکنیک کلی حل معادلات خطی را بیان می‌کند.

مثال ۷. معادله دیفرانسیل $y''-x^2y'-y-3=0$ یک معادله .....

۱) غیرخطی و همگن است ۲) غیرخطی و غیرهمگن است ۳) خطی و همگن است ۴) خطی و غیر همگن است

☑ **حل.** گزینه «۴». واضح است که معادله فوق خطی مرتبه دوم است اما همگن نمی‌باشد، زیرا طرف دیگر معادله عدد ۲ وجود دارد که مخالف صفر است.

۲-۳-۱- قضیه

اگر y_h جواب عمومی معادله (۲-۴) و y_p یک جواب خصوصی معادله (۲-۳) باشد آن گاه $y=y_h+y_p$ جواب عمومی معادله (۲-۳) است.

مطابق این قضیه برای حل معادلات خطی کافیست یک جواب خصوصی آن را با جواب عمومی معادله همگن نظیر آن جمع نمائیم برای این منظور در ادامه ابتدا طریقه حل معادلات خطی همگن را بیان کرده و سپس یک بحث کلی در مورد روشهای محاسبه یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن ارائه می‌نمائیم.

۲-۴- جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

معادله خطی مرتبه دوم همگن زیر مفروض است.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲-۵)$$

واضح است که $y=0$ یک جواب معادله فوق می‌باشد این جواب را جواب بدیهی می‌گوئیم و در حل این معادله به جستجوی جوابهای غیربدیهی $y\neq 0$ می‌باشیم.

مثال ۸. توابع $y_1=\sin x$ و $y_2=x$ جواب‌های کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر است؟

۱) $y''\sin x+y(\sin x-x\cos x)=0$

۲) $y''(\sin x-x\cos x)+y'(-x\sin x)+y(\sin x)=0$

۳) $y''(\sin x-x\cos x)+y(\sin x)=0$

۴) $y''\sin x+y'(-x\sin x)+y(\sin x-x\cos x)=0$

☑ **حل.** گزینه «۲».

چنانچه y_1 و y_2 دو جواب خصوصی معادله (۲-۵) باشد براحتی می‌توان نشان داد که ترکیب خطی $y=c_1y_1+c_2y_2$ که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه هستند نیز جواب معادله می‌باشد اما این جواب لزوماً جواب عمومی نمی‌باشد بعنوان مثال معادله $y''+4y=0$ را در نظر بگیرید به راحتی می‌توان نشان داد که $y_1=2\sin(2x)$ و $y_2=3\sin(2x)$ جوابهای خصوصی معادله هستند اما

$$y=c_1y_1+c_2y_2=2c_1\sin(2x)+3c_2\sin(2x)=(2c_1+3c_2)\sin(2x)=c\sin(2x)$$

جواب عمومی معادله نمی‌باشد و این جواب عمومی نظیر یک معادله مرتبه اول می‌باشد در ادامه می‌خواهیم شرایطی برای دو جواب y_1 و y_2 بیان کنیم بطوری که ترکیب خطی این دو جواب، جواب عمومی باشد.

۲-۴-۱- تعریف

فرض کنیم مجموعه توابع $\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند این توابع را در این بازه وابسته خطی گوئیم هرگاه اعداد ثابت حقیقی $c_1,c_2,\ldots,c_n$ که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است موجود باشند بطوری که برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم:

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0$$

در غیر اینصورت آنها را مستقل خطی می‌نامیم.

بعنوان مثال. مجموعه توابع $\{1,x,\sin x\}$ در بازه $[-1,1]$ بطور خطی وابسته‌اند زیرا اگر $c_1=0$ ، $c_2=-5$ ، $c_3=1$ ، $c_4=0$ بگیریم برای هر x در این بازه خواهیم داشت:

$$c_1(1)+c_2(x)+c_3(5x)+c_4\sin x=0$$

به کمک قضیه زیر به راحتی می‌توان استقلال یا وابستگی یک مجموعه از توابع را تعیین نمود.

۲-۴-۲- قضیه

فرض کنیم مجموعه توابع $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ بر بازه مفروض $[a,b]$ تا مرتبه $(n-1)$ مشتق‌پذیر باشد اگر این توابع در $[a,b]$ مستقل خطی باشند آن‌گاه:

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

در هیچ نقطه از $[a,b]$ نمی‌تواند صفر باشد. $w(x)$ را رونسکین $y_1, y_2, ..., y_n$ می‌نامیم.

بعنوان مثال. توابع $y_1 = sin(2x)$ و $y_2 = cos(2x)$ در $(-\infty, \infty)$ مستقل خطی هستند زیرا:

$$w(x) = \begin{vmatrix} \sin(2x) & \cos(2x) \\ 2\cos(2x) & -2\sin(2x) \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

مثال ۹. معادله دیفرانسیلی دارای سه جواب ۱، $sin(2t)$ و $cos(2t)$ می‌باشد آنگاه .....

۱) سه جواب مستقل خطی هستند. ۲) سه جواب وابسته خطی هستند.

۳) سه جواب در فاصله $-\pi < x < \pi$ وابسته خطی است. ۴) سه جواب مستقل خطی نیستند.

☑ **حل.** گزینه «۱». رونسکین این سه تابع عبارت است از:

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} 1 & \sin(2t) & \cos(2t) \\ 0 & 2\cos(2t) & -2\sin(2t) \\ 0 & -4\sin(2t) & -4\cos(2t) \end{vmatrix} = -8$$

چون $\omega(t)$ مخالف صفر است لذا مطابق قضیه (۲-۴-۲) هر سه جواب مستقل خطی هستند.

همانطور که قبلاً ارائه دادیم هر ترکیب خطی از دو جواب خصوصی معادله (۲-۵) لزوماً جواب عمومی نمی‌باشد ولی چنانچه این دو جواب خصوصی مستقل خطی باشند می‌توان ثابت نمود که ترکیب خطی آنها جواب عمومی است صحت این ادعا در قضیه زیر برای معادله خطی مرتبه n همگن به شکل

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + ... + f_n(x)y = 0 \qquad (۲-۶)$$

آورده شده است.

۲-۴-۳- قضیه

فرض کنیم $y_1(x)$ و $y_2(x), ..., y_n(x)$ جوابهای خصوصی مستقل خطی معادله (۲-۶) در بازه $[a,b]$ باشند در اینصورت $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$ که در آن $c_1, c_2, ..., c_n$ ثابت‌های اختیاری هستند جواب عمومی معادله (۲-۶) می‌باشد.

۲-۵ حل معادله خطی مرتبه دوم همگن

معادله (۲-۵) را در حالتهای زیر می‌توان حل نمود.

۱ـ ضرایب معادله اعداد ثابت باشد $\begin{pmatrix} ay'' + by' + cy = 0 \\ a,b,c \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

۲ـ معادله لژاندر باشد $\begin{pmatrix} a(Ax+B)^2y'' + b(Ax+B)y' + cy = 0 \\ a,b,c,A,B \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$

۳ـ یک جواب خصوصی معادله داده شده باشد (روش کاهش مرتبه)

۲-۵-۱ معادله خطی مرتبه دو همگن با ضرایب ثابت

فرض کنیم ضرایب معادله (۲-۵) اعدا ثابت باشد یعنی:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (۲-۷)$$

برای حل آن ابتدا معادله مفسر (کمکی ـ مشخصه) را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله درجه دوم فوق سه حالت زیر را داریم:

۱ـ $\Delta > 0$ باشد در اینصورت معادله مفسر دو ریشه λ_1 و λ_2 دارد براحتی می‌توان نشان داد که $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ و $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ دو جواب خصوصی مستقل معادله (۲-۷) است بنابراین:

$$y_h = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} \qquad (۲-۸)$$

جواب عمومی معادله می‌باشد.

۲ـ $\Delta = 0$ باشد در اینصورت معادله مفسر ریشه مضاعف λ را دارد براحتی می‌توان نشان داد که $y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = xe^{\lambda x}$ دو جواب خصوصی مستقل معادله (۲-۷) است بنابراین:

$$y_h = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} \qquad (۲-۹)$$

جواب عمومی معادله می‌باشد.

۳ـ $\Delta < 0$ باشد در اینصورت معادله مفسر ریشه حقیقی ندارد و دارای دو ریشه مختلط $\alpha + i\beta$ و $\alpha - i\beta$ است براحتی می‌توان نشان داد که $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ و $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ دو جواب خصوصی مستقل معادله (۲-۷) است بنابراین:

$$y_h = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) \qquad (۲-۱۰)$$

جواب عمومی معادله می‌باشد.

مثال ۱۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' + 2y = 0$ عبارت است از:

۱) $y = c_1e^{-4x} + c_2e^{x}$ ۲) $y = c_1e^{\frac{-3}{2}x} + c_2xe^{\frac{-3}{2}x}$

۳) $y = c_1e^{x}\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + c_2e^{-x}$ ۴) $y = e^{\frac{-3}{2}x}\left(c_1\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + c_2\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)\right)$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2+3\lambda+4=0 \longrightarrow \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\underbrace{\frac{-3}{2}}_{\alpha}\pm i\underbrace{\frac{\sqrt{7}}{2}}_{\beta}$$

لذا مطابق فرمول (۲-۱۰) داریم:

$$y_h=c_1e^{\frac{-3}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x)+c_2e^{\frac{-3}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)$$

مثال ۱۱. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $3\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-y=0$ *برابر است با:*

۱) $y=c_1x+c_2$ ۲) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ ۳) $y=c_1\ln x+c_2e^{x}$ ۴) $y=c_1e^{x}+c_2e^{\frac{-x}{3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$3\lambda^2-2\lambda-1=0 \longrightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm4}{6}\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

لذا مطابق فرمول (۲-۸) داریم:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{\frac{-x}{3}}$$

مثال ۱۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y''-2y'+y=0$ *کدام است؟*

۱) $y=c_1e^{x}+c_2c^{x}$ ۲) $y=c_1xe^{x}+c_2e^{x}$ ۳) $y=c_1xe^{x}+c_2xe^{-x}$ ۴) $y=c_1xe^{-x}+c_2e^{-x}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱». ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0\longrightarrow(\lambda-1)^2=0\longrightarrow\lambda=1 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

لذا مطابق فرمول (۲-۹) داریم:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$$

مثال ۱۳. *جواب معادله دیفرانسیل* $y''-2y'+2y=0$ *کدام است؟*

۱) $y=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$ ۲) $y=e^{x}A\cos x$

۳) $y=e^{x}B\sin x$ ۴) $y=e^{-x}(A\cos x-B\sin x)$

☑ **حل.** گزینه «۱». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-2\lambda+2=0\rightarrow\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{1}=1\pm i\rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y=c_1e^{x}\cos x+c_2e^{x}\sin x=e^{x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

مثال ۱۴. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y''-8y'+16y=0$ *کدام است؟*

۱) $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$ ۲) $y=c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}$ ۳) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ ۴) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

☑ **حل.** گزینه «۲». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-8\lambda+16=0\rightarrow(\lambda-4)^2=0\rightarrow\lambda=4 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y=c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}$$

مثال ۱۵. *معادله* $y''-2y'-3y=0$ *دارای کدامیک از جواب‌های عمومی زیر است؟*

۱) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ ۲) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$ ۳) $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$ ۴) $y=c_1e^{x}+c_2c^{-x}$

☑ **حل.** گزینه «۲». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+\lambda-2=0\rightarrow(\lambda+2)(\lambda-1)=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-2\end{cases}$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$y=c_1e^{x}+c_2c^{-2x}$$

مثال ۱۶. *معادله دیفرانسیل حاصل از حذف دو ثابت* a *و* b *از معادله تابع* $y=e^{-x}(a\cos x+b\sin x)$ *کدام است؟*

۱) $y''+2y'+y=0$ ۲) $y''+y'+y=0$ ۳) $y''+2y'+2y=0$ ۴) $y''+y'+2y=0$

☑ **حل.** گزینه «۳». با مقایسه دسته منحنی داده شده و فرمول (۲-۱۰) داریم:

$$\alpha=-1\ ,\ \beta=1$$

بنابراین $-1\pm i$ ریشه‌های معادله مفسر می‌باشد یعنی معادله مفسر بصورت زیر است:

$$(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)=0\ \Rightarrow\lambda^2+2\lambda+2=0$$

که این معادله مفسر، نظیر معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=0$ می‌باشد.

مثال ۱۷. *در معادله دیفرانسیل* $y''-4y'+4y=0$ *اگر* $y(0)=1$ *و* $y'(0)=3$ *باشد* y *برابر است با:*

۱) $y=(3+5x)e^{-2x}$ ۲) $y=(3-5x)e^{2x}$ ۳) $y=(3+5x)e^{2x}$ ۴) $y=(3-5x)e^{-2x}$

☑ **حل.** گزینه «۳». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0\rightarrow(\lambda-2)^2=0\rightarrow\lambda=2 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

بنابراین:

$$y'=2c_1e^{2x}+c_2e^{2x}+2c_2xe^{2x}$$
$$y(0)=3\rightarrow c_1=3$$
$$y'(0)=1\rightarrow 2c_1+c_2=1\rightarrow c_2=-5$$
$$y=3e^{2x}-5xe^{2x}=e^{2x}(3-5x)$$

در نتیجه:

مثال ۱۸. *جواب مسأله مقدار اولیه* $y''-3y'+2y=0$ *و* $y(0)=1$ *و* $y'(0)=0$ *عبارت است از:*

۱) $y=e^{2x}(2-e^{x})$ ۲) $y=\frac{1}{2}e^{x}(2-e^{x})$ ۳) $y=e^{x}(2-e^{x})$ ۴) $y=\frac{1}{3}e^{x}(4-e^{x})$

حل. گزینه «۳». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0\rightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=2\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$$

در نتیجه:

$$y'=c_1e^{x}+2c_2e^{2x}$$

$$y(0)=1\rightarrow c_1+c_2=1$$

$$y'(0)=0\rightarrow c_1+2c_2=0$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول فوق $c_1=2$ و $c_2=-1$ می‌باشد در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y=2e^{x}-e^{2x}=e^{x}(2-e^{x})$$

مثال ۱۹. *جواب مسأله* $y''+2y'-15y=0$ *با شرایط* $y(0)=0$ *و* $y'(0)=-1$ *وقتی* $x\rightarrow\infty$ *کدام است؟*

۱) ∞ ۲) 0 ۳) $-\infty$ ۴) 2

حل. گزینه «۳». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+2\lambda-15=0\rightarrow(\lambda+5)(\lambda-3)=0\rightarrow\begin{cases}\lambda=3\\ \lambda=-5\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-5x}\rightarrow y'=3c_1e^{3x}-5c_2e^{-5x}$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=0\rightarrow c_1+c_2=0$$

$$y'(0)=-1\rightarrow 3c_1-5c_2=-1$$

از حل دستگاه فوق $c_1=\frac{-1}{8}$ و $c_2=\frac{1}{8}$ می‌باشد در نتیجه جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$$y=\frac{-e^{3x}+e^{-5x}}{8}$$

در این صورت:

$$\lim_{x\rightarrow\infty}y=-\infty$$

مثال ۲۰. *جواب معادله دیفرانسیل* $y''+4y=0$ *با شرط* $y(0)=0$ *و* $y'(0)=1$ *کدام است؟*

۱) $y=\frac{1}{2}\sin(2x)$ ۲) $y=\sin(2x)$ ۳) $y=\frac{1}{2}\sin x$ ۴) $y=\sin x$

حل. گزینه «۱». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+4=0\rightarrow\lambda=\pm2i\rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)\rightarrow y'=-2c_1\sin(2x)+2c_2\cos(2x)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=0\rightarrow c_1=0$$

$$y'(0)=1\rightarrow 2c_2=1\rightarrow c_2=\frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$y=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

مثال ۲۱. *جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟*

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4x=0\ ,\ x(0)=0\ ,\ x'(0)=3$$

۱) $x=\frac{3}{2}\sinh(2t)$ ۲) $x=\frac{3}{2}\cosh(2t)$ ۳) $x=\frac{3}{2}\sin(2t)$ ۴) $x=\frac{3}{2}\cos(2t)$

حل. گزینه «۱». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4=0\rightarrow\lambda=\pm2$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}\rightarrow x'=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$x(0)=0\rightarrow c_1+c_2=0$$

$$x'(0)=3\rightarrow c_1-c_2=\frac{3}{2}$$

از حل دستگاه حاصل $c_1=\frac{3}{4}$ و $c_2=\frac{-3}{4}$ می‌باشد، بنابراین:

$$x=\frac{3}{4}(e^{2t}-e^{-2t})=\frac{3}{2}\sinh(2t)$$

۲-۵-۲- معادله خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت

معادله خطی مرتبه n همگن با ضرایب ثابت به شکل زیر می‌باشد.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (۱۱-۲)$$

برای حل آن ابتدا معادله مفسر را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

پس از محاسبه ریشه‌های معادله مفسر حالات زیر را تشخیص می‌دهیم:

۱ـ معادله مفسر دارای ریشه حقیقی متمایز λ باشد در این صورت به جواب عمومی جمله

$$ce^{\lambda x} \qquad (۱۲-۲)$$

را اضافه می کنیم.

۲ـ معادله مفسر دارای ریشه حقیقی λ تکرار شده از مرتبه m باشد در این صورت به جواب عمومی جمله

$$c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} + \ldots + c_m x^{m-1} e^{\lambda x} \qquad (۱۳-۲)$$

را اضافه می کنیم.

۳ـ معادله مفسر دارای ریشه‌های موهومی $\alpha \pm i\beta$ تکرار شده از مرتبه m باشد در این صورت به جواب عمومی جمله

$$c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \ldots + c_{2m-1} x^{m-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_{2m} x^{m-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x) \qquad (۱۴-۲)$$

را اضافه می کنیم.

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله $y''' + 2y^{(4)} - 3y^{(5)} = 0$ **را بدست آورید.**

حل. ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 = 0 \longrightarrow \lambda^3(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 0 \quad \text{۳ بار تکرار} \end{cases}$$

برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda = 1$ مطابق (۲-۱۲) جمله $c_1 e^x$، برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda = 2$ مطابق (۲-۱۲) جمله $c_2 e^{2x}$ و برای ریشه $\lambda = 0$ تکرار شده از مرتبه ۳ مطابق (۲-۱۳) جمله $c_3 c^{0x} + c_4 x e^{0x} + c_5 x^2 e^{0x} = c_3 + c_4 x + c_5 x^2$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر می‌باشد.

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2$$

بعنوان مثال. جواب عمومی معادله $y'' + 4y^{(4)} + 4 = 0$ **را بدست آورید.**

حل. ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda^2+2)^2 = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

چون ریشه‌های موهومی فوق ۲ بار تکرار شده است لذا جواب عمومی معادله مطابق (۲-۱۴) بصورت زیر می‌باشد.

$$y_h = c_1 e^{0x}\cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{0x}\sin(\sqrt{2}x) + c_3 x e^{0x}\cos(\sqrt{2}x) + c_4 x e^{0x}\sin(\sqrt{2}x)$$
$$= c_1\cos(\sqrt{2}x) + c_2\sin(\sqrt{2}x) + c_3 x\cos(\sqrt{2}x) + c_4 x\sin(\sqrt{2}x)$$

مثال ۲۲. *ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل* $y''' + y = 0$ *کدام است؟*

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 - i)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 + i)$

۲) $\sqrt{2}(\pm 1 - i)\ ,\ \sqrt{2}(\pm 1 + i)$

۳) $-\sqrt{2}(\pm 1 + 2i)\ ,\ -\sqrt{2}(\pm 1 - 2i)$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 - 2i)\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 + 2i)$

☑ **حل.** گزینه «۱». عبارتند از:

$$\lambda^4 + 1 = 0 \rightarrow (\lambda^2+1)^2 - 2\lambda^2 = 0 \rightarrow (\lambda^2 + 1 - \sqrt{2}\lambda)(\lambda^2 + 1 + \sqrt{2}\lambda) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۲-۵-۳ معادله لژاندر مرتبه دوم همگن

معادله لژاندر مرتبه دوم همگن به شکل زیر می‌باشد.

$$a(Ax+B)^2 y'' + b(Ax+B)y' + cy = 0 \qquad (۱۵-۲)$$

معادله لژاندر با تغییر متغیر $u = \ln(Ax+B)$ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود برای این منظور جایگزینی‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$(Ax+B)y' = Ay'_u \quad , \quad (Ax+B)^2 y'' = A^2(y''_u - y'_u) \qquad (۱۶-۲)$$

چنانچه در معادله (۲-۱۵)، $A = 1$ و $B = 0$ باشد یعنی:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \qquad (۱۷-۲)$$

آن را معادله کوشی اویلر می‌نامیم که با توجه به توضیحات فوق با تغییر متغیر $u = \ln x$ جایگزینی‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$xy' = y'_u \quad , \quad x^2 y'' = y''_u - y'_u \qquad (۱۸-۲)$$

مثال ۲۳. *یک جواب معادله دیفرانسیل* $y'' + xy' + y = 0$ *برابر است با:*

۱) $y = e^{-x}$

۲) $y = \sin(\ln x)$

۳) $y = \sin x$

۴) $y = \ln x$

☑ **حل.** گزینه «۲». با استفاده از جایگزینی (۲-۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + y'_u + y = 0 \longrightarrow y''_u + y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

لذا مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y_h = c_1 e^{0u}\cos(u) + c_2 e^{0u}\sin(u) = c_1\cos(u) + c_2\sin(u)$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y_h = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$$

گزینه (۲) به ازای $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ بدست می‌آید.

مثال ۲۴. ***جواب عمومی معادله*** $x^2y''-3xy'+4y=0$ ***عبارت است از:***

۱) $y=(c_1+c_2\ln x)x^2$ ۲) $y=cx^2$ ۳) $y=cx\ln x$ ۴) $y=c_1x^2+c_2\ln x$

☑ **حل.** گزینه «۱».

با استفاده از جایگزینی‌های (۱۸ـ۲) داریم:

$$(y''_u-y'_u)-3y'_u+4y=0\rightarrow y''_u-4y'+4y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارت است از:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0\rightarrow(\lambda-2)^2=0\rightarrow\lambda=2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۹ـ۲) داریم:

$$y=c_1e^{2u}+c_2ue^{2u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_1x^2+c_2x^2\ln x=x^2(c_1+c_2\ln x)$$

مثال ۲۵. ***جواب عمومی معادله*** $x^2y''+2xy'+\frac{1}{4}y=0$ ***برابر است با:***

۱) $(a+\frac{b}{\sqrt{x}})\ln x$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{x}}+b\ln x$ ۳) $(a+b\ln x)\sqrt{x}$ ۴) $(a+b\ln x)\frac{1}{\sqrt{x}}$

☑ **حل.** گزینه «۴». با قرار دادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u-y'_u)+2y'_u+\frac{1}{4}y=0\Rightarrow y''_u+y'_u+\frac{1}{4}y=0$$

ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}=0\Rightarrow(\lambda+\frac{1}{2})^2=0\Rightarrow\lambda=\frac{-1}{2} \quad \text{ریشه مضاعف}$$

بنابراین مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y=c_1e^{\frac{-1}{2}u}+c_2ue^{\frac{-1}{2}u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_1e^{\frac{-1}{2}\ln x}+c_2\ln xe^{\frac{-1}{2}\ln x}=\frac{c_1+c_2\ln x}{\sqrt{x}}$$

مثال ۲۶. ***جواب کلی معادله دیفرانسیل*** $x^2y''+2y=0$ ***کدام است؟***

۱) $y=\frac{Ax+B}{x^3}$ ۲) $y=\frac{Ax^2+B}{x}$ ۳) $y=\frac{Ax^3+B}{x}$ ۴) $y=\frac{Ax+B}{x^2}$

☑ **حل.** گزینه «۳». با قرار دادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u-y'_u)-2y=0\Rightarrow y''_u-y'_u-2y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

مطابق (۸ـ۲) داریم:

$$y=c_1e^{2u}+c_2e^{-u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_1e^{2\ln x}+c_2e^{-\ln x}=c_1x^2+\frac{c_2}{x}=\frac{c_1x^3+c_2}{x}$$

۲-۵-۴- معادله لژاندر مرتبه n همگن

معادله لژاندر مرتبه n همگن به شکل زیر است:

$$a_n(Ax+B)^ny^{(n)}+a_{n-1}(Ax+B)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1(Ax+B)y'+a_0y=0 \qquad (۱۹-۲)$$

برای حل آن با تغییر متغیر $u=\ln(Ax+B)$ جایگزینی‌های زیر را انجام می‌دهیم.

$$(Ax+B)y'=Ay'_u=ADy$$
$$(Ax+B)^2=A^2(y''_u-y'_u)=A^2D(D-1)y$$
$$(Ax+B)^2y'''=A^2(y'''_u-3y''_u+2y'_u)=A^3D(D-1)(D-2)y \qquad (۲۰-۲)$$
$$\vdots$$
$$(Ax+B)^ny^{(n)}=A^nD(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)y$$

که در آن $D^ny=y^{(n)},\ldots,D^2y=y''_u,Dy=y'_u$

۲-۵-۵- روش کاهش مرتبه

فرض کنیم y_1 یک جواب خصوصی معادله خطی مرتبه دوم همگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (۲۱-۲)$$

باشد در این صورت چنانچه y_2 جواب خصوصی دیگر معادله مستقل از y_1 باشد به روش کاهش مرتبه از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx \qquad (۲۲-۲)$$

مثال ۲۷. ***با فرض اینکه*** $y_1=x$ ***یک جواب خصوصی معادله*** $x^2(x^2-1)y''-x(x^2+1)y'+(x^2+1)y=0$ ***باشد جواب دیگر معادله کدام است؟***

۱) $x(\ln x+x)$ ۲) $x\ln x+\frac{1}{2x}$ ۳) $x^2\ln x$ ۴) $x^2(\ln x+1)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

با تقسیم طرفین معادله بر ضریب y'' داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{-(x^2+1)}{x(x^2-1)}}_{p(x)}y'+\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}}_{q(x)}y=0$$

با توجه به فرمول (۲-۲۲) داریم:

$$y_۲ = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{\int\frac{x^۲+۱}{x(x^۲-۱)}dx}dx = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{\int(\frac{-۱}{x}+\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱})dx}dx = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{-\ln x}e^{\ln(x-۱)}e^{\ln(x+۱)}dx$$

$$= x\int\frac{x^۲-۱}{x^۳}dx = x\int(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳})dx = x(\ln x+\frac{۱}{۲x^۲}) = x\ln x+\frac{۱}{۲x}$$

مثال ۲۸. ***هرگاه $y_۱ = x$ یک جواب معادله $y''-۲xy'+۲y=۰$ باشد آنگاه جواب دیگر معادله در $x=۰$ برابر است با:***

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

☑ **حل.** گزینه «۲». با تقسیم طرفین معادله بر $x^۲-۱$ داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{-۲x}{x^۲-۱}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{۲}{x^۲-۱}}_{q(x)}y=۰$$

مطابق (۲-۲۲) داریم:

$$y_۲ = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{\int\frac{۲xdx}{x^۲-۱}dx}dx = x\int\frac{x^۲-۱}{x^۲}dx = x\int(۱-\frac{۱}{x^۲})dx = x(x+\frac{۱}{x}) = x^۲+۱$$

با قرار دادن $x=۰$ در جواب فوق داریم:

$$y_۲(۰) = ۱$$

مثال ۲۹. ***هرگاه یک جواب معادله $xy''+۲y'+xy=۰$ برابر $\frac{\sin x}{x}$ باشد آنگاه جواب دیگر که با این جواب مستقل خطی باشد کدام است؟***

۱) $\frac{\cos x}{x}$ ۲) $\frac{\sin x}{x}$ ۳) $\frac{\cos x}{x^۲}$ ۴) $x\sin x$

☑ **حل.** گزینه «۱». با تقسیم طرفین معادله بر x داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{۲}{x}}_{P(x)}y'+y=۰$$

مطابق (۲-۲۲) داریم:

$$y_۲ = \frac{\sin x}{x}\int\frac{x^۲}{\sin^۲ x}e^{-\int\frac{۲}{x}dx}dx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^۲ x} = \frac{\sin x}{x}(-\cot x) = \frac{-\cos x}{x}$$

با توجه به اینکه اگر $y_۲$ جواب باشد $cy_۲$ نیز جواب است گزینه (۱) صحیح است.

محاسبه یک جواب خصوصی برای معادله (۲-۲۱) در حالت کلی غیرعملی می‌باشد ولی در موارد زیر قادر هستیم این جواب خصوصی را تعیین کنیم.

۱ـ اگر $p(x)+xq(x)=۰$ باشد آنگاه $y_۱ = x$

۲ـ اگر $۱+p(x)+q(x)=۰$ باشد آنگاه $y_۱ = e^x$

۳ـ اگر $۱-p(x)+q(x)=۰$ باشد آنگاه $y_۱ = e^{-x}$

۴ـ اگر $m^۲+mp(x)+q(x)=۰$ باشد آنگاه $y_۱ = e^{mx}$

مثال ۳۰. ***جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-\frac{x}{x-۱}y'+\frac{۱}{x-۱}y=۰$ عبارتست از:***

۱) $c_۱e^x+c_۲x$ ۲) $c_۱e^x+c_۲e^x$ ۳) $c_۱xe^{-x}+c_۲e^x$ ۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۱». با توجه به اینکه

$$p(x)+xq(x) = \frac{-x}{x-۱}+x\frac{۱}{x-۱} = ۰$$

لذا یک جواب خصوصی معادله $y_۱ = x$ می‌باشد برای محاسبه جواب خصوصی دیگر معادله با استفاده از فرمول (۲-۲۲) داریم:

$$y_۲ = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{\int\frac{x}{x-۱}dx}dx = x\int\frac{۱}{x^۲}e^{\int(۱+\frac{۱}{x-۱})dx}dx = x\int\frac{۱}{x^۲}e^xe^{\ln(x-۱)}dx = x\int(x^{-۱}-x^{-۲})e^xdx$$

$$= x(x^{-۱}e^x) = e^x$$

مثال ۳۱. ***معادله $xy''+(x-۱)y'+(۲x-۱)y=۰$ دارای جوابی به صورت زیر است:***

۱) $x\ln x$ ۲) xe^x ۳) $x^۲\ln x$ ۴) $c^x\ln x$

☑ **حل.** گزینه «۴». با تقسیم طرفین معادله بر x داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{۱-۲x}{x}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{x-۱}{x}}_{q(x)}y=۰$$

چون $۱+p(x)+q(x)=۰$ بنابراین $y_۱ = e^x$ یک جواب خصوصی معادله است برای محاسبه جواب خصوصی دیگر معادله مطابق (۲ـ۲۲) داریم:

$$y_۲ = e^x\int\frac{۱}{e^{۲x}}e^{-\int\frac{۱-۲x}{x}dx}dx = e^x\int\frac{۱}{e^{۲x}}e^{-\ln x}e^{۲x}dx = e^x\ln x$$

مثال ۳۲. ***جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases}xy''+(۱+x)y'+y=۰ & x>۰\\ y(۱)=-۱\ ,\ y'(۱)=۱\end{cases}$ برابر است با:***

۱) $y(x)=\cos(\pi x)+x-۱$ ۲) $y(x)=\frac{-۱}{\pi}\sin(\pi x)-۱$

۳) $y(x)=x\ln x-۱$ ۴) $y(x)=-e^{۱-x}$

☑ **حل.** گزینه «۴». با تقسیم طرفین معادله بر x داریم:

$$y''+\underbrace{(\frac{۱}{x}+۱)}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{۱}{x}}_{q(x)}y=۰$$

چون $۱-p(x)+q(x)=۰$ بنابراین معادله دارای یک جواب خصوصی $y_۱ = e^{-x}$ می‌باشد برای محاسبه جواب خصوصی دیگر معادله مطابق (۲ ـ ۲۲) داریم:

$$y_۲ = e^{-x}\int\frac{۱}{c^{-۲x}}e^{-\int(\frac{۱}{x}+۱)dx} = e^{-x}\int\frac{۱}{e^{-۲x}}e^{-\ln x}e^{-x}dx = e^{-x}\int\frac{e^x}{x}dx = c^{-x}f(x)$$

توجه شود که $\int \frac{e^x}{x}dx$ یک انتگرال غیرقابل می‌باشد که آن را با $f(x)$ نشان داده‌ایم بنابراین:

$$f'(x)=\frac{e^x}{x} \Rightarrow f'(1)=e$$

و جواب عمومی معادله بصورت زیر می‌باشد.

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}+c_2e^{-x}f(x) \Rightarrow y'=-c_1e^{-x}-c_2e^{-x}f(x)+c_2e^{-x}f'(x)$$

حال داریم :

$$y(1)=-1 \Rightarrow c_1e^{-1}+c_2e^{-1}f(1)=-1 \quad ①$$

$$y'(1)=1 \Rightarrow -c_1e^{-1}-c_2e^{-1}f(1)+c_2=1 \quad ②$$

با جمع روابط ① و ② مقدار $c_2=0$ می‌شود که جایگذاری آن در رابطه ① مقدار $c_1=-e$ می‌باشد لذا:

$$y=-ee^{-x}=-e^{1-x}$$

۲-۶- جواب خصوصی معادله خطی غیرهمگن

همانطور که در قضیه (۲-۳-۱) آوردیم برای محاسبه جواب عمومی معادله غیرهمگن باید یک جواب خصوصی آن را (y_p) با جواب عمومی معادله همگن نظیر آن (y_h) جمع نمائیم. طریقه محاسبه y_h در قسمت ۲-۵ ارائه شد در این بخش طریقه محاسبه y_p را ارائه می‌دهیم برای محاسبه y_p سه روش زیر موجود است:

۱ـ روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)

۲ـ روش اپراتور معکوس

۳ـ روش ضرایب نامعین

۲-۷- روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)

معادله خطی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (۲-۲۳)$$

فرض کنیم $y_h=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی معادله همگن نظیر آن باشد در این روش ابتدا رونسکین y_1 و y_2 را از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$w(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

سپس u_1 و u_2 را از روابط زیر بدست می‌آوریم:

$$u_1=-\int \frac{y_2r(x)}{w(x)}dx \qquad , \qquad u_2=\int \frac{y_1r(x)}{w(x)}dx$$

در این صورت $y_p=u_1y_1+u_2y_2$

مثال ۳۳. *جواب معادله دیفرانسیل* $y''+4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x}$ *کدام است؟*

۱) $y=(A+x\ln x)e^{2x}$

۲) $y=(A+Bx+x-\ln x)e^{2x}$

۳) $y=(A+Bx+\frac{1}{x}-\ln x)e^{2x}$

۴) $y=(A+Bx+x\ln x-x)e^{2x}$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \longrightarrow (\lambda-2)^2=0 \longrightarrow \lambda=2 \text{ ریشه مضاعف}$$

لذا مطابق فرمول (۲-۹) داریم:

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

حال با فرض $y_1=e^{2x}$ و $y_2=xe^{2x}$ داریم:

$$w(x)=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \end{vmatrix}=e^{4x}$$

بنابراین:

$$u_1=-\int \frac{y_2r(x)}{w(x)}dx=-\int \frac{xe^{2x}(\frac{e^{2x}}{x})}{e^{4x}}dx=-x$$

$$u_2=\int \frac{y_1r(x)}{w(x)}dx=\int \frac{e^{2x}(\frac{e^{2x}}{x})}{e^{4x}}dx=\ln x$$

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2=-xe^{2x}+x\ln xe^{2x}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=e^{2x}(c_1+c_2x-x+x\ln x)$$

۲-۸- روش اپراتور معکوس

چنانچه ضرایب معادله اعداد ثابت باشد از این روش می‌توان y_p را بدست آورد معادله خطی مرتبه n با ضرایب ثابت زیر مفروض است:

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+....+a_1y'+a_0y=0 \qquad (۲-۲۴)$$

چنانچه D نشانگر عملگر مشتق باشد در این روش بجای y' و y'' و ... و $y^{(n)}$ بترتیب Dy و D^2y و ... و D^ny قرار می‌دهیم در این صورت:

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+....+a_1D+a_0)y=r(x)$$

با فرض $F(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_1D+a_0$ معادله را بصورت $F(D)y=r(x)$ نمایش می‌دهیم و جواب خصوصی را از رابطه $y_p=\frac{1}{F(D)}r(x)$ محاسبه می‌کنیم برای این منظور ابتدا معادله $F(D)=0$ را حل می‌کنیم و ریشه‌های آن را در مجموعه اعداد مختلط بدست می‌آوریم فرض کنیم $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ریشه‌های این معادله باشد در اینصورت:

$$y_p=\frac{1}{(D-\lambda_1)...(D-\lambda_{n-1})(D-\lambda_n)}r(x)$$

ابتدا $u = \frac{1}{D-\lambda_n} r(x)$ می‌گیریم معادله خطی مرتبه اول $u' - \lambda_n u = r(x)$ حاصل می‌شود که با حل آن u بدست می‌آید سپس $v = \frac{1}{D-\lambda_{n-1}} u$ می‌گیریم معادله خطی مرتبه اول $v' - \lambda_{n-1} v = u$ حاصل می‌شود که با حل آن v بدست می‌آید به همین ترتیب نهایتاً $y_p = \frac{1}{D-\lambda_1} w$ می‌گیریم و y_p را از حل معادله خطی مرتبه اول $y_p' - \lambda_1 y_p = w$ بدست می‌آوریم.

بعنوان مثال. جواب خصوصی معادله $y'' - 3y' + 2y = e^x$ را بدست آورید.

حل. مطابق روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^x = \frac{1}{(D-1)(D-2)} e^x$$

ابتدا $u = \frac{1}{D-2} e^x$ می‌گیریم معادله خطی مرتبه اول $u' - 2u = e^x$ حاصل می‌شود.

مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$u = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx} e^x dx\right] = e^{2x}(-e^{-x}) = -e^x$$

حال $y_p = \frac{1}{D-1} u = \frac{1}{D-1}(-e^x)$ می‌گیریم معادله خطی مرتبه اول $y_p' - y_p = -e^x$ حاصل می‌شود مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$y_p = e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}(-e^x)dx\right] = -xe^x$$

در حالتی که $r(x)$ یکی از توابع $e^{\alpha x}$ ، $\cos(\beta x+\gamma)$ ، $\sin(\beta x+\gamma)$ ، چند جمله‌ای یا ترکیبی از حاصلضرب یا حاصلجمع این توابع باشد در روش اپراتور معکوس فرمولهایی موجود است که به کمک آنها به سادگی می‌توان y_p را محاسبه نمود.

این فرمولها عبارتند از:

فرمول ۱: چنانچه $r(x) = e^{\alpha x}$ باشد مطابق فرمول زیر داریم:

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = \begin{cases} \frac{1}{F(\alpha)} e^{\alpha x} & F(\alpha) \neq 0 \\ \frac{x}{F'(\alpha)} e^{\alpha x} & F(\alpha) = 0 \ , \ F'(\alpha) \neq 0 \\ \frac{x^2}{F''(\alpha)} e^{\alpha x} & F(\alpha) = F'(\alpha) = 0 \ , \ F''(\alpha) \neq 0 \\ \vdots & \\ \frac{x^k}{F^{(k)}(\alpha)} e^{\alpha x} & F(\alpha) = F'(\alpha) = ... = F^{(k-1)}(\alpha) = 0, \ F^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \quad (۲-۲۵)$$

مثال ۳۴. یک جواب خاص معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$ کدام است؟

۱) $y_p = \frac{1}{9} e^{3x}$ ۲) $y_p = \frac{1}{7} x e^{3x}$ ۳) $y_p = \frac{1}{7} e^{3x}$ ۴) $y_p = \frac{1}{9} x e^{3x}$

☑ **حل.** گزینه «۳». به روش اپراتور معکوس و به کمک فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 8} e^{3x} = \frac{1}{7} e^{3x}$$

مثال ۳۵. یکی از جواب‌های خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 7y = e^{3x}$ کدام است؟

۱) $y = -e^{3x}$ ۲) $y = \frac{1}{2} e^{3x}$ ۳) $y = e^{3x}$ ۴) $y = 2e^{3x}$

☑ **حل.** گزینه «۳». مطابق روش اپراتور معکوس با استفاده از فرمول (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 7} e^{3x} = \frac{1}{(3)^2 - 5(3) + 7} e^{3x} = e^{3x}$$

مثال ۳۶. جواب عمومی معادله $y'' - 4y' + 3y = 10 e^{-2x}$ کدام است؟

۱) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$ ۲) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$

۳) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ ۴) $y = c e^{-2x}$

☑ **حل.** گزینه «۱». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3} 10 e^{-2x} = \frac{2}{3} e^{-2x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$$

مثال ۳۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$ کدام است؟

۱) $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{x}{2} e^{2x}$ ۲) $y = Ae^x + Be^{3x} + xe^{4x}$

۳) $y = Ae^{2x} + Be^{4x} + \frac{x^2}{2} e^{3x}$ ۴) $y = Ae^x + Be^{3x} + \frac{x}{2} e^{3x}$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲-۸) داریم:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

برای محاسبه y_p مطابق فرمول (۲-۲۵) برای $k = ۱$ داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۴D + ۳} e^{۳x} = \frac{x}{۲} e^{۳x}$$

بنابراین:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{۳x} + \frac{x}{۲} e^{۳x}$$

مثال ۳۸. ***جواب مسأله زیر وقتی $t \to +\infty$ کدام است؟***

$$y'' + ۶y' + ۸y = -e^{-۳t} + ۳e^{-۵t} \quad , \quad y(۰) = ۴ \quad , \quad y'(۰) = -۱۴$$

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ∞ ۴) -۲

حل. گزینه «۲». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۶\lambda + ۸ = ۰ \to (\lambda + ۴)(\lambda + ۲) = ۰ \to \begin{cases} \lambda = -۲ \\ \lambda = -۴ \end{cases}$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{-۲t} + c_۲ e^{-۴t}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲-۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۸}(-e^{-۳t} + ۳e^{-۵t}) = -\frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۸} e^{-۳t} + ۳\frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۸} e^{-۵t} = e^{-۳t} + e^{-۵t}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{-۲t} + c_۲ e^{-۴t} + e^{-۳t} + e^{-۵t}$$

در نتیجه:

$$\lim_{t \to +\infty} y = ۰$$

مثال ۳۹. ***در حل معادله دیفرانسیل $y'' + ۶y' + ۹y = e^{-۳x}\cosh x$ همراه با دو شرط $y(۰) = ۱$ و $y(۱) = ۰$ چنانچه مقدار $x = -۱$ می‌باشد آنگاه مقدار y برابر است با:***

۱) $۲e^{-۳}\cosh(۱)$ ۲) $e^{۹}\cosh(۱)$ ۳) $e^{-۹}\cosh(۱)$ ۴) $۲e^{۳}\cosh(۱)$

حل. گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda + ۶\lambda + ۹ = ۰ \to (\lambda + ۳)^۲ = ۰ \to \lambda = -۳$$ ریشه مضاعف

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{-۳x} + c_۲ x e^{-۳x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲-۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۹} e^{-۳x}\cosh x = \frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۹}\left(\frac{e^{-۲x} + e^{-۴x}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۹} e^{-۲x} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{D^۲ + ۶D + ۹} e^{-۴x}$$

$$= \frac{۱}{۲} e^{-۲x} + \frac{۱}{۲} e^{-۴x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{-۳x} + c_۲ x e^{-۳x} + \frac{e^{-۲x} + e^{-۴x}}{۲}$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(۰) = ۱ \to c_۱ + ۱ = ۱ \to c_۱ = ۰$$

$$y(۱) = ۰ \to c_۲ e^{-۳} + \frac{e^{-۲} + e^{-۴}}{۲} = ۰ \to c_۲ = -\frac{e + e^{-۱}}{۲} = -\cosh(۱)$$

بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$$y = -\cosh(۱) x e^{-۳x} + \frac{e^{-۲x} + e^{-۴x}}{۲}$$

چنانچه $x = -۱$ باشد داریم:

$$y = \cosh(۱) e^{۳} + \frac{e^{۲} + e^{۴}}{۲} = e^{۳}\cosh(۱) + e^{۳}\frac{e + e^{-۱}}{۲} = ۲e^{۳}\cosh(۱)$$

مثال ۴۰. ***جواب کلی معادله دیفرانسیل $x^۲ y'' - xy' + y = \frac{۴}{x}$ کدام است؟***

۱) $y = Ax + Bx\ln x - \frac{۱}{x}$ ۲) $y = Ax + Bx\ln x + \frac{۱}{x}$

۳) $y = Ax + B\ln x - \frac{۱}{x}$ ۴) $y = Ax + B\ln x + \frac{۱}{x}$

حل. گزینه «۲». با تغییر متغیر $u = \ln x$ در طرفین معادله و استفاده از جایگزینی‌های (۲ - ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) - y'_u + y = ۴e^{-u} \Rightarrow y'' - ۲y'_u + y = ۴e^{-u}$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda + ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \lambda = ۱$$ ریشه مضاعف

لذا مطابق (۲ - ۹) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{u} + c_۲ u e^{u}$$

برای محاسبه y_p مطابق روش اپراتور معکوس و به کمک (۲ - ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{(D-۱)^۲} ۴e^{-u} = \frac{۱}{(-۱-۱)^۲} ۴e^{-u} = e^{-u}$$

بنابراین:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{u} + c_۲ u e^{u} + e^{-u}$$

با توجه به اینکه $u = \ln x$ است جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = c_۱ x + c_۲ x\ln x + \frac{۱}{x}$$

فرمول ۲: چنانچه $r(x) = \sin(\beta x + \gamma)$ یا $r(x) = \cos(\beta x + \gamma)$ باشد مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{۱}{F(D^۲)}\begin{cases}\sin(\beta x + \gamma) \\ \cos(\beta x + \gamma)\end{cases} = \frac{۱}{F(-\beta^۲)}\begin{cases}\sin(\beta x + \gamma) \\ \cos(\beta x + \gamma)\end{cases} \quad ; \quad F(-\beta^۲) \neq ۰ \qquad (۲-۲۶)$$

بعنوان مثال. جواب خصوصی معادله $y'' + ۴y = ۳\sin(۴x)$ را بیابید.

حل. مطابق فرمول (۲-۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۴} ۳\sin(۴x) = \frac{۱}{-۱۶ + ۴} ۳\sin(۴x) = \frac{-۱}{۴}\sin(۴x)$$

بعنوان مثال. جواب خصوصی معادله $y'' + ۳y' + ۳y = \sin(۲x)$ را بیابید.

حل.

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۳D + ۳}\sin(۲x) = \frac{۱}{-۴ + ۳D + ۳}\sin(۲x) = \frac{۱}{۳D - ۱}\sin(۲x)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود توان D در مخرج یک می‌باشد و از فرمول (۲-۲۶) نمی‌توان استفاده نمود برای حل این مشکل و تولید $D^۲$ در مخرج، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

بنابراین:

$$y_p = \frac{۳D + ۱}{۹D^۲ - ۱}\sin(۲x) = \frac{۳D + ۱}{۹(-۴) - ۱}\sin(۲x) = \frac{-۱}{۳۷}(۳D + ۱)\sin(۲x) = \frac{-۱}{۳۷}(۶\cos(۲x) + \sin(۲x))$$

فرمول ۳: چنانچه $r(x) = p_n(x)$ که در آن $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n است مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{۱}{F(D)} p_n(x) = q_n(D) p_n(x) \qquad (۲-۲۷)$$

که در این فرمول برای محاسبه $q_n(D)$ ابتدا $F(D)$ را برحسب توانهای صعودی D مرتب می‌کنیم سپس عدد ۱ را بر $F(D)$ تقسیم می‌کنیم و عمل تقسیم را تا زمانی که درجه خارج قسمت n باشد ادامه می‌دهیم.

مثال ۴۱. یک جواب معادله $y'' + y = x^۲$ عبارت است از:

۱) $x^۲ + A\sin x + B\cos x$ ۲) $x^۲ + ۲ + x\cos x$

۳) $x^۲ - ۲ + x\sin x$ ۴) $x^۲ - ۲ + \sin x$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \to \lambda = \pm i \to \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

بنابراین مطابق فرمول (۲-۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{۰x}\cos x + c_۲ e^{۰x}\sin x = c_۱\cos x + c_۲\sin x$$

مطابق روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۱} x^۲$$

حال عدد ۱ را بر $D^۲ + ۱$ تقسیم می‌نمائیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه ۲ باشد زیرا عبارت $x^۲$ از درجه ۲ می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} ۱ & ۱ + D^۲ \\ \hline \frac{۱ + D^۲}{-D^۲} & ۱ - D^۲ \\ \frac{-D^۲ - D^۴}{+D^۴} & \end{array}$$

بنابراین مطابق فرمول (۲-۲۷) داریم:

$$y_p = (۱ - D^۲)x^۲ = x^۲ - ۲$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱\cos x + c_۲\sin x + x^۲ - ۲$$

همانطور که ملاحظه می‌شود گزینه ۴ برای $c_۲ = ۱$ و $c_۱ = ۰$ بدست آمده است لذا گزینه صحیح می‌باشد.

مثال ۴۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - y = x^۲$ عبارتست از:

۱) $y(x) = -x^۲ + c_۱e^{x} + e^{-x}(c_۲\cos(\sqrt{۲}x) + c_۳\sin(\sqrt{۳}x))$

۲) $y(x) = -x^۲ + e^{x}(c_۱ + c_۲ + c_۳x^۲)$

۳) $y(x) = -x^۲ + c_۱e^{x} + e^{\frac{-x}{۲}}(c_۲\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) + c_۳\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x))$

۴) $y(x) = x^۲ + c_۱e^{x} + e^{\frac{-x}{۲}}(c_۲\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) + c_۳\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x))$

☑ **حل.** گزینه «۳». ریشه‌های معادله مفسر عبارتنداز:

$$\lambda^۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda - ۱)(\lambda^۲ + \lambda + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \lambda - ۱ = ۰ & \Rightarrow \lambda = ۱ \\ \lambda^۲ + \lambda + ۱ = ۰ & \Rightarrow \lambda = \frac{-۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲} = \underbrace{\frac{-۱}{۲}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\beta} i \end{cases}$$

برای ریشه $\lambda = ۱$ مطابق (۲-۱۲) جمله $c_۱e^{x}$ و برای ریشه‌های مختلط مطابق(۲-۱۴) جمله $c_۲e^{\frac{-x}{۲}}\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) + c_۳e^{\frac{-x}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$

را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_۱e^{x} + c_۲e^{\frac{-x}{۲}}\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) + c_۳e^{\frac{-x}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$$

برای محاسبه y_p مطابق روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۳ - ۱} x^۲$$

حال مطابق فرمول (۲-۲۷) عدد ۱ را بر $D^۳ + ۱ -$ تقسیم می‌نمائیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه ۲ باشد زیرا عبارت $x^۲$ از درجه ۲ می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} ۱ & -۱ + D^۳ \\ \hline \frac{۱ - D^۳}{D^۳} & -۱ \end{array}$$

بنابراین:

$$y_p = (-۱)x^۲ = -x^۲$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{x} + c_۲e^{\frac{-x}{۲}}\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) + c_۳e^{\frac{-x}{۲}}\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x) - x^۲$$

مثال ۴۳. *جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + ۲y = ۲x$ کدام است؟*

۱) $y = Ae^{-x}\sin(x+\alpha) + x$ ۲) $y = Ae^{x}\sin(x+\alpha) - x$

۳) $y = Ae^{x}\sin(x+\alpha) + x$ ۴) $y = Ae^{-x}\sin(x+\alpha) - x$

☑ **حل.** گزینه «۳». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda + ۲ = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{۲ \pm \sqrt{۴-۸}}{۲} = \frac{۲ \pm ۲i}{۲} = ۱ \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱e^{x}\cos x + c_۲e^{x}\sin x$$

برای محاسبه y_p مطابق روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۲D + ۲}(۲x - ۲)$$

حال مطابق (۲ ـ ۲۷) عدد ۱ را بر $D^۲ - ۲D + ۲$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه یک باشد زیرا عبارت $۲x - ۲$ از درجه اول است.

$$\begin{array}{l|l} ۱ & ۲ - ۲D + D^۲ \\ \hline ۱ - D + \frac{۱}{۲}D^۲ & \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}D \\ \hline D - \frac{۱}{۲}D^۲ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

بنابراین:

$$y_p = (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}D)(۲x - ۲) = x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = e^{x}(c_۱\cos x + c_۲\sin x) + x$$

با فرض $c_۱ = A\sin\alpha$ و $c_۲ = A\cos\alpha$ گزینه (۳) حاصل می‌شود.

مثال ۴۴. *جواب مسئله مقدار اولیه زیر کدام است؟*

$$\begin{cases} y'' + y' = ۲\sin^۲ x \\ y(۰) = y'(۰) = ۰ \end{cases}$$

۱) $y = \frac{۴}{۵}e^{-x} + x - ۱ - \frac{۱}{۱۰}\sin(۲x) + \frac{۱}{۵}\cos(۲x)$

۲) $y = \frac{۲}{۵}e^{-x} + xe^{x} - \frac{۱}{۱۰}\sin(۲x) + \frac{۱}{۵}\cos(۲x)$

۳) $y = \frac{۲}{۵}e^{x} + x - e^{-x} - \frac{۲}{۵}\sin(۲x) + \frac{۱}{۱۰}\cos(۲x)$

۴) $y = \frac{۴}{۵}e^{-x} - \frac{۴}{۵}e^{-x} - \frac{x}{۱۰}\sin(۲x) + \frac{۱}{۵}\cos(۲x)$

☑ **حل.** گزینه «۱». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + \lambda = ۰ \rightarrow \lambda(\lambda+۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \lambda = ۰ \\ \lambda = -۱ \end{cases}$$

مطابق (۸ـ۲) داریم:

$$y_h = c_۱ + c_۲e^{-x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + D}۲\sin^۲ x = \frac{۱}{D^۲ + D}(۱ - \cos(۲x)) = \frac{۱}{D + ۱}\frac{۱}{D}(۱ - \cos(۲x))$$

$$= \frac{۱}{D+۱}x - \frac{۱}{D+۱}\frac{\sin(۲x)}{۲} = \frac{۱}{D+۱}x - \frac{۱}{۲}\frac{D-۱}{D^۲ - ۱}\sin(۲x)$$

$$\begin{array}{l|l} ۱ & ۱ + D \\ \hline \frac{۱}{۱+D} & ۱ - D \\ \hline \frac{-D}{-D - D^۲} & \\ \hline D^۲ & \end{array}$$

حال مطابق فرمول‌های (۲ـ۲۷) و (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_p = (۱ - D)x - \frac{۱}{۲ - ۴ - ۱}\frac{D-۱}{}\sin(۲x) = x - ۱ + \frac{۱}{۵}\cos(۲x) - \frac{۱}{۱۰}\sin(۲x)$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ + c_۲e^{-x} + x - ۱ + \frac{۱}{۵}\cos(۲x) - \frac{۱}{۱۰}\sin(۲x)$$

بنابراین:

$$y' = -c_۲e^{-x} + ۱ - \frac{۲}{۵}\sin(۲x) - \frac{۱}{۵}\cos(۲x)$$

$$y(۰) = ۰ \rightarrow c_۱ + c_۲ - ۱ + \frac{۱}{۵} = ۰ \rightarrow c_۱ + c_۲ = \frac{۴}{۵}$$

$$y'(۰) = ۰ \rightarrow -c_۲ + ۱ - \frac{۱}{۵} = ۰ \rightarrow c_۲ = \frac{۴}{۵} \rightarrow c_۱ = ۰$$

بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$$y = \frac{۴}{۵}e^{-x} + x - ۱ + \frac{۱}{۵}\cos(۲x) - \frac{۱}{۱۰}\sin(۲x)$$

فرمول ۴: چنانچه $r(x) = ue^{\alpha x}$ که در آن u تابعی برحسب x می‌باشد مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{۱}{F(D)}ue^{\alpha x} = e^{\alpha x}\frac{۱}{F(D+\alpha)}u \qquad (۲۸ـ۲)$$

مثال ۴۵. *حل معادله دیفرانسیل $(D^۲ - ۱)y = ۸xe^{x}$ چیست؟*

۱) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{-x} + \cos x$ ۲) $y = c_۱\cos x + c_۲\sin x + \frac{x}{۲}\sin x$

۳) $y = e^{۲x}(c_۱ + c_۲x + \frac{x^۲}{۲})$ ۴) $y = c_۱e^{-x} + e^{x}(c_۲ - ۲x + ۲x^۲)$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow \lambda = \pm ۱$$

بنابراین مطابق فرمول (۸ـ۲) داریم:

$$y_h = c_۱e^{-x} + c_۲e^{x}$$

برای محاسبه y_p مطابق فرمول (۲ـ۲۸) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲-۱} ۸xe^x = ۸e^x \frac{۱}{(D+۱)^۲-۱} x = ۸e^x \frac{۱}{(D+۲)D} x$$

توجه شود که D نشانگر عملگر مشتق می‌باشد و $\frac{۱}{D}$ نشانگر عملگر انتگرال است بنابراین:

$$y_p = ۴e^x \frac{۱}{D+۲} x^۲$$

حال مطابق فرمول (۲ـ۲۷) عدد ۱ را بر $D+۲$ تقسیم می‌کنیم و عمل تقسیم را تا زمانی که خارج قسمت درجه ۲ شود ادامه می‌دهیم زیرا عبارت $x^۲$ از درجه ۲ می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} ۱ & ۲+D \\ \hline ۱+\frac{D}{۲} & \frac{۱}{۲}-\frac{D}{۴}+\frac{D^۲}{۸} \\ \hline -\frac{D}{۲} & \\ -\frac{D}{۲}-\frac{D^۲}{۴} & \\ \hline \frac{D^۲}{۴} & \end{array}$$

$$y_p = ۴e^x(\frac{۱}{۲}-\frac{D}{۴}+\frac{D^۲}{۸})x^۲ = ۲x^۲e^x - ۲xe^x + e^x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{-x} + c_۲e^x + ۲x^۲e^x - ۲xe^x + e^x = c_۱e^{-x} + e^x(c_۲ + ۱ + ۲x^۲ - ۲x)$$
$$= c_۱e^{-x} + e^x(c + ۲x^۲ - ۲x)$$

مثال ۴۶. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + ۲xy' - ۶y = xLnx$ برابر است با:*

۱) $y = c_۱x^{-۳} + c_۲x^۲ + x\ln x$ ۲) $y = c_۱x^{-۳} + c_۲x^۲ - x\ln x$

۳) $y = c_۱x^{-۲} + c_۲x^۳ + x\ln x$ ۴) $y = c_۱x^{-۲} + c_۲x^۳ - x\ln x$

☑ **حل.** هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با استفاده از تغییر متغیر $u = \ln x$ و به کمک جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + ۲y'_u - ۶y = ue^u \rightarrow y''_u + y'_u - ۶y = ue^u$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + \lambda - ۶ = ۰ \rightarrow (\lambda+۳)(\lambda-۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \lambda = -۳ \\ \lambda = ۲ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_۱e^{-۳u} + c_۲e^{۲u}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و با استفاده از فرمول (۲ـ۲۸) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲+D-۶} ue^u = e^u \frac{۱}{(D+۱)^۲+(D+۱)-۶} u = e^u \frac{۱}{D^۲+۳D-۴} u$$

حال به کمک فرمول (۲ـ۲۷) عدد ۱ را بر $D^۲+۳D-۴$ تقسیم می‌کنیم به طوری که خارج قسمت تقسیم از درجه اول باشد زیرا عبارت u درجه اول می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} ۱ & -۴+۳D+D^۲ \\ \hline ۱-\frac{۳}{۴}D-\frac{۱}{۴}D^۲ & \frac{-۱}{۴}-\frac{۳}{۱۶}D \\ \hline \frac{۳}{۴}D+\frac{۱}{۴}D^۲ & \end{array}$$

$$y_p = e^u(\frac{-۱}{۴}-\frac{۳}{۱۶}D)u = e^u(\frac{-۱}{۴}u - \frac{۳}{۱۶})$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{-۳u} + c_۲e^{۲u} - e^u(\frac{۱}{۴}u + \frac{۳}{۱۶})$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_۱x^{-۳} + c_۲x^۲ - \frac{x}{۴}\ln x - \frac{۳}{۱۶}x$$

فرمول ۵: چنانچه $r(x) = xu$ که در آن u تابعی برحسب x است مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{۱}{F(D)} xu = x\frac{۱}{F(D)}u - \frac{F'(D)}{(F(D))^۲}u \qquad (۲ـ۲۹)$$

مثال ۴۷. *یک جواب خصوصی معادله زیر را بیابید.*

$$y'' + ۲y' + ۳y = x\cos x$$

☑ **حل.** مطابق فرمول (۲ـ۲۹) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲+۲D+۳} x\cos x = x\frac{۱}{D^۲+۲D+۳}\cos x - \frac{۲D+۲}{(D^۲+۲D+۳)^۲}\cos x$$

حال مطابق فرمول (۲ـ۲۶) داریم:

$$y_p = x\frac{۱}{-۱+۲D+۳}\cos x - \frac{۲D+۲}{(-۱+۲D+۳)^۲}\cos x = \frac{x}{۲}\frac{۱}{D+۱}\cos x - \frac{D+۱}{۲(D+۱)^۲}\cos x = \frac{۱}{۲}(x-۱)\frac{۱}{D+۱}\cos x$$
$$= \frac{۱}{۲}(x-۱)\frac{D-۱}{D^۲-۱}\cos x = \frac{۱}{۲}(x-۱)\frac{D-۱}{-۱-۱}\cos x = \frac{-۱}{۴}(x-۱)(-\sin x - \cos x) = \frac{۱}{۴}(x-۱)(\sin x + \cos x)$$

فرمول ۶: چنانچه $r(x)$ مجموع یا تفاضل چند تابع باشد مطابق فرمول زیر داریم:

$$\frac{۱}{F(D)}(u_۱ \pm u_۲ \pm ... \pm u_n) = \frac{۱}{F(D)}u_۱ \pm \frac{۱}{F(D)}u_۲ \pm ... \pm \frac{۱}{F(D)}u_n \qquad (۲ـ۳۰)$$

۲-۹ روش ضرایب نامعین

این روش همانند روش اپراتور معکوس برای محاسبه یک جواب خصوصی معادلات خطی با ضرایب ثابت به کار می‌رود ولی در این روش $r(x)$ باید حتماً یکی از توابع $e^{\alpha x}$ ، $\sin(\beta x+\gamma)$, $\cos(\beta x+\gamma)$، چند جمله‌ای یا ترکیبی از حاصلضرب یا حاصلجمع این توابع باشد در این روش y_p را بر حسب ضرایب مجهول حدس می‌زنیم سپس با صدق دادن y_p در معادله، این ضرایب مجهول را محاسبه می‌نمائیم چگونگی حدس زدن y_p به صورت زیر است:

۱ـ هرگاه $r(x)=ae^{\alpha x}$ آن‌گاه :

$$y_p = Ae^{\alpha x} \qquad (۲\text{ـ}۳۱)$$

۲ـ هرگاه $r(x)=a\cos(\beta x+\gamma)$ یا $r(x)=a\sin(\beta x+\gamma)$ آن‌گاه:

$$y_p = A\cos(\beta x+\gamma)+B\sin(\beta x+\gamma) \qquad (۲\text{ـ}۳۲)$$

۳ـ هرگاه $r(x)=P_n(x)$ که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n است آن‌گاه:

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0 \qquad (۲\text{ـ}۳۳)$$

۴ـ هرگاه $r(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ آن‌گاه :

$$y_p = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0) \qquad (۲\text{ـ}۳۴)$$

۵ـ هرگاه $r(x)=P_n(x)\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x)=P_n(x)\cos(\beta x+\gamma)$ آن‌گاه:

$$y_p = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0)\cos(\beta x+\gamma)+(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1}+\ldots+B_1x+B_0)\sin(\beta x+\gamma) \qquad (۲\text{ـ}۳۵)$$

۶ـ هرگاه $r(x)=ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x)=ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$ آن‌گاه :

$$y_p = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x+\gamma)+B\sin(\beta x+\gamma)) \qquad (۲\text{ـ}۳۶)$$

۷ـ هرگاه $r(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$ یا $r(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$ آن‌گاه:

$$y_p = e^{\alpha x}\left((A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0)\cos(\beta x+\gamma)+(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1}+\ldots+B_1x+B_0)\sin(\beta x+\gamma)\right) \qquad (۲\text{ـ}۳۷)$$

۸ـ هرگاه $r(x)=r_1(x)\pm r_2(x)\pm\ldots\pm r_n(x)$ آن‌گاه:

$$y_p = y_{p_1}+y_{p_2}+\ldots+y_{p_n} \qquad (۲\text{ـ}۳۸)$$

که در آن y_{p_1} جواب خصوصی نظیر $r_1(x)$ ، y_{p_2} جواب خصوصی نظیر $r_2(x)$، ... و y_{p_n} جواب خصوصی نظیر $r_n(x)$ است.

۲-۹-۱ تذکر

در روش ضرایب نامعین هیچ یک از جملات اصلی y_h و y_p نباید یکسان باشند در این صورت y_p را در x^m ضرب می‌کنیم که در آن m کوچکترین عدد طبیعی است که سبب می‌شود هیچ یک از جملات اصلی y_h و y_p یکسان نباشند.

مثال ۴۸. *یک جواب معادله $y''+y=x^2$ عبارت است از:*

۱) $x^2+A\sin x+B\cos x$

۲) $x^2+2+x\cos x$

۳) $x^2-2+x\sin x$

۴) $x^2-2+\sin x$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از :

$$\lambda^2+1=0\rightarrow\lambda=\pm i\rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

بنابراین مطابق فرمول (۲ـ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1\cos x+c_2\sin x$$

چون $r(x)=x^2$ یک چند جمله‌ای درجه دوم است مطابق فرمول (۲ـ۳۳) داریم:

$$y_p = Ax^2+Bx+C$$

حال تذکر (۲ـ۹ـ۱) را بررسی می‌کنیم همانطور که ملاحظه می‌شود y_h دارای جملات اصلی $\sin x$ و $\cos x$ و y_p دارای جملات اصلی x^2 و x و ۱ می‌باشد بنابراین هیچ یک از جملات اصلی y_h و y_p یکسان نیست. حال y_p را در معادله صدق می‌دهیم تا ضرایب A و B و C بدست آید داریم:

$$y_p' = 2Ax+B\rightarrow y_p''=2A$$

$$y''+y=x^2\rightarrow 2A+Ax^2+Bx+C=x^2\rightarrow Ax^2+Bx+(2A+C)=x^2$$

از متحد قرار دادن عبارتهای فوق داریم:

$$\begin{cases}A=1\\ B=0\\ 2A+C=0\rightarrow C=-2\end{cases}$$

بنابراین $y_p=x^2-2$ در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر است :

$$y=y_h+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2-2$$

گزینه ۴ برای $c_1=0$ و $c_2=1$ از روی جواب عمومی فوق حاصل می‌شود لذا گزینه صحیح است.

مثال ۴۹. *حل معادله دیفرانسیل $(D^2-1)y=8xe^x$ چیست؟*

۱) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\cos x$

۲) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$

۳) $y=e^{2x}(c_1+c_2x+\frac{x^2}{2})$

۴) $y=c_1e^{-x}+e^x(c_2-2x+2x^2)$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-1=0\rightarrow\lambda=\pm1$$

بنابراین مطابق فرمول (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_1e^{-x}+c_2e^x$$

حال مطابق (۲ـ۳۴) ، y_p را به صورت زیر حدس می‌زنیم.

$$y_p = e^x(Ax+B)=Axe^x+Be^x$$

مشاهده می‌شود که جمله e^x در y_h و y_p یکسان است لذا مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) y_p را در x ضرب می‌کنیم داریم:

$$y_p = Ax^2e^x+Bxe^x$$

حال y_p را در معادله صدق می‌دهیم داریم:

$$y'_p = 2Axe^x + Ax^2e^x + Be^x + Bxe^x$$

$$y''_p = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x + 2Be^x + Bxe^x$$

$$y'' - y = 8xe^x \rightarrow 2Ae^x + 4Axe^x + 2Be^x = 8xe^x \rightarrow (2A+2B)e^x + 4Axe^x = 8xe^x$$

با متحد قرار دادن عبارات فوق داریم:

$$\begin{cases} 4A = 8 \rightarrow A = 2 \\ 2A + 2B = 0 \rightarrow B = -2 \end{cases}$$

بنابراین $y_p = 2x^2e^x - 2xe^x$ در نتیجه جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^x + 2x^2e^x - 2xe^x = c_1e^{-x} + e^x(c_2 + 2x^2 - 2x)$$

مثال ۵۰. ***یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن*** $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x\cosh x$ ***در حالت کلی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:***

۱) $y_p(x) = x^2(A_0x + A_1)e^x + x^2(B_0x + B_1)e^{-x}$

۲) $y_p(x) = A_0x^2e^x + B_0x^2e^{-x}$

۳) $y_p(x) = x^2(A_0x + A_1)\cosh x + (B_0x + B_1)\sinh x$

۴) $y_p(x) = (A_0x + A_1)e^x + (B_0x + B_1)e^{-x}$

☑ **حل.** گزینه «۴». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

دو بار تکرار

مطابق (۲ ـ ۱۳) برای ریشه تکراری $\lambda = 1$ جمله $c_1e^x + c_2xe^x$ و برای ریشه تکراری $\lambda = -1$ جمله $c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$$

برای محاسبه y_p مطابق روش ضرایب نامعین داریم:

$$r(x) = x\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}xe^x}_{r_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}xe^{-x}}_{r_2(x)}$$

چون $r_1(x) = \frac{1}{2}xe^x$ مطابق فرمول (۲ ـ ۳۴) داریم:

$$y_{p_1} = (A_0x + A_1)e^x$$

با بررسی تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) مشاهده می‌شود که y_h و y_{p_1} دارای جملات اصلی یکسان می‌باشند ضرب y_{p_1} در x^2 سبب می‌شود که جملات اصلی آن با y_h یکسان نباشد بنابراین:

$$y_{p_1} = x^2(A_0x + A_1)e^x$$

چون $r_2(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}$ مطابق فرمول (۲ ـ ۳۴) داریم:

$$y_{p_2} = (B_0x + B_1)e^x$$

که مجدداً مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) با ضرب آن در x^2 داریم:

$$y_{p_2} = x^2(B_0x + B_1)e^x$$

حال مطابق (۲ ـ ۳۸) داریم:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x^2(A_0x + A_1)e^x + x^2(B_0x + B_1)e^{-x}$$

مثال ۵۱. ***شکل کلی پیشنهادی یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل*** $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x\cos x$ ***عبارتست از:***

۱) $y_p(x) = x^2(A_1x + A_2)\cos x$

۲) $y_p(x) = x^2(A_1x + A_2)\cos x + x^2(B_1x + B_2)\sin x$

۳) $y_p(x) = x(A_1x + A_2)\cos x + x(B_1x + B_2)\sin x$

۴) $y_p(x) = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x$

☑ **حل.** گزینه «۲». ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

چون $\pm i$ تکرار شده از مرتبه ۲ می‌باشد مطابق (۲ ـ ۱۴) داریم:

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x$$

به روش ضرایب نامعین چون $r(x) = x\cos x$ مطابق (۲ ـ ۳۵) داریم:

$$y_p = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x$$

حال مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب y_p در x^2 سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = x^2(A_1x + A_2)\cos x + x^2(B_1x + B_2)\sin x$$

۲ـ۱۰ـ معادله خطی مرتبه دوم کامل

معادله خطی مرتبه دوم به شکل:

$$f(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (۳۹\text{ـ}۲)$$

را کامل گوئیم هرگاه $f''(x) - p'(x) + q(x) = 0$ باشد برای حل معادله کامل ابتدا آن را به شکل:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)y' + \big(p(x) - f'(x)\big)y \Big) = r(x) \qquad (۴۰\text{ـ}۲)$$

درمی‌آوریم با انتگرالگیری از طرفین رابطه فوق یک معادله خطی مرتبه اول حاصل می‌شود که با حل آن جواب عمومی معادله بدست می‌آید.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $(x^2 - 2x)y'' + 4(x-1)y' + 2y = e^{2x}$ **را حل کنید.**

حل. با توجه به اینکه $f(x) = x^2 - 2x$ و $p(x) = 4(x-1)$ و $q(x) = 2$ و اینکه:

$$f''(x) - p'(x) + q(x) = 2 - 4 + 2 = 0$$

معادله کامل می‌باشد بنابراین برای حل آن مطابق (۲ـ۴۰) داریم:

$$\frac{d}{dx}\Big((x^2-2x)y'+(4(x-1)-2x+2)y\Big)=e^{2x}$$

حال با انتگرالگیری نسبت به x از طرفین معادله فوق، معادله خطی مرتبه اول زیر حاصل می‌شود.

$$(x^2-2x)y'+2(x-1)y=\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\rightarrow y'+\frac{2(x-1)}{x^2-2x}y=\frac{e^{2x}}{2(x^2-2x)}+\frac{c_1}{x^2-2x}$$

مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$y=e^{-\int\frac{2(x-1)}{x^2-2x}dx}\left[\int e^{\int\frac{2(x-1)}{x^2-2x}dx}(\frac{e^{2x}}{2(x^2-2x)}+\frac{c_1}{x^2-2x})dx+c_2\right]=\frac{1}{x^2-2x}\left[\int(\frac{e^{2x}}{2}+c_1)dx+c_2\right]$$

$$=\frac{1}{x^2-2x}(\frac{1}{4}e^{2x}+c_1x+c_2)=\frac{e^{2x}}{4(x^2-2x)}+\frac{c_1}{x-2}+\frac{c_2}{x^2-2x}$$

۲-۱۱- روش حذف ضریب مشتق

معادله خطی مرتبه دوم زیر مفروض است:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (۴۱-۲)$$

در این روش جواب معادله به صورت $y=uv$ می‌باشد که در آن

$$v=e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx} \qquad (۴۲-۲)$$

و u از حل معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$u''+(q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x))u=\frac{r(x)}{v(x)} \qquad (۴۳-۲)$$

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $y''-(2\tan x)y'-5y=5\tan x$ را حل کنید.

حل. در این معادله $p(x)=-2\tan x$، $q(x)=-5$ و $r(x)=5\tan x$ می‌باشد مطابق (۲-۴۲) داریم:

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int-2\tan xdx}=e^{-\ln(\cos x)}=\frac{1}{\cos x}$$

ضریب u در معادله (۲-۴۳) برابر است با:

$$q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)=-5+(1+\tan^2x)-\tan^2x=-4$$

در نتیجه معادله (۲ـ۴۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$u''-4u=5\sin x$$

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت زیر می‌باشد:

$$\lambda^2-4=0\rightarrow\lambda=\pm2$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$u_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس مطابق (۲-۲۶) داریم:

$$u_p=\frac{1}{D^2-4}5\sin x$$
$$=\frac{1}{-1-4}5\sin x$$
$$=-\sin x$$

در نتیجه:

$$u=u_h+u_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\sin x$$

و جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y=uv=(c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\sin x)\sec x$$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{d^۳y}{dx^۳} - y = x\sin x$ را بنویسید ضرایب نامعین جواب خصوصی را محاسبه نکنید و بطور کلی ذکر نمائید؟ (معدن سراسری ۷۸ ـ ۷۷)

۱) $y = (c_۱ + c_۲x)e^x + (c_۳ + c_۴x)e^{-x} + (A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۲) $y = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\sin x + c_۴\cos x + x(A_۰x + A_۱)\sin x + x(B_۰x + B_۱)\cos x$

۳) $y = (c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\sin x + c_۴\cos x) + (A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۴) $y = c_۱\cos x + c_۲\sin x + (c_۳ + c_۴x)e^x + x(A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲} + x\frac{dy}{dx} + y = ۰$ برابر است با: (معدن ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = x(c_۱\cos(\ln x) + c_۲\sin(\ln x))$ ۲) $y = c_۱x + c_۲x^{-۱}$

۳) $y = c_۱x + c_۲x\ln x$ ۴) $y = c_۱\cos(\ln x) + c_۲\sin(\ln x)$

۳ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $a^۲x = b\frac{d^۲x}{dt^۲} + ۱\frac{dx}{dt} + a^۲x = b$ ($a \neq ۰$ ثابت‌اند) عبارتست از: (مهندسی معدن ـ سراسری ۷۸)

۱) $x(t) = t^{\frac{۱}{۲}}(c_۱\cos(a\ln t) + c_۲\sin(a\ln t)) + \frac{b}{a^۲}$ ۲) $x(t) = c_۱t^a + c_۲t^{-a} + \frac{b}{a^۲}$

۳) $x(t) = c_۱t + c_۲t^{-a^۲} + \frac{b}{a^۲}$ ۴) $x(t) = c_۱\cos(a\ln t) + c_۲\sin(a\ln t) + \frac{b}{a^۲}$

۴ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y = Ae^x + Bxe^x$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی، علوم و صنایع غذایی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y'' - y' + y = ۰$ ۲) $y'' - ۲y = ۰$ ۳) $y'' - ۲y' - y = ۰$ ۴) $y'' - ۲y' + y = ۰$

۵ـ کدام گزینه یک جواب خصوصی معادله $y''' + ۲y'' + y' - ۲y = e^x + \cos x$ می‌باشد. (مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۱۰}(\sin x - ۲\cos x)$ ۲) $\frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۱۰}(\sin x + ۲\cos x)$

۳) $\frac{۱}{۴}e^x - \frac{۱}{۱۰}(\sin x + ۲\cos x)$ ۴) $\frac{۱}{۴}e^x - \frac{۱}{۱۰}(\sin x - ۲\cos x)$

۶ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + y = ۰$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = Ax^۲e^x$ ۲) $y = Axe^x$ ۳) $y = Axc^x + Bx$ ۴) $y = (Ax + B)e^x$

۷ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - ۴y' + ۵y = ۲e^{۳x}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = Ae^{۲x}\sin(x + \alpha) - e^{۳x}$ ۲) $y = Ae^{۲x}\sin(۲x + \alpha) + e^{۳x}$

۳) $y = Ae^{۲x}\sin(۲x + \alpha) - ۲e^{۳x}$ ۴) $y = Ae^{۲x}\sin(x + \alpha) + e^{۳x}$

۸ـ کدامیک از توابع داده شده در معادله $y'' - ۲y' - ۳y = ۳e^{۴x}$ صدق می‌کنند؟ (مهندسی صنایع ـ مدیریت سیستم بهره‌وری و اقتصاد اجتماعی ـ سراسری ۷۸)

۱) $e^x - e^{۲x}$ ۲) $e^x + e^{۲x}$ ۳) $e^{۳x} - e^{۲x}$ ۴) $e^{۳x} + e^{۲x}$

۹ـ عدد مثبت و صحیح n را طوری بیابید که معادله $y'' - ۴y' + ۴y = e^{۲x}$ دارای جواب خصوصی $y_p = Ax^ne^{۲x}$ باشد. (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰ـ مقدار ab چه باشد تا $y_۱ = e^{-۲x}$ و $y_۲ = e^{۳x}$ دو جواب مستقل خطی معادله $y'' + ay' + by = ۰$ باشد. (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۸)

۱) ۶ ۲) ـ۴ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۱ـ معادله دسته منحنی‌های گذرنده از مبدأ مختصات با معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ $y'' - ۴y' + ۵y = ۰$ (مهندسی شیمی ـ مخازن هیدروکربوری ـ سراسری ۷۸)

۱) $y = Ae^{۲x}\sin x$ ۲) $y = Ae^x\sin(۲x)$

۳) $y = Ae^{۲x}(\cos x - ۱)$ ۴) $y = Ae^x(\cos(۲x) - ۱)$

۱۲ـ معادله $y'' - \frac{۲}{x^۲}y = ۰$ با شرایط $y(۱) = ۰$ و $y'(۱) = ۳$ مفروض است مقدار y در $x = ۲$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۲

۱۳ـ معادله $y'' + ۴y = \sin(۲x)$ با شرایط $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۱$ مفروض است مقدار y در $x = \frac{\pi}{۴}$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) ۸ ۴) ۵

۱۴ـ در معادله $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - n^۲)y = ۰$ چنانچه تغییر متغیر $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ داده شود معادله زیر حاصل می‌شود. (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) $x^۲u'' + (۱ - \frac{n^۲ - \frac{۱}{۴}}{x^۲})u = ۰$ ۲) $u'' - (۱ - \frac{n^۲ - \frac{۱}{۴}}{x^۲})u = ۰$

۳) $u'' + (۱ - \frac{n^۲ - \frac{۱}{۴}}{x^۲})u = ۰$ ۴) $u'' + (۱ + \frac{n^۲ + \frac{۱}{۴}}{x^۲})u = ۰$

۱۵ـ حل معادله $y^{(۴)} + ۵y'' + ۴y = ۰$ با شرایط اولیه $y(۰) = ۱, y'(۰) = -۱, y''(۰) = ۱$ و $y'''(۰) = ۰$ در $x = \pi$ برابر است با: (مهندس معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{-۷}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{-۵}{۳}$

۱۶ـ حل کلی معادله $xy'' + xy' - y = ۰$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) $c_۱x^۲ + c_۲x\int\frac{e^{-x}}{x}dx$ ۲) $c_۱x + c_۲x\int\frac{e^{-x}}{x^۲}dx$ ۳) $c_۱x + c_۲x^۲\int\frac{e^x}{x}dx$ ۴) $c_۱x + c_۲x\int\frac{e^x}{x^۲}dx$

۱۷ـ معادله $y'' + ۴y = \sin(۲t)$ با شرایط $y(۰) = ۱$, $y'(۰) = ۱$ مفروض است مقدار y در $t = \pi$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $۱ - \frac{\pi}{۴}$ ۲) $۱ + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $-۱ - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $-۱ + \frac{\pi}{۴}$

۱۸ـ معادله $y'' + 4y = \sin(2t)$ باشرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ مفروض است مقدار y در $t = \frac{\pi}{2}$ برابر است با:

(مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $1 - \frac{\pi}{8}$ ۲) $1 + \frac{\pi}{4}$ ۳) $-1 + \frac{\pi}{4}$ ۴) $-1 + \frac{\pi}{8}$

۱۹ـ معادله $y = 0$ $(x^2 - \frac{1}{4})y + xy' + x^2 y''$ باتبدیل $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ به شکل زیر بدست می‌آید. (مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $u'' - u = 0$ ۲) $u'' - \frac{1}{4}u = 0$ ۳) $u'' + 4u = 0$ ۴) $u'' + u = 0$

۲۰ـ معادله $y'' + y = x^2 + 2$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ مفروض است مقدار y در $x = \pi$ برابر است با:

(مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) π ۲) π^2 ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۱ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی پلیمر و تکنولوژی رنگ ـ آزاد ۷۸)

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

۱) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x$ ۲) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

۳) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ ۴) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

۲۲ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مجموعه صنایع پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$y'' - 2y' + y = 0$$

۱) $y = c_1 e^{-x} + c_2 c^{x}$ ۲) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{x^2}$ ۳) $y = c_1 x e^{x} + c_2 x^2 e^{x}$ ۴) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

۲۳ـ جواب هموژن معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مجموعه صنایع پلیمر ـ آزاد ۷۸)

$$y'' + 3y' + 2y = 2x + 1$$

۱) $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ ۲) $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

۳) $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-2x}$ ۴) $y_h = c_1 x e^{-x} + c_2 x^2 e^{-2x}$

۲۴ـ حل معادله زیر کدام است؟ (مجموعه سازه‌های هیدرولیکی ـ آزاد ۷۸)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -4x + 3y + 10\cos t \end{cases}$$

۱) $x = (A+B)e^{2t} - (A+B)\sin t \cos t$ ۲) $x = \frac{A}{B}e^{-t}$

۳) $x = (A-B)e^{2t} - (A-B)\sin t \cos t$ ۴) $x = Ae^{-t} + Be^{2t} - 3\cos t - \sin t$

۲۵ـ صورت کلی یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی و ناهمگن زیر کدام است؟

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x\sin x$$

(مجموعه مواد شناسایی و انتخاب ـ آزاد ۷۸)

۱) $y_p = x^2(A_1 x + A_2)\cos x + x^2(B_1 x + B_2)\sin x$

۲) $y_p = x^2(A_1 x + A_2)\sin x$

۳) $y_p = x(A_1 x + A_2)\cos x + x(B_1 x + B_2)\sin x$

۴) $y_p = x(A_1 x + A_2)\cos x + (B_1 x + B_2)\sin x$

۲۶ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$, $x > 0$ برابر است با:

(مجموعه مواد شناسایی و انتخاب ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = x^{-1}(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x))$ ۲) $y = x(c_1 + c_2 \ln x)$

۳) $y = x(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x))$ ۴) $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

۲۷ـ جواب معادله $x^2 y'' + 7xy' + 13y = 0$ وقتی $x \to 0$ به سمت کدام یک از اعداد زیر میل می‌کند؟

(مجموعه مواد و سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۰ ۴) ∞

۲۸ـ جواب خصوصی $y'' + y = \sin x$ به کدام یک از صورتهای زیر است: (مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = a\sin x$ ۲) $y = a\cos x + b\sin x$

۳) $y = a\cos x$ ۴) $y = x(a\cos x + b\sin x)$

۲۹ـ جواب خصوصی معادله $y'' + y = \sec x$ در $x = \frac{\pi}{2}$ دارای کدام یک از مقادیر زیر است؟

(مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) ۱ ۲) ∞ ۳) ۰ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۰ـ اگر x و $\frac{1}{x}$ و ۱ سه جواب یک معادله دیفرانسیل باشند کدام گزینه صحیح است؟ (مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) جوابها وابسته خطی هستند. ۲) جوابهای مستقل خطی هستند.

۳) جوابها گاهی مستقل و گاهی وابسته خطی هستند. ۴) جوابهای مستقل خطی هستند و نه وابسته خطی

۳۱ـ معادله $y'' + y = 0$ دارای جواب ..... نیست. (مجموعه هواشناسی کشاورزی ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = c^{ix}$ ۲) $y = c\cos x$ ۳) $y = c\sin x$ ۴) $y = e^{x}$

۳۲ـ معادله معادل مرتبه دوم سیستم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ برابر است با:

(مجموعه مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$ ۲) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$ ۳) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ ۴) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$

۳۳ـ شرط اینکه معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + axy' + by = 0$ دارای جواب $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$ باشد آن است که :

(مجموعه مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $a = b$ ۲) $a = \sqrt{b} - 1$ ۳) $a = 2\sqrt{b} + 1$ ۴) $a = 2b + 1$

۳۴ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $4x^2 y'' + 4xy' - y = 0$ در صورتی که یک جواب خصوصی آن $y = x^c$ (c عدد ثابت است) باشد کدام است؟ (مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = c_1 x + c_2 x^2$ ۲) $y = c_1 x - c_2 x^2$ ۳) $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 \frac{\sqrt{x}}{x}$ ۴) $y = c_1 x - c_2 \sqrt{x}$

۳۵ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ عبارت است از: (مجموعه مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = c_1 e^{x} + e^{\frac{-x}{2}}(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$ ۲) $y = c_1 c^{x} + e^{\frac{x}{2}}(c_2 \cos(\sqrt{2}x) + c_3 \sin(\sqrt{2}x))$

۳) $y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(c_2 \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \sin(\sqrt{3}x))$ ۴) $y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}(c_2 \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x))$

۳۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + yy' = 0$ عبارت است از: (مجموعه مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = -2\tan(x+c)$ ۲) $y = c$ ۳) $y = x - c$ ۴) $y = x^2 - 3x + c$

۳۷ـ حل معادله زیر کدام است؟ (مجموعه عمران سازه و عمران خاک و پی ـ آزاد ۷۸)

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 1$$

۱) $y = 3e^x - e^{-2x}$ ۲) $y = \frac{3}{2}e^x$ ۳) $y = 3e^x - x$ ۴) $y = 3e^x + e^{-2x}$

۳۸ـ حل دستگاه معادلات زیر کدام است؟ (مجموعه عمران سازه و عمران خاک و پی ـ آزاد ۷۸)

$$\begin{cases} \dot{y} = -4x + 3y + 10\cos\alpha \\ \dot{x} = -2x + y \end{cases}$$

۱) $x(\alpha) = (c_1 + c_2)e^{-\alpha} - (1 - c_2)\sin\alpha$ ۲) $x(\alpha) = c_1 e^{-\alpha} + c_2 e^{-2\alpha}$

۳) $x(\alpha) = c_1 e^{-\alpha} - c_2 e^{-2\alpha}$ ۴) $x(\alpha) = c_1 e^{-\alpha} + c_2 e^{2\alpha} - 3\cos\alpha - \sin\alpha$

۳۹ـ معادله $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$ با شرایط $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1, y''(0) = 0$ مفروض است مقدار y در $x = 2\pi$ برابر است با: (مجموعه تکنولوژی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

۴۰ـ حل معادله زیر کدام است؟ (مجموعه مکانیک تبدیل انرژی و طراحی جامدات ـ آزاد ۷۸)

$$y'' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \; ; \; y(0) = 1 \; , \; y'(0) = 0$$

۱) $y = x\sin^{-1}x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ۲) $y = x\sin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

۳) $y = x^{-1}\sin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ۴) $y = x\sin^{-1}x - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

۴۱ـ جواب معادله $y'' - 4y' + 4y = 0$ با شرایط $y(0) = 3$ و $y'(0) = 4$ کدام است؟ (مجموعه مکانیک تبدیل انرژی و طراحی جامدات ـ آزاد ۷۸)

۱) $y = 3e^{2x} - 2xe^{2x}$ ۲) $y = e^{2x}(2x+3)$ ۳) $y = 3e^x - 2xe^x$ ۴) $y = e^{2x}(2x-3)$

۴۲ـ فرکانس و دامنه حرکت هارمونیک تشریح شده است جواب مسأله زیر کدام است؟

$$y'' + 64y = 0 \; ; \; y(0) = -3 \; , \; y'(0) = 32$$

(مجموعه مکانیک تبدیل انرژی و طراحی جامدات ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{4}{\pi}$ و ۵ ۲) $\frac{1}{\pi}$ و ۱۳ ۳) $\frac{1}{\pi}$ و ۵ ۴) $\frac{4}{\pi}$ و ۱۰

۴۳ـ جواب کلی معادله $y'' + 2y' + 10y = 0$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = Ae^{-2x}\cos(x+\alpha)$ ۲) $y = Ae^{x}\cos(3x+\alpha)$

۳) $y = Ae^{2x}\sin(x+\alpha)$ ۴) $y = Ae^{-x}\sin(3x+\alpha)$

۴۴ـ معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y = (Ax+B)e^x$ به کدام صورت است؟ (مهندسی کشاورزی و علوم وصنایع غذایی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y'' - y' + 2y = 0$ ۲) $y'' + 2y' + y = 0$ ۳) $y'' - 2y' + y = 0$ ۴) $y'' + y' + 2y = 0$

۴۵ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''' - y' = 0$ به کدام صورت است؟ (مهندسی کشاورزی و علوم وصنایع غذایی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = Ae^x + Be^{-x} + C$ ۲) $y = (Ax+B)e^x$

۳) $y = A\sin x + B\cos x + C$ ۴) $y = x(Ae^x + Be^{-x})$

۴۶ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ کدام است؟ (مهندسی کشاورزی و آبیاری و زمکشی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = (Ax+B)e^x + x$ ۲) $y = Ae^{2x} + Bx + e^x$

۳) $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + x - 1$ ۴) $y = Ae^x + Be^{2x} + x$

۴۷ـ جواب معادله دیفرانسیل $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x + c_1\text{Aresin}\,x + c_2$ ۲) $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{4}x + c_1\text{Arc tan}\,x + c_2$

۳) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x + c_1\text{Arc tan}\,x + c_2$ ۴) $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + c_1\text{Arc tan}\,x + c_2$

۴۸ـ با فرض اینکه $y = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است جواب عمومی آن کدامیک از گزینه‌های داده شده است. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad |x| \le 1$$

۱) $y = c_2(\frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 1) + c_2 x$ ۲) $y = c_2 x^2 + c_2(\ln(\frac{1+x}{1-x}) + 1)$

۳) $y = c_2 x + c_2(\ln(\frac{1+x}{1-x}) - 1) + x^2$ ۴) $y = c_2\ln(\frac{1+x}{1-x}) + c_2 x$

۴۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

$$(D^2 + 4)y = 8\sin(2x)$$

۱) $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + x\sin(2x)$

۲) $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - 2x\sin(2x)$

۳) $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + x\cos(2x)$

۴) $y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - 2x\cos(2x)$

۵۰ـ کدامیک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + (y')^3 e^{2y} = 0$ است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $4x - e^{2y} = c$ ۲) $4x - \frac{1}{2}e^{2y} = c$ ۳) $2x + \frac{1}{2}e^{2y} = c$ ۴) $4x + \frac{1}{2}e^{2y} = c$

۵۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

$$(D^2 - \frac{3}{x}D + \frac{3}{x^2})y = 2x - 1$$

۱) $y = c_1 x^2 + c_2 x + x^4\ln x + x^3$ ۲) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^3 + \ln x$

۳) $y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^4\ln x + x^4$ ۴) $y = c_1 x^3 + c_2 x + x^3\ln x + x^2$

۵۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ برابر است با: (مهندسی مکانیک منگ ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = x(c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x))$ ۲) $y = c_1 x + c_2 x^{-1}$

۳) $y = e_1 x + c_2 x\ln x$ ۴) $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$

۵۳ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{d^۴y}{dx^۴} - y = x\sin x$ را بنویسید. ضرایب نامعین جواب خصوصی را محاسبه نکنید و بطور کلی ذکر نمائید. (مهندسی مکانیک سنگ ـ سراسری ۷۹)

۱) $y = (c_۱ + c_۲x)e^x + (c_۳ + c_۴x)e^{-x} + (A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۲) $y = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\sin x + c_۴\cos x + x(A_۰x + A_۱)\sin x + x(B_۰x + B_۱)\cos x$

۳) $y = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\sin x + c_۴\cos x + (A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۴) $y = c_۱\cos x + c_۲\sin x + (c_۳ + c_۴x)e^{-x} + (A_۰x + A_۱)\sin x + (B_۰x + B_۱)\cos x$

۵۴ـ کدام شرط روی α و β برقرار باشد تا وقتی $x \to \infty$ تمام جوابهای معادله اویلر به طرف صفر میل کنند؟

$x^۲y'' + \alpha xy' + \beta y = ۰ \quad , \quad x > ۰$

(مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\beta > ۰ \ , \ \alpha > ۱$ ۲) $\beta > ۰ \ , \ \alpha = ۱$ ۳) $\beta > ۰ \ , \ \alpha < ۱$ ۴) $\beta < ۰ \ , \ \alpha > ۱$

۵۵ـ جواب خصوصی معادله $y'' + ۹y = e^x\cos(۲x)$ در $x = ۰$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲۶}$

۵۶ـ یک جواب خاص معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + y = \sin(۲x)$ کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y_p = \frac{۴}{۲۵}\cos(۲x) + \frac{۳}{۲۵}\sin(۲x)$ ۲) $y_p = \frac{۴}{۲۵}\cos(۲x) - \frac{۳}{۲۵}\sin(۲x)$

۳) $y_p = \frac{۳}{۲۵}\cos(۲x) + \frac{۴}{۲۵}\sin(۲x)$ ۴) $y_p = \frac{۳}{۲۵}\cos(۲x) - \frac{۴}{۲۵}\sin(۲x)$

۵۷ـ یک جواب خاص معادله دیفرانسیل $y'' - ۶y' - ۷y = e^{۳x}$ کدام است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۹)

۱) $y_p = \frac{۱}{۳}xe^{۳x}$ ۲) $y_p = \frac{۱}{۵}xe^{۳x}$ ۳) $y_p = \frac{۱}{۵}e^{۳x}$ ۴) $y_p = \frac{۱}{۳}e^{۳x}$

۵۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ۴y = ۲\sin(۲x)$ با شرایط $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = \frac{-۱}{۲}$ کدام است؟

(مهندسی انرژی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = \sin(۲x) - \frac{x}{۲}\cos(۲x)$ ۲) $y = \sin(۲x) + \cos(۲x) + \frac{x}{۲}\cos(۲x)$

۳) $y = \cos(۲x) - \frac{x}{۲}\cos(۲x)$ ۴) هیچکدام

۵۹ـ جواب معادله $yy'' + (y')^۲ + ۱ = ۰$ چیست؟ (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = x^۲ - x - \frac{۱}{۲}c_۱e^{-۲x} + c_۲$ ۲) $(x + c_۱)^۲ + y^۲ = c_۲^۲$

۳) $x^۲ + y^۲ = ۱$ ۴) $(y - c_۱)^۲ = ۴c_۲x$

۶۰ـ معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲S}{dt^۲} + \frac{dS}{dt} = t + e^{-t}$ با شرایط $S(۰) = ۰ \ , \ S'(۰) = ۰$ مفروض است هرگاه $t = ۱$ باشد آن گاه S برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۹)

۱) $۳ - \frac{۳}{۲}e^{-۱}$ ۲) $\frac{۳}{۲}(۱ - e)$ ۳) $\frac{۳}{۲}(۱ - e^{-۱})$ ۴) $\frac{۳}{۲} - ۳e^{-۱}$

۶۱ـ معادله $\frac{d^۲I}{dt^۲} + ۹I = ۱۲\cos(۳t)$ با شرایط $I(۰) = ۴ \ , \ I'(۰) = ۰$ مفروض است مقدار I در $t = \frac{\pi}{۳}$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۹)

۱) -۱۲ ۲) ۰ ۳) ۱۲ ۴) -۴

۶۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + ۱۰xy' + ۸y = ۰$ عبارتست از: (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = x^{-۱}(c_۱ + c_۲\ln x)$ ۲) $y = x^۲(c_۱ + c_۲\ln x)$

۳) $y = x^{-۲}(c_۱ + c_۲\ln x)$ ۴) $y = x(c_۱ + c_۲\ln x)$

۶۳ـ معادله $y'' - y = ۱$ با شرایط $y(۰) = ۰, y'(۰) = ۰$ در $x = -۱$ دارای پاسخی است برابر با: (مهندسی برق ـ آزاد ۷۹)

۱) $-۲ + e^{-۱}$ ۲) $e^{-۱}$ ۳) $-۱ + e^{-۲}$ ۴) $۱ + e^{-۱}$

۶۴ـ حل معادله دیفرانسیل $y'' + y = ۱$ با شرایط اولیه $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = -۲$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = t + \cos t + ۳\sin t$ ۲) $y = t + ۳\cos t + \sin t$ ۳) $y = t + \cos t - ۳\sin t$ ۴) $y = t + \cos t + ۳\sin t$

۶۵ـ اگر $y'' + ۴y = ۸x^۲$ (مجموعه هواشناسی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = A\cos x + B\sin x + ۲x$ ۲) $y = A\cos(۲x) + B\sin(۲x) + ۲x^۲ - ۱$

۳) $y = A\cos(۲x) + B\sin(۲x) + x^۲$ ۴) $y = c_۱e^{۲x} + c_۲e^{۲x} + ۲x$

۶۶ـ جواب معادله $۲x^۲y'' - ۳xy' - ۳y = ۰$ برابر است با: (مجموعه هواشناسی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = ۴x^{-۲} + ۲۲x^۳$ ۲) $y = ۴x^{\frac{-۱}{۲}} + ۲۲x^۳$ ۳) $y = ۴x^{-۱} + ۲۲x^۲$ ۴) $y = ۴x^{\frac{-۱}{۲}} - ۲۲x^۳$

۶۷ـ معادله دیفرانسیل $y'' - ۹y = x$ دارای جواب: (مجموعه هواشناسی ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = c_۱e^{-۳x} + c_۲e^{۳x} - \frac{x}{۹}$ ۲) $y = c_۱e^{۳x} + c_۲e^{۴x} - x$

۳) $y = c_۱e^{۳x} - c_۲e^{۲x} + x$ ۴) $y = \cos(۳x) + \sin(۳x)$

۶۸ـ جواب خصوصی معادله با طرف ثانی $y''' - ۵y'' + ۸y' - ۴y = e^{۲x}$ کدام است؟

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}(x^۲ - ۲x)$ ۲) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}(x^۲ + ۲)$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}(x + ۲)$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^{۲x}(x^۲ - ۲x + ۲)$

۶۹ـ جواب خصوصی معادله $y''' - y'' + ۴y' - ۴y = \sin(۳x)$ کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) $y_p = \frac{۱}{۵۰}(\sin(۳x) + ۳\cos(۳x))$ ۲) $y_p = \frac{-۱}{۵۰}(\sin(۳x) + ۳\cos(۳x))$

۳) $y_p = \frac{۱}{۵۰}(۳\sin(۳x) + \cos(۳x))$ ۴) $y_p = \frac{-۱}{۵۰}(۳\sin(۳x) + \cos(۳x))$

۷۰ـ با تغییر متغیر $x = f(t)$ معادله دیفرانسیل $(۲x+۱)^۲y'' + ۳(۲x+۱)y' + ۳y = ۲x + ۱$ به معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل شده است طرف ثانی معادله تبدیل شده کدام است؟ (مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۰)

۱) e^t ۲) $e^t - ۱$ ۳) $\frac{۱}{۲}e^t + ۱$ ۴) $۲e^t + ۱$

۷۱ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' - ۲y'' + ۳y' - ۲y = e^x$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱}{۲}xe^x$ ۲) $\frac{۱}{۲}x^۲e^x$ ۳) $۲xe^x$ ۴) $۲x^۲e^x$

۷۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + xy' + ۹y = ۰$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = c_۱\cos(\ln(۲x)) + c_۲\sin(\ln(۲x))$ ۲) $y = c_۱\cos(۳x) + c_۲\sin(۳x)$

۳) $y = c_۱\cos(۳\ln x) + c_۲\sin(۳\ln x)$ ۴) $y = c_۱\cos(۲x) + c_۲\sin(۲x)$

۷۳ـ اگر $y(x)$ جواب معادله $e^{-x}y''' + xy' + y = ۳$ با شرایط اولیه $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ باشد آنگاه $y''(۰)$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۵ ۴) با اطلاعات فوق نمی‌توان آن را بدست آورد.

۷۴ـ اگر $y(t)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $t^۲\frac{d^۲y}{dt^۲} + ۳t\frac{dy}{dt} + by = ۰$ باشد به قسمی که $y(۱) = ۰$ آنگاه کلیه مقادیری از ثابت حقیقت b که به ازای آنها جواب مذکور در زمانهای بعد کراندار (محدود) باقی می‌ماند کدام است؟

(مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۰)

۱) $b < ۰$ ۲) $b > ۰$ ۳) $b > ۱$ ۴) $۰ < b < ۱$

۷۵ـ پاسخ معادله دیفرانسیل $x^۲y'' - ۳xy' + ۴y = ۰$ با شرایط $y(۱) = ۱$ و $y'(۱) = ۱$ با کدام گزینه برابر است؟

(مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۰)

۱) $x^۲ + x$ ۲) $(۱ - \ln x)x$ ۳) $(۱ + \ln x)x^۲$ ۴) $(۱ - \ln x)x^۲$

۷۶ـ کدام گزینه کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل $۲yy'' + (y')^۲ = ۰$ را نشان می‌دهد؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۰)

۱) $y^{\frac{۳}{۲}} = c_۱x + c_۲$ ۲) $(-y)^{\frac{۳}{۲}} = c_۱x + c_۲$

۳) $|y|^{\frac{۳}{۲}} = c_۱x + c_۲$ ۴) $c_۱ + y^{\frac{۳}{۲}} = x + c_۲$

۷۷ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - ۴xy' + ۴x^۲y = xe^{x^۲}$ کدام است؟ (راهنمایی: از تغییر متغیر $y = ve^{x^۲}$ استفاده کنید)

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = e^{x^۲}(c_۱\cos(\sqrt{۲}x) + c_۲\sin(\sqrt{۲}x)) + \frac{۱}{۲}xe^{-x^۲}$

۲) $y = e^{-x^۲}(c_۱\cos(\sqrt{۲}x) + c_۲\sin(\sqrt{۲}x)) - \frac{۱}{۲}xe^{-x^۲}$

۳) $y = e^{x^۲}(c_۱\cos(\sqrt{۲}x) + c_۲\sin(\sqrt{۲}x)) + \frac{۱}{۲}xe^{x^۲}$

۴) $y = e^{-x^۲}(c_۱\cos(\sqrt{۲}x) + c_۲\sin(\sqrt{۲}x)) - \frac{۱}{۲}xe^{x^۲}$

۷۸ـ مسأله مقدار اولیه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۴\frac{d^۲y}{dt^۲} - y = ۰ \\ y(۰) = ۲ \ , \ y'(۰) = \beta \end{cases}$$

به ازای چه مقدار β وقتی $t \to +\infty$ جواب مسأله به طرف صفر میل می‌کند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۷۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + ۴y = ۳\sin(۲x)$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = c_۱\cos(۲x) + c_۲\sin(۲x) - \frac{۳}{۴}\cos(۲x)$

۲) $y = c_۱\cos(۲x) + c_۲\sin(۲x) - \frac{۳}{۴}\sin(۲x)$

۳) $y = c_۱\cos(۲x) + c_۲\sin(۲x) - \frac{۳}{۴}x\cos(۲x)$

۴) $y = c_۱\cos(۲x) + c_۲\sin(۲x) + \frac{۳}{۴}\cos(۲x) - \frac{۳}{۴}\sin(۲x)$

۸۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

$$x^۲y'' - ۳xy' + ۴y = ۰ \ , \ x > ۰$$

۱) $y = c_۱x^۲ + c_۲x^۲$ ۲) $y = c_۱e^{۲x} + c_۲xe^{۲x}$

۳) $y = c_۱x + c_۲x\ln x$ ۴) $y = c_۱x^۲ + c_۲x^۲\ln x$

۸۱ـ فرم خصوصی معادله $\frac{d^۳y}{dx^۳} + ۴\frac{dy}{dx} = ۵x\cos(۲x)$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = (A_۰x + A_۱)\cos(۲x) + (B_۰x + B_۱)\sin(۲x)$

۲) $y = x(A_۰ + A_۱\cos(۲x) + A_۲\sin(۲x))$

۳) $y = x(A_۰x\cos(۲x) + A_۱x\sin(۲x))$

۴) $y = x((A_۰x + A_۱)\cos(۲x) + (B_۰x + B_۱)\sin(۲x))$

۸۲ـ معادله دیفرانسیل $(۱ - x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲} - x\frac{dy}{dx} + y = ۰$ با تغییر متغیر $x = \sin t$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

(مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{d^۲y}{dt^۲} - \frac{dy}{dt} + y = ۰$ ۲) $\frac{d^۲y}{dt^۲} + y = ۰$

۳) $\frac{d^۲y}{dt^۲} + \frac{dy}{dt} + y = ۰$ ۴) $\frac{d^۲y}{dt^۲} - (\sin t)\frac{dy}{dt} + y = ۰$

۸۳ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

$$x^۲y'' - xy' + y = ۰$$

۱) $y = c_۱x + c_۲x\ln x$ ۲) $y = c_۱x + c_۲x^۲\ln x$

۳) $y = c_۱x\sin x + c_۲x\ln x$ ۴) $y = c_۱x^۲ + c_۲x\ln x$

۸۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل دسته دوم خطی $\frac{d^۳y}{dx^۳}+۴\frac{dy}{dx}=sin(۲x)$ عبارتست از: (مهندسی هوا ـ فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $y=A+B\sin(۲x)+C\cos(۲x)-\frac{x}{۸}\cos(۲x)$
۲) $y=A+B\sin(۲x)+C\cos(۲x)-\frac{x}{۸}\sin(۲x)$
۳) $y=A+Be^{۲x}+Ce^{-۲x}-\frac{x}{۸}\sin(۲x)$
۴) $y=A+Be^{۲x}+Ce^{-۲x}-\frac{x}{۸}\cos(۲x)$

۸۵ـ کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر دارای جوابهای مستقل خطی $xe^{۲x}, e^{۲x}, x, ۱$ می‌باشند؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $D^۲(D+۲)^۲y=۰$
۲) $D^۲(D-۲)^۲y=۰$
۳) $D^۲(D^۲-۲)y=۰$
۴) $D^۲(D^۲+۲)y=۰$

۸۶ـ حل معادله $\frac{d^۲y}{dx^۲}=x(\frac{dy}{dx})^۳$ عبارتست از: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۰)

۱) $y=c_۱\sin(x-c_۲)$
۲) $x=c_۱\sin(y-c_۲)$
۳) $x=c_۱\cos(y-c_۲)$
۴) $y=c_۱\cos(x-c_۲)$

۸۷ـ معادله $y''+y=۰$ با شرایط $y(۰)=۱$ و $y'(۰)=۱$ مفروض است مقدار y در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰
۲) π
۳) $-\pi$
۴) ۱

۸۸ـ به ازای چه مقادیر از λ تابع $e^{\lambda x}$ حل معادله $y''-۵y'+۶y=۰$ است. (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ و ۳
۲) ۶ و ۵-
۳) ۵ و ۶-
۴) ۳- و ۲-

۸۹ـ ازای چه مقادیری از λ تابع $e^{\lambda x}$ حل معادله $y''-۲y'+y=۰$ است. (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۱ و ۱-
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

۹۰ـ تابع $f(t)=\frac{۱}{(D-۱)^۲}(\frac{e^t}{t^۲})$ که در آن $D=\frac{d}{dt}$ است برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $e^t\ln t$
۲) te^t
۳) $-e^t\ln\ln t$
۴) $t^۲e^t$

۹۱ـ معادله دیفرانسیل $t^۲\frac{d^۲y}{dt^۲}+\alpha t\frac{dy}{dt}+y=۰$ مفروض است که در آن α یک پارامتر حقیقی ثابت است کلیه مقادیری از α که به ازای آنها جواب‌های معادله دیفرانسیل نوسانی است عبارتند از: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $۱<\alpha<۳$
۲) $\alpha=۱$
۳) $-۱<\alpha<۳$
۴) $\alpha=۰$

۹۲ـ معادله $y''+y=۰$ با شرایط $y(۰)=-۱$ و $y'(۰)=۱$ مفروض است مقدار y در $x=\pi$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۱-
۴) π

۹۳ـ اگر $y''+۴y'+۴y=۰$ و $y(۰)=۰$ و $y'(۰)=a$ آنگاه $\lim_{t\to\infty}y(t)$ چه خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ∞
۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۴ـ حل عمومی معادله $x^۲y''+۵xy'+۴y=۰$ را برای $x>۰$ بیابید. (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $y=x^{-۱}(c_۱+c_۲\ln x)$
۲) $y=x^{-۲}(c_۱+c_۲x\ln x)$
۳) $y=x^{-۱}(c_۱+c_۲x\ln x)$
۴) $y=x^{-۲}(c_۱+c_۲\ln x)$

۹۵ـ معادله $yy''=۲(y')^۲-۲y'$ را حل نمایید. (مهندسی محیط زیست ـ آزاد ۸۰)

۱) $Ay^۲=\tan(Ax-B)$
۲) $Ay=\tan(Ax+B)$
۳) $A=y\tan(Ax+B)^{-۱}$
۴) $y=A\tan(Ax+B)^{-۱}$

۹۶ـ مساله $y''+۱۶y=۰$ با شرایط $y(۰)=۰$ و $y(\frac{\pi}{۲})=۱$ دارای: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) دو جواب است.
۲) تنها یک جواب است.
۳) هیچ جواب است.
۴) بی‌نهایت جواب است.

۹۷ـ توابع $f(x)=x$ ، $g(x)=|x|$ و $x\in(-\infty,\infty)$ (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) وابسته خطی هستند و رونسکین آنها قابل محاسبه نیست.
۲) وابسته خطی هستند.
۳) مستقل خطی هستند و رونسکین آنها قابل محاسبه نیست.
۴) مستقل خطی هستند و رونسکین آنها قابل محاسبه است.

۹۸ـ هرگاه یک جواب معادله $x^۲y''-۳xy'+۴y=۰$ به صورت $y=x^۲$ باشد آنگاه جواب دیگر آن عبارت است از: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $x\ln x+x^۲$
۲) $x^۳+۳x$
۳) $x^۲\ln x$
۴) $\ln x+\frac{x}{\ln x}$

۹۹ـ جواب مساله $y''-۴y'+۱۳y=۰$ با شرایط $y(۰)=-۱$ و $y'(۰)=۲$ وقتی $x\to-\infty$: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) برابر ∞ است.
۲) نامشخص است.
۳) برابر صفر است.
۴) برابر $\frac{۱۵}{۲}$ است.

۱۰۰ـ معادله $y''-۵y'+۴y=۸e^x$ دارای یک جواب خصوصی به صورت زیر است. (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $۸x^۲e^x$
۲) xe^x
۳) $\frac{-۸}{۳}xe^x$
۴) $xe^x+x^۲$

۱۰۱ـ رونسکین دو جواب خصوصی معادله $y''-۴y'+۴y=۰$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) xe^{-x}
۲) xe^x
۳) $x^۲e^x$
۴) $e^{۴x}$

۱۰۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x''+۴x'+۵x=۰$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) $c_۱e^{(۲+i)t}+c_۲e^{(۲-i)t}$
۲) $c_۱e^{(۱+i)t}+c_۲e^{(۱-i)t}$
۳) $c_۱e^{-(۱+i)t}+c_۲e^{(۱-i)t}$
۴) $c_۱e^{-(۲+i)t}+c_۲e^{-(۲-i)t}$

۱۰۳ـ جواب معادله دیفرانسیل $t^۲x''-۳tx'+۳x=۰$ با شرایط $x(۱)=۰$ و $x'(۱)=-۲$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) $t-t^۲$
۲) $t+t^۳$
۳) $t-t^۲-t^۳$
۴) $t+t^۲+t^۳$

۱۰۴ـ جواب کامل معادله دیفرانسیل $x''+x=۲\sin t$ با شرایط $x(۰)=۰$ و $x'(۰)=۱$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) $x=\sin t$
۲) $x=۲\sin t-t\cos t$
۳) $x=۰/۵\sin(۲t)$
۴) $x=۲\sin t+t\cos t$

۱۰۵ـ معادله دیفرانسیل $y''+۲y'-۳y=۰$ را حل نمایید. (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $Ae^x+Be^{-۳x}$
۲) $Ae^{-x}+Be^{۳x}$
۳) $Ae^x+Be^{۳x}$
۴) $Ae^{-x}+Be^{-۳x}$

۱۰۶ـ معادله دیفرانسیل $\frac{d^۳y}{dx^۳}-۸\frac{d^۲y}{dx^۲}+۱۶y=۰$ را حل نمایید. (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $Ae^{۲x}+Bxe^{-۲x}$
۲) $Ae^{۲x}+Bxe^{۲x}+Ce^{-۲x}+Dxe^{-۲x}$
۳) $Ae^{۲x}+Bxe^{۲x}$
۴) $Ae^{-۲x}+Bxe^{-۲x}$

۱۰۷ـ جواب عمومی معادله $y''-۵y'+۷y=۰$ را بدست آورید. (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $y=e^{\frac{۵x}{۲}}(c_۱\sin(\frac{\sqrt{۵}}{۲}x)+c_۲\cos(\frac{\sqrt{۵}}{۲}x))$

۲) $y=e^{\frac{۵x}{۲}}(c_۱\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)+c_۲\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x))$

۳) $y=e^{\frac{۵x}{۲}}(c_۱\sin(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)+c_۲x\cos(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x))$

۴) $y=e^{\frac{۵x}{۲}}(c_۱\sin(\frac{\sqrt{۵}}{۲}x)+c_۲x^۲\cos(\frac{\sqrt{۵}}{۲}x))$

۱۰۸ـ معادله $x^۲y''-xy'+۲y=۰$ را حل کنید. (مجموعه ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $y=x(c_۱\cos(\ln x)+c_۲\sin(\ln x))$

۲) $y=x^۲(c_۱\sin(\ln(x^۲))+c_۲\cos(\ln(x^۲)))$

۳) $y=c_۱\ln x+c_۲\sin(\ln x)$

۴) $y=x^۲(c_۱\ln x+c_۲\ln x)$

۱۰۹ـ به ازاء چه مقادیری از λ تابع $e^{\lambda x}$ حل معادله $y''-۳y'+۲y=۰$ است. (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) ۲ و ۳ـ ۲) ۲ـ و ۳ ۳) ۲ و ۱ـ ۴) ۲ و ۱

۱۱۰ـ معادله دیفرانسیل $y''+(\sin x)y-x^۲=۰$: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) غیرخطی است و غیرهمگن ۲) خطی است و همگن ۳) خطی است و غیرهمگن ۴) غیرخطی است و همگن

۱۱۱ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-۲y'+y=e^x$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=\frac{۱}{۸}x^۲e^x$ ۲) $y=\frac{۱}{۶}x^۲e^x$ ۳) $y=\frac{۱}{۴}x^۲e^x$ ۴) $y=\frac{۱}{۲}x^۲e^x$

۱۱۲ـ جواب عمومی معادله $x^۲y''+۳xy'+y=۰$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=e^x(c_۱+c_۲x)$ ۲) $y=x(c_۱+c_۲\ln x)$ ۳) $y=e^{-x}(c_۱+c_۲x)$ ۴) $y=\frac{۱}{x}(c_۱+c_۲\ln x)$

۱۱۳ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y''-(x^۲+۱)y=۰$ با شرایط $y(۰)=-۲$ و $y'(۰)=۲$ باشد در بسط تابع $y(x)$ برحسب توان‌های صعودی ضریب $x^۳$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{-۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۱۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-\frac{۲}{x}y'+(۱+\frac{۲}{x^۲})y=xe^x$ به کدام صورت است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=x^۲e^x(c_۱\cos x+c_۲\sin x)$

۲) $y=xe^{\frac{۱}{۲}x}(c_۱\cos x+c_۲\sin x)$

۳) $y=x^۲e^x+c_۱\cos x+c_۲\sin x$

۴) $y=x(\frac{۱}{۲}e^x+c_۱\cos x+c_۲\sin x)$

۱۱۵ـ جواب خصوصی معادله $y''-۳y^۲=۰$ تحت شرایط $\begin{cases}y(۰)=۲\\y'(۰)=۴\end{cases}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $(-۲,۴)$ ۲) $(۲,-۲)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۱,\frac{۱}{۲})$

۱۱۶ـ معادله دیفرانسیل $y''+(x-\frac{۱}{x})y'+x^۲y=۰$ با کدام تغییر به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=\frac{ν}{x^۲}$ ۲) $z=\frac{۲}{x^۲}$ ۳) $z=\frac{۱}{۲}x^۲$ ۴) $y=νx^۲$

۱۱۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=۲\sin x$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=c_۱\cos x+c_۲\sin x-x\cos x$ ۲) $y=c_۱\cosh x+c_۲\sinh x-۲\sin x$

۳) $y=c_۱\cos x+c_۲\sin x-x\sin x$ ۴) $y=c_۱\cosh x+c_۲\sinh x-۲\cos x$

۱۱۸ـ به ازای چه مقدار α جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases}\frac{d^۲y}{dt^۲}-\frac{dy}{dt}-۲y=۰\\y(۰)=\alpha\ ,\ y'(۰)=۲\end{cases}$ وقتی $t\to\infty$ به طرف صفر میل می‌کند؟

(مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $\alpha=-۲$ ۲) $\alpha=-۱$ ۳) $\alpha=۲$ ۴) $\alpha=۱$

۱۱۹ـ جواب معادله $y''-۱۰y'+(۲۵+\pi^۲)y=۰$ با شرایط اولیه $y(۰)=۰$ و $y'(۰)=\pi e$ برابر است با:

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=e^{۵x+۱}\cos(\pi x)$ ۲) $y=e^{۵x+۱}\sin x$ ۳) $y=e^{۵x+۱}\cos x$ ۴) $y=e^{۵x+۱}\sin(\pi x)$

۱۲۰ـ جواب عمومی معادله $xy''+y'=۱+x^۲$ برابر است با: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $y=x+\frac{۱}{۹}x^۳+c_۱\ln x+c_۲$ ۲) $y=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۶}x^۳+c_۱x+c_۲$

۳) $y=x+\frac{۱}{۶}x^۳+c_۱\ln x+c_۲$ ۴) $y=x+\frac{۱}{۹}x^۳+\frac{c_۱}{x}+c_۲$

۱۲۱ـ برای معادله دیفرانسیل $y''+f(x)y'+g(x)y=۰$ شرط وابستگی خطی جواب‌ها کدام است؟

(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\begin{vmatrix}y_۱ & y_۲\\y'_۱ & y'_۲\end{vmatrix}=۰$ ۲) $\begin{vmatrix}y'_۱ & y'_۲\\y''_۱ & y''_۲\end{vmatrix}=۰$ ۳) $\begin{vmatrix}y_۱ & y_۲\\y''_۱ & y''_۲\end{vmatrix}=۰$ ۴) $\begin{vmatrix}-y_۱ & y_۲\\y'_۱ & -y'_۲\end{vmatrix}=۰$

۱۲۲ـ معادله دیفرانسیل $y''+py''+qy=۰$ که در آن p و q ضرایب ثابت هستند؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۱)

۱) به ازای مقادیر خاصی از p و q دارای جواب نوسانی است. ۲) همواره دارای جواب نوسانی است.

۳) یک معادله دیفرانسیل، فقط برای سیستم‌های مکانیکی است. ۴) هیچگاه دارای جواب نوسانی نمی‌باشد.

۱۲۳ـ اگر c و K ثابت‌های حقیقی باشند جواب عمومی معادله $r^۲u''+ru'=۰$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $u=c\frac{۱}{r}+k$ ۲) $u=cLnr+k$ ۳) $u=c(Lnr+\frac{۱}{r})$ ۴) $u=cr+k$

۱۲۴ـ معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=۰$ با انتخاب $y(x)=\omega(x)e^{\frac{-۱}{۲}\int p(x)dx}$ به صورت $\omega''+r(x)\omega=۰$ در می‌آید برای $r(x)$ کدامیک از گزینه‌های زیر بدست می‌آید. (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $r(x)=q(x)-p'(x)\frac{۱}{۲}p^۲(x)$ ۲) $r(x)=q(x)-\frac{۱}{۲}p(x)-\frac{۱}{۴}p^۲(x)$

۳) $r(x)=q(x)-\frac{۱}{۲}p'(x)-\frac{۱}{۴}p^۲(x)$ ۴) $r(x)=q(x)-p'(x)-\frac{۱}{۴}p^۲(x)$

۱۲۵ـ جواب خصوصی معادله $(D^۲-۴D+۴)y=۸e^{۲x}$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y_p=۴x^۲e^{۲x}$ ۲) $y_p=۴xe^{۲x}$

۳) $y_p=x^۲e^{۲x}$ ۴) $y_p=۲x^۲e^{۲x}$

۱۲۶ـ جوابی از معادله $y''+۴y'+۱۳y = e^{-۲x}\cos(۳x)+۱۸e^{-۲x}$ عبارت است از: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = Axe^{-۲x}\cos(۳x)+Bxe^{-۲x}\sin(۳x)+Cxe^{-۲x}$

۲) $y = Ae^{-۲x}\cos(۳x)+Be^{-۲x}$

۳) $y = xe^{-۲x}\big(A\cos(۳x)+B\sin(۳x)\big)+۲e^{-۲x}$

۴) $y = e^{-۲x}\big(A\cos(۳x)+B\sin(۳x)\big)+Cxe^{-۲x}$

۱۲۷ـ یک جواب معادله همگن نظیر معادله $(x-۱)^۲y''-xy'+y=(x-۱)^۲e^x$ کدامیک از توابع داده شده زیر می‌باشد؟ (مهندسی مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) $e^{۲x}$ ۳) e^{-x} ۴) x

۱۲۸ـ جواب خصوصی معادله $(D^۲-۴D+۴)y = ۸e^{۲x}$ برابر است با: (مهندسی مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y_p = ۴x^۲e^{۲x}$ ۲) $y_p = ۴xe^{۲x}$ ۳) $y_p = x^۲e^{۲x}$ ۴) $y_p = ۲x^۲e^{۲x}$

۱۲۹ـ جواب عمومی معادله $x^۲y''-۲y'=۰$ کدام است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = c_۱+c_۲x+c_۳x^۳$ ۲) $y = c_۱+c_۲\text{Ln}x+c_۳x^۳$

۳) $y = (c_۱+c_۲x)e^x+c_۳x^۳$ ۴) $y = (c_۱+c_۲\text{Ln}x)x+c_۳x^۳$

۱۳۰ـ جواب خصوصی معادله $(D^۴+۱۰D^۲+۹)y = -۲\cos(۲t)$ برابر است با: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $y_P = \frac{۲}{۷}\cos(۲t)$ ۲) $y_P = \frac{۲}{۲۵}\cos(۲t)$ ۳) $y_P = \frac{-۲}{۳۵}\cos(۲x)$ ۴) $y_P = \frac{۲}{۱۵}\cos(۲t)$

۱۳۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)

$x^۲y''+۵xy'+۴y=۰ \qquad x>۰$

۱) $y = c_۱x^{-۱}+c_۲x^{\frac{۱}{۲}}$ ۲) $y = x^{-۲}(c_۱+c_۲\text{Ln}x)$

۳) $y = x^{-۱}(c_۱+c_۲\text{Ln}x)$ ۴) $y = c_۱\cos(\text{Ln}x)+c_۲\sin(\text{Ln}x)$

۱۳۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $y''+(y')^۲=۰$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) ae^x+b ۲) $\frac{۱}{\sqrt{ax+b}}$ ۳) $\sinh(ax+b)$ ۴) $\text{Ln}(ax+b)$

۱۳۳ـ جواب معادله دیفرانسیل $x^۲y''+xy'-۴y=۰$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $c_۱x+c_۲+x^{-۱}$ ۲) $c_۱x^۲+c_۲x^{-۲}$ ۳) $c_۱J_۰(۲x)+QY_۰(۲x)$ ۴) $c_۱J_۲(x)+c_۲Y_۲(x)$

۱۳۴ـ جواب خصوصی معادله $y''-y=e^x+۲e^{۲x}$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۲}{۳}e^{۲x}$ ۲) $\frac{۱}{۲}xe^x$ ۳) $\frac{۲}{۳}e^{۲x}+\frac{۱}{۲}xe^x$ ۴) $\frac{۲}{۳}e^{۲x}+\frac{۱}{۲}e^x$

۱۳۵ـ اگر ریشه‌های معادله مشخصه یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی و همگن با ضرایب ثابت به صورت $\lambda_۱=\lambda_۲=-۴$ باشد در آن صورت معادله دیفرانسیل فوق و جواب آن کدام می‌تواند باشد؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $y''+۱۶y=۰$ ، $y = A_۱\cos(۴x)+A_۲\sin(۴x)$

۲) $y''+۸y'=۰$ ، $y = A_۱e^{-۴x}+A_۲xe^{-۴x}$

۳) $۸y'+۱۶y=۰$ ، $y = A_۱\cos(۲x)+A_۲\sin(۲x)$

۴) $y''+۸y'+۱۶y=۰$ ، $y = A_۱e^{-۴x}+A_۲xe^{-۴x}$

۱۳۶ـ جواب عمومی معادله $(D+۵)^۲(D^۲-۴D+۲۹)y=۰$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = (c_۱+c_۲x)e^{-۵x}+e^{-۲x}(c_۳\cos(۵x)+c_۴\sin(۵x))$

۲) $y = (c_۱+c_۲x)e^{۵x}+e^{-۲x}(c_۳\cos(۵x)+c_۴\sin(۵x))$

۳) $y = (c_۱+c_۲x)e^{۵x}+e^{۲x}(c_۳\cos(۵x)+c_۴\sin(۵x))$

۴) $y = (c_۱+c_۲x)e^{-۵x}+e^{۲x}(c_۳\cos(۵x)+c_۴\sin(۵x))$

۱۳۷ـ پاسخ غیرثابت معادله دیفرانسیل $yy''+y'^۲=۰$ عبارتست از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{۱}{y}=Ax^۲+B$ ۲) $y^۲=Ax+B$ ۳) $y=Ax^۲+B$ ۴) $y^۲=\frac{A}{x}+B$

۱۳۸ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y''+xy'-y=\text{Ln}x$ کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $y = c_۱x+c_۲x^{-۱}+\text{Ln}x$ ۲) $y = (c_۱+c_۲\text{Ln}x)x-\text{Ln}x$

۳) $y = c_۱x+c_۲x^{-۱}-\text{Ln}x$ ۴) $y = (c_۱+c_۲\text{Ln}x)x+\text{Ln}x$

۱۳۹ـ در معادله $y''+۴y=e^t$ با شرایط $y(۰)=y'(۰)=۰$ مقدار $y(\pi)$ برابر است با: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{e^{\pi}-۱}{۵}$ ۲) $\frac{e^{\pi}+۱}{۵}$ ۳) $\frac{e^{-\pi}-۱}{۵}$ ۴) $\frac{e^{-\pi}+۱}{۵}$

۱۴۰ـ اگر $y_۱=x+۱$ یک جواب معادله دیفرانسیل $(x+۱)^۲y''-۲(x+۱)y'+۲y=۰$ ، $x\neq -۱$ باشد جواب دیگر معادله عبارتست از: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۳)

۱) $y_۲(x)=x^۲+۱$ ۲) $y_۲(x)=x^۲$ ۳) $y_۲(x)=x^۲+x$ ۴) $y_۲(x)=x^۲+۲x+۲$

۱۴۱ـ هرگاه $y=x$ جواب معادله $x^۲y''-۲xy'+۲y=۰$ باشد آنگاه جواب عمومی معادله عبارتست از: (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = c_۱x^۳+c_۲x$ ۲) $y = c_۱x+c_۲(x^۲+۱)$

۳) $y = c_۱\text{Ln}x+c_۲\frac{۱}{x}$ ۴) $y = c_۱\cos x+c_۲\tan x$

۱۴۲ـ جواب عمومی معادله زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)

$x^۲y''+xy'+y=۰ \qquad x>۰$

۱) $y = c_۱x^{\frac{۱}{۲}}+c_۲x^{-۱}$ ۲) $y = x(c_۱+c_۲\text{Ln}x)$

۳) $y = c_۱\cos(\text{Ln}x)+c_۲\sin(\text{Ln}x)$ ۴) $y = c_۱x\cos(\text{Ln}x)+c_۲x\sin(\text{Ln}x)$

۱۴۳ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y''+۳xy'+۲y=۰$ عبارتست از: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۳)

۱) $y(x)=x^{-۱}(c_۱\text{Ln}x+c_۲)$ ۲) $y(x)=x^{-۱}(c_۱\cos x+c_۲\sin x)$

۳) $y(x)=x^{-۱}(c_۱\cos(\text{Ln}x)+c_۲\sin(\text{Ln}x))$ ۴) $y(x)=x(c_۱\cos(\text{Ln}x)+c_۲\sin(\text{Ln}x))$

۱۴۴ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $۴x^۲y''+۴xy'-y=۰$ به کدام صورت است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۳)

۱) $y=\frac{Ax+B}{\sqrt{x}}$ ۲) $y=\frac{A\sqrt{x}+B}{x}$

۳) $y = x(A\cos(۲x)+B\sin(۲x))$ ۴) $y = A\text{Ln}x+Bx\text{Ln}x$

۱۴۵ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - ۴y' + ۴y = ۱۶e^{-۲x}$ به کدام صورت است؟ (مهندسی کشاورزی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = (c_۱x + c_۲)e^{۲x} - e^{-۲x}$
۲) $y = (c_۱x + c_۲)e^{۲x} + e^{-۲x}$
۳) $y = c_۱xe^{۲x} + c_۲ - e^{-۲x}$
۴) $y = c_۱xe^{۲x} + c_۲e^{-۲x}$

۱۴۶ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{\frac{x}{۲}}$
۲) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{\frac{-x}{۲}}$
۳) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^{\frac{x}{۲}}$
۴) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^{\frac{-x}{۲}}$

۱۴۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + ۳xy' + y = ۰$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۳)

۱) $y = c_۱x^{-۱} + c_۲x^{-۱}\mathrm{Ln}\,|x|$
۲) $y = c_۱x^{-۱} + c_۲\mathrm{Ln}\,|x|$
۳) $y = c_۱x^{-۱} + c_۲$
۴) $y = c_۱x^{-۱} + c_۲x\mathrm{Ln}\,|x|$

۱۴۸ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - ۳y' - ۴y = ۲\sin x$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۳)

۱) $y_P = \frac{۳}{۱۷}\cos x + \frac{۵}{۱۷}\sin x$
۲) $y_P = \frac{-۳}{۱۷}\cos x - \frac{۵}{۱۷}\sin x$
۳) $y_P = \frac{۳}{۱۷}\cos x - \frac{۵}{۱۷}\sin x$
۴) $y_P = \frac{-۳}{۱۷}\cos x + \frac{۵}{۱۷}\sin x$

۱۴۹ـ حل کلی معادله $y'' - ۲y' + y = ۱$ با شرایط $y(۰) = ۰ = y'(۰)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $t - e^{t}$
۲) $te^{t} - ۲e^{-t}$
۳) $t + ۲ + te^{t} - ۲e^{t}$
۴) $۲ + te^{-t}$

۱۵۰ـ حل کلی معادله $y'' + ۴y' + ۶y = ۰$ با شرایط $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۱$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{۲t}\sin(\sqrt{۲}t)$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{۲t}\cos(\sqrt{۲}t)$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-۲t}\cos(\sqrt{۲}t)$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-۲t}\sin(\sqrt{۲}t)$

۱۵۱ـ حل کلی معادله $y'' - ۴y' + ۴y = -۲$ با شرایط $y(۰) = ۰ = y'(۰)$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $-۲ - te^{۲t} + \frac{۱}{۲}e^{۲t}$
۲) $-۲ - te^{-۲t} + \frac{۱}{۲}e^{-۲t}$
۳) $-\frac{۱}{۲} - te^{۲t} + \frac{۱}{۲}e^{۲t}$
۴) $-\frac{۱}{۲} - te^{-۲t} + \frac{۱}{۲}e^{-۲t}$

۱۵۲ـ یک جواب خصوصی معادله ناهمگن $y'' + ۴y = x\sin ۲x$ مانند کدامیک از صورتهای زیر است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $(A_۰x + A_۱)\cos ۲x + (B_۰x + B_۱)\sin ۲x$
۲) $(A_۰x + A_۱)\cos ۲x$
۳) $(A_۰x^۲ + A_۱x)\cos ۲x + (B_۰x^۲ + B_۱x)\sin ۲x$
۴) $(B_۰x + B_۱)\sin ۲x$

۱۵۳ـ با تغییر متغیر $z = e^{x}$ معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dx^۲} + \frac{dy}{dx} + y = ۰$ به کدام صورت است؟ (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۳)

۱) $z^۲y'' + ۲zy' + y = ۰$
۲) $z^۲y'' + ۲zy' + y = ۰$
۳) $z^۲y'' - ۲zy' - y = ۰$
۴) $z^۲y'' + ۲zy' - y = ۰$

۱۵۴ـ مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۳)

$$\ddot{y} + y = t \quad ; \quad y(۰) = ۱ \ , \ \dot{y}(۰) = -۲$$

۱) $y(t) = ۲t + \cos t - ۳\sin t$
۲) $y(t) = t + \sin t - ۳\cos t$
۳) $y(t) = t + \cos t - ۳\sin t$
۴) $y(t) = \frac{۹}{۴}t + \frac{۱۹}{۸}\sin ۲t$

۱۵۵ـ در جواب معادله $y'' + y'^{۳}e^{۲y} = ۰$ اگر $y \to -\infty$ آنگاه: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) x می‌تواند کراندار باشد.
۲) x به سمت صفر میل می‌کند.
۳) x به سمت ۵ میل می‌کند.
۴) x کراندار نیست.

۱۵۶ـ جواب خصوصی معادله $y'' - y = e^{-x}$ وقتی $x \to +\infty$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) صفر
۲) $-\infty$
۳) موجود نیست.
۴) ۳

۱۵۷ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ۶y' + ۹y = ۰$ مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (صنایع رنگ ـ آزاد ۸۳)

۱) $y = c_۱e^{-۳x} + c_۲xe^{-۳x}$
۲) $y = c_۱e^{۳x} + c_۲x^{۲}e^{۳x}$
۳) $y = c_۱e^{-۳x} + c_۲e^{-۳x}$
۴) $y = c_۱e^{-۳x} + c_۲\mathrm{Lnx}\,e^{-۳x}$

۱۵۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + ۱۰y = ۰$ مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (صنایع رنگ ـ آزاد ۸۳)

۱) $y = e^{x}(c_۱\cos ۳x + c_۲\sin ۳x)$
۲) $y = c_۱\cos ۳x + c_۲\sin ۳x$
۳) $y = e^{۳x}(c_۱\cos x + c_۲\sin x)$
۴) $y = \mathrm{Lnx}\,(c_۱\cos x + c_۲\sin x)$

۱۵۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - ۳y' + ۲y = ۲e^{x}(۱ - x)$ مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۸۳)

۱) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{۲x}$
۲) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{۲x} + x^{۲}e^{x}$
۳) $y = x^{۲}e^{x}$
۴) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۲x} + xe^{x}$

۱۶۰ـ جواب عمومی معادله $\frac{d^۴y}{dx^۴} - y = \cos x + \sin x$، یعنی $y(x)$ برابر کدام است؟ (مجموعه مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\sin x + (c_۱x + c_۲)e^{x} + (c_۳x + c_۴)e^{-x}$
۲) $x(\frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۱}{۴}\sin x) + c_۱e^{x} + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x$
۳) $x(\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x) + c_۱e^{x} + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x$
۴) $x(-\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x) + (c_۱x + c_۲)e^{-x} + (c_۳\cos x + c_۴\sin x)$

۱۶۱ـ جواب معادله $x^۴y'' + ۵xy' + ۴y = ۰$ وقتی $x \to \infty$ برابر است با: (مجموعه مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) صفر
۲) ۱
۳) e
۴) ∞

۱۶۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)

$$۴y'' - ۳y' + y = ۰$$

۱) $c_۱e^{-x} + c_۲e^{\frac{۱}{۲}\pi} + c_۳xe^{\frac{۱}{۲}\pi}$
۲) $c_۱e^{-x} + c_۲e^{-\frac{\pi}{۲}} + c_۳xe^{-\frac{\pi}{۲}}$
۳) $c_۱e^{x} + c_۲e^{-x}\cos x + c_۳e^{-x}\sin x$
۴) $c_۱e^{-x} + c_۲e^{x}\cos x + c_۳e^{-x}\sin x$

۱۶۳ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dx^۲} + y = e^{-x}$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = \frac{۱}{۳}x e^{-x} + e^{-x}(c_۱ + c_۲ x + c_۳ x^۲)$

۲) $y = A_۱ x e^{-x} + c^{\frac{۱}{۲}x}(A_۲ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + A_۳ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$

۳) $y = x e^{-x} + c_۱ e^{-x} + e^{\frac{۱}{۲}x}(c_۲ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۳ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$

۴) $y = \frac{۱}{۳}x c^{-x} + c_۱ e^{-x} + c^{\frac{۱}{۲}x}(c_۲ \cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۳ \sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$

۱۶۴ـ اگر $y_۱(x)$ و $y_۲(x)$ دو جواب از معادله دیفرانسیل $\frac{d^۴y}{dx^۴} + ۴y = f(x)$ باشد که در آن $f(x)$ تابع پیوسته و داده شده‌ای است، آنگاه $y_۱(x) - y_۲(x)$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $e^{-x}(c_۱ x + c_۲) + c^{x}(c_۳ x + c_۴)$

۲) $e^{-\sqrt{۲}x}(c_۱ \cos x + c_۲ \sin x) + e^{\sqrt{۲}x}(c_۳ \cos x + c_۴ \sin x)$

۳) $e^{-x}(c_۱ \cos x + c_۲ \sin x) + e^{x}(c_۳ \cos x + c_۴ \sin x)$

۴) $e^{-\sqrt{۲}x}(c_۱ \cos\sqrt{۲}x + c_۲ \sin\sqrt{۲}x) + e^{\sqrt{۲}x}(c_۳ \cos\sqrt{۲}x + c_۴ \sin\sqrt{۲}x)$

۱۶۵ـ اگر $y_۱ = x^{-\frac{۱}{۲}} \sin x$ یک جواب معادله $y = ۰$ $(x^۲ - \frac{۱}{۴})y + x^۲ y''$ باشد، جواب عمومی آن عبارت است از:

(مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = (c_۱ \sin x + c_۲ \cos x)x^{-\frac{۱}{۲}}$

۲) $y = c_۱ x^{-\frac{۱}{۲}} \sin x + c_۲ x^{\frac{۱}{۲}} \cos x$

۳) $y = c_۱ x^{-\frac{۱}{۲}} \sin x + c_۲ \cos x$

۴) $y = c_۱ x^{-\frac{۱}{۲}} \sin x + c_۲ x \cos x$

۱۶۶ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = \cos x$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} + \frac{۱}{۲}\cos x$

۲) $c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + \frac{۱}{۲}x \sin x$

۳) $c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} + \frac{۱}{۲}\sin x$

۴) $c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + \frac{۱}{۲}x \cos x$

۱۶۷ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - ۳y'' + ۹y' + ۱۳y = ۰$ کدام است؟

(مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $c_۱ e^{-x} + c_۲ e^{۲x} + c_۳ x e^{۲x}$

۲) $c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-۲x} + c_۳ x e^{-۲x}$

۳) $c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-۲x} \cos ۳x + c_۳ e^{-۲x} \sin ۳x$

۴) $c_۱ e^{-x} + c_۲ e^{۲x} \cos ۳x + c_۳ e^{۲x} \sin ۳x$

۱۶۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'^۲ y'' = ۲y$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) فقط $y = B + \frac{A}{x}$

۲) $y = Ax + B$ یا $y = c$

۳) $y = B + \frac{A}{x}$ یا $y = c$

۴) $y = \frac{۱}{Ax + B}$ یا $y = c$

۱۶۹ـ جواب معادله $x^۲ y'' + xy' - ۴y = ۰$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = c_۱ x^{-۱} + \frac{c_۲}{x^۴}$

۲) $y = c_۱ e^{۲x} + \frac{c_۲}{x^۲}$

۳) $y = c_۱ x^۲ + \frac{c_۲}{x^۲}$

۴) $y = c_۱ x + c_۲$

۱۷۰ـ جواب عمومی معادله $y - y'' = ۰$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = c_۱ e^{x} + c_۲ x e^{x}$

۲) $y = c_۱ e^{x} + c_۲ x e^{-x}$

۳) $y = c_۱ \cosh x + c_۲ \sinh x$

۴) $y = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x$

۱۷۱ـ معادله دیفرانسیل $y'' + y' - ۲y = \cos t - ۳\sin t$ ، $t > ۰$ به همراه شرایط اولیه $y(۰) = a$ و $y'(۰) = b$ داده شده است. ثابت‌های a و b را به قسمی تعیین کنید که جواب این مسأله مقدار اولیه همواره کراندار بماند.

(مجموعه مهندسی معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $a + b = ۱$

۲) $a + ۲b = ۱$

۳) $۲a + b = -۱$

۴) $۲a + b = ۱$

۱۷۲ـ جواب عمومی معادله $\frac{d^۴y}{dx^۴} - y = \cos x + \sin x$ یعنی $y(x)$ برابر است با: (مجموعه مهندسی معدن ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\sin x + (c_۱ x + c_۲)e^{x} + (c_۳ x + c_۴)e^{-x}$

۲) $x(\frac{۱}{۴}\cos x - \frac{۱}{۴}\sin x) + c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} + c_۳ \cos x + c_۴ \sin x$

۳) $x(\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x) + c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} + c_۳ \cos x + c_۴ \sin x$

۴) $x(-\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x) + (c_۱ x + c_۲)e^{x} + (c_۳ \cos x + c_۴ \sin x)$

۱۷۳ـ اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل زیر باشد، کدام تغییر متغیر را برای حل آن باید به کار برد؟

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

(مجموعه مهندسی پلیمر (صنایع پلیمر، علوم تکنولوژی پلیمر) ـ سراسری ۸۴)

۱) $p = \frac{۱}{y}$

۲) $p = \frac{۱}{y}\frac{dy}{dx}$

۳) $p = x\frac{dy}{dx}$

۴) $p = \frac{dy}{dx}$

۱۷۴ـ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + y = \cos x + e^{۲x}$ کدام است؟

(مجموعه ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $y_P = e^{۲x} + \frac{۱}{۱۰}(\cos x - ۳\sin x)$

۲) $y_P = ۲e^{۲x} + \frac{۱}{۱۰}(۳\cos x - ۳\sin x)$

۳) $y_P = e^{۲x} + \frac{۱}{۱۰}(۳\cos x - \sin x)$

۴) $y_P = ۲e^{۲x} + \frac{۱}{۱۰}(\cos x - ۳\sin x)$

۱۷۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲ y'' - xy' + y = ۰$ کدام است؟ (مجموعه ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = e^{-e^{x}}(Ae^{-x} + B)$

۲) $y = e^{e^{x}}(Ae^{-x} + B)$

۳) $y = e^{-e^{x}}(Ae^{x} + B)$

۴) $y = x(A + B\,Lnx)$

۱۷۶ـ اگر $y_1 = e^x$ و $W(y_1', y_2') = 2e^x$ آنگاه y_2 برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $1 + e^{-x}$ ۲) $e^x + e^{-x}$ ۳) $e^{2x} + e^{-x}$ ۴) $e^x - 2x$

۱۷۷ـ جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$ به کدام صورت است؟
(مجموعه مهندسی کشاورزی (۱ـ آبیاری و زهکشی، ۲ـ سازه‌های آبی، ۳ـ منابع آب) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y = e^{-2x}(A\sin x + B\cos x) - x$ ۲) $y = e^{x}(A\sin 2x + B\cos 2x) + x$
۳) $y = e^{-2x}(A\sin 2x + B\cos 2x) - x$ ۴) $y = e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + x$

۱۷۸ـ حل کلی معادله $y'' + y = x^2$ کدام است؟ (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -2 + x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۲) $y = 2 + x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$
۳) $y = x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۴) $y = x^2 + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

۱۷۹ـ حل کلی معادله $y'' + y = 3x^2$ کدام است؟ (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -6 + 3x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۲) $y = 6 + 3x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$
۳) $y = 6 - 3x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۴) $y = -6 - 3x^2 + c_1\sin x + c_2\cos x$

۱۸۰ـ معادله زیر را حل کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

۱) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$ ۲) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x^2 e^{-x} + c_3 x^3 e^{-x}$
۳) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}$ ۴) $y = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{-ix} + c_3 x e^{-ix}$

۱۸۱ـ معادله داده شده را حل کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

$$y'' + y = 3\sin x$$

۱) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$ ۲) $y = c_1\sin x + c_2\cos x - 3x\cos x$
۳) $y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}\sin x - x\sin x$ ۴) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x^2\cos x$

۱۸۲ـ حل کلی معادله $y'' + 4y = x^2 + 4$ کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = \frac{8}{7} + x^2 + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ ۲) $y = \frac{8}{7} + \frac{1}{4}x^2 + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$
۳) $y = \frac{7}{8} + \frac{1}{4}x^2 + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ ۴) $y = \frac{7}{8} + x^2 + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$

۱۸۳ـ حل کلی معادله $y'' + y = x^2 + 4$ کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -x^2 + 2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۲) $y = x^2 + 2 + c_1\sin x + c_2\cos x$
۳) $y = x^2 - 2 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۴) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2 + c_1\sin x + c_2\cos x$

۱۸۴ـ معادله $y'' - 4y' + y = 3t - 1$ دارای یک جواب خصوصی به صورت زیر است:
(مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) te^{2t} ۲) $t^2 + 9t + 5$ ۳) $t^{\tan t}$ ۴) $3t + 8$

۱۸۵ـ جواب خصوصی $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$ عبارت است از: (مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) $e^{x}\mathrm{Ln}|x|$ ۲) $-e^{x}\mathrm{Ln}|x|$ ۳) $e^{-x}\mathrm{Ln}|x|$ ۴) $-e^{-x}\mathrm{Ln}|x|$

۱۸۶ـ حل کلی معادله $y'' - 4y = \sin x$ کدام است؟ (مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = \frac{1}{5}\sin x + c_1\sin 2x + c_2\cos 2x$ ۲) $y = -\frac{1}{5}\sin x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$
۳) $y = -\frac{1}{5}\sin x + c_1\sin 2x + c_2\cos 2x$ ۴) $y = \frac{1}{5}\sin x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

۱۸۷ـ حل کلی معادله $y'' - y = 4$ کدام است؟ (مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -4 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۲) $y = 4 + c_1\sin x + c_2\cos x$
۳) $y = -4 + c_1\sin x + c_2\cos x$ ۴) $y = -4 + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

۱۸۸ـ حل کلی معادله $y'' - 9y = \sin x$ کدام است؟ (مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $y = -\frac{1}{10}\sin x + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ ۲) $y = -\frac{1}{10}\sin x + c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$
۳) $y = -\frac{1}{10}\sin x + c_1\cos x + c_2\sin 3x$ ۴) $y = \frac{1}{10}\sin x + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

۱۸۹ـ معادله $2x^2 y'' + 11xy' + 4y = 0$ دارای جوابی به صورت زیر است: (مهندسی هسته‌ای (پرتو پزشکی و رآکتور) ـ آزاد ۸۴)

۱) $c_1 x + c_2 x^5$ ۲) $c_1 x^2 + c_2 x^3$ ۳) $c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-4}$ ۴) $(c_1 + c_2 x)\mathrm{Ln}x$

۱۹۰ـ حل معادله $yy'' + y'^2 + 1 = 0$ به صورت: (ژئوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)

۱) $(x+b)^2 + y^2 = a^2$ ۲) $x^2 - y^2 - a^2 = 1$ ۳) $x^2 + y^2 + a^2 = 1$ ۴) $x^2 + y^2 = a^2 - 1$

۱۹۱ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0 \quad , \quad x > 0$$

۱) $y = C_1 x\cos(2\mathrm{Ln}x) + C_2 x\sin(2\mathrm{Ln}x)$ ۲) $y = C_1 x^{-1}\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2 x^{-1}\sin(2\mathrm{Ln}x)$
۳) $y = C_1 x^{-1}\cos(2\mathrm{Ln}x) + C_2 x^{-1}\sin(2\mathrm{Ln}x)$ ۴) $y = C_1 x^{-\frac{1}{2}}\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2 x^{-\frac{1}{2}}\sin(\mathrm{Ln}x)$

۱۹۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مقابل کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$y'' + 2y' = 4\sin 2x$$

۱) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$ ۲) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - 2\sin 2x$
۳) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}\sin 2x$ ۴) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2\cos 2x$

۱۹۳ـ جواب عمومی معادله زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$x^2 y'' + xy' + y = 0 \quad , \quad x > 0$$

۱) $y = C_1\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2\sin(\mathrm{Ln}x)$ ۲) $y = C_1 x^{-1}\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2 x^{-1}\sin(\mathrm{Ln}x)$
۳) $y = C_1 x\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2 x\sin(\mathrm{Ln}x)$ ۴) $y = C_1 x^{\frac{1}{2}}\cos(\mathrm{Ln}x) + C_2 x^{\frac{1}{2}}\sin(\mathrm{Ln}x)$

۱۹۴ـ جواب مسأله با مقادیر اولیه زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$x^۲y'' + xy' + ۹y = ۰ \;;\; x > ۰ \;,\; y(۱) = ۲ \;,\; y'(۱) = ۰$$

۱) $y = ۲\cos(۳\text{Ln}x)$
۲) $y = ۲\sin(۳\text{Ln}x)$
۳) $y = ۲\cos(۳\text{Ln}x) + \sin(۳\text{Ln}x)$
۴) $y = ۲\cos(۳\text{Ln}x) + ۲\sin(۳\text{Ln}x)$

۱۹۵ـ جواب مسئله با مقادیر اولیه زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$\begin{cases} y'' + ۴y' + ۵y = ۰ \\ y(۰) = ۱ \;,\; y'(۰) = ۰ \end{cases}$$

۱) $y = e^{-x}\cos x + e^{-۲x}\sin x$
۲) $y = e^{-۲x}\cos x + ۲e^{-۲x}\sin x$
۳) $y = e^{-۲x}\cos x + ۳e^{-۲x}\sin x$
۴) $y = e^{-۲x}\cos x + e^{-x}\sin x$

۱۹۶ـ معادله دیفرانسیلی که توابع e^x و $e^{۲x}$ تشکیل دهنده مجموعه جواب‌های پایه آن باشد، کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $y'' + ۲y = ۰$
۲) $y'' + ۳y' - ۲y = ۰$
۳) $y'' - ۳y' + ۲y = ۰$
۴) $۲y'' + y' - y = ۰$

۱۹۷ـ معادله دیفرانسیل $y'' + y' = -۲e^{-x}$ با شرایط $y'(۰) = ۰$ و $y(۰) = ۲$ مفروض است. مقدار y در $x = ۱$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $۲e^{-۱}$
۲) $۲e$
۳) $۴e^{-۱}$
۴) $e - e^{-۱}$

۱۹۸ـ جواب مسئله با شرایط کمکی زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

$$\begin{cases} x^۲y'' - ۳xy' + ۵y = ۰ \\ y(۱) = ۰ \;,\; y'(۱) = ۱ \end{cases}$$

۱) $x^۲\sin(\text{Ln}x)$
۲) $x^۳\sin(\text{Ln}x)$
۳) $x^۴\sin(\text{Ln}x)$
۴) $x^۲\sin(۲\text{Ln}x)$

۱۹۹ـ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

$$y'' - y' = ۳e^x + ۲$$

۱) $A + Be^x$
۲) $Ax + Bc^x$
۳) $A + Bxe^x$
۴) $x(A + Be^x)$

۲۰۰ـ به ازای چه مقادیری از a و b تابع $y = e^{۲ax} + e^{۳bx}$ در معادله $y'' - ۳y' + y = ۰$ صدق می‌کند؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $b = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $a = \frac{۲}{۳}$
۲) $b = \frac{۲}{۳} \pm \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $a = ۱ \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $b = \frac{۲}{۳}$ و $a = \frac{۲}{۳}$
۴) $b = \frac{۲}{۳}$ و $a = ۱$

۲۰۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی مکاترونیک ـ سراسری ۸۵)

$$y^{(۴)} + ۲y'' + y = ۰$$

۱) $y = (C_۱ + C_۲x)e^x + (C_۳ + C_۴x)e^{-x}$
۲) $y = (C_۱x + C_۲x^۲)\cos x + (C_۳x + C_۴x^۲)\sin x$
۳) $y = (C_۱ + C_۲x)\cos x + (C_۳ + C_۴x)\sin x$
۴) $y = (C_۱x + C_۲x^۲)e^x + (C_۳x + C_۴x^۲)e^{-x}$

۲۰۲ـ جواب مسأله زیر کدام است؟ (مهندسی مکاترونیک ـ سراسری ۸۵)

$$y'' = x \;;\; y(۰) = ۱ \;,\; y(۱) = ۲$$

۱) $y = \frac{۱}{۶}x^۳ - \frac{۵}{۶}x - ۱$
۲) $y = \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۵}{۶}x + ۱$
۳) $y = x^۳ - x - ۱$
۴) $y = x^۳ + x - ۲$

۲۰۳ـ اگر $y_۱ = e^x$ یک جواب معادله $(x+۱)y'' - (۲x+۳)y' + (x+۲)y = ۰$ باشد، جواب دوم آن برابر است با: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $y_۲ = (x+۱)e^x$
۲) $y_۲ = \frac{۱}{۲}x^۲e^x$
۳) $y_۲ = \frac{e^x}{۲}(x+۱)^۲$
۴) $y_۲ = (\frac{۱}{۲}x^۲ + ۱)e^x$

۲۰۴ـ اگر $y_۱$ و $y_۲$ دو جواب از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = ۰$ باشند، طوری که $y_۱ = x^{-۱}$ و $W(y_۱, y_۲) = e^{-x}$، آنگاه $y_۱$ و $y_۲$ در کدام معادله صدق می‌کنند؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $x^۲y'' + y' - (۲+x)y = ۰$
۲) $x^۲y'' + x^۲y' - (۲+x)y = ۰$
۳) $x^۲y'' + y' + (۲+x)y = ۰$
۴) $x^۲y'' + x^۲y' + (۲+x)y = ۰$

۲۰۵ـ رونسکین (WronsKian) دو جواب معادله $x^۲y'' - xy' + y = ۰$ چیست؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) Cx
۲) $\frac{C}{x}$
۳) $Cx^۲$
۴) $\frac{C}{x^۲}$

۲۰۶ـ اگر $W(x^{-۱}, y) = ۳$، آنگاه y برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = x^۳ + cx^{-۱}$
۲) $y = x^۳ - ex^{-۱}$
۳) $y = x^۲ - cx$
۴) $y = x^۳ - cx^{-۲}$

۲۰۷ـ جواب عمومی معادله $(D^۲ - ۳D + ۲)y = ۱۲e^{۵x}$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $y = c_۱e^x + c_۲e^{۲x} + e^{۵x}$
۲) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۲x} + e^{۵x}$
۳) $y = c_۱e^{-x} + c_۲e^{-۲x} + \frac{۲}{۷}e^{۵x}$
۴) $y = c_۱e^x + c_۲e^{۲x} + \frac{۲}{۷}e^{۵x}$

۲۰۸ـ یک جواب خاص از معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی غیرهمگن $y'' - ۵y' + ۶y = g(x)$ عبارت است از: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $y_p(x) = \int (e^{۳t} - e^{۲t})g(t)\,dt$
۲) $y_p(x) = \int e^{۵(x-t)}g(t)\,dt$
۳) $y_p(x) = \int (e^{۳(x-t)} - e^{۲(x-t)})g(t)\,dt$
۴) $y_p(x) = e^{۳x}\int (\frac{e^{۲t}g(t)}{-e^{۵t}})\,dt + e^{۲t}\int \frac{e^{۳t}g(t)}{-e^{۵t}}\,dt$

۲۰۹ـ جواب عمومی معادله $y'' + y' + y = ۰$ برابر است با: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^{-۲x}(c_۱\cos ۲x + c_۲\sin ۲x)$
۲) $e^{-x}(c_۱\cos\sqrt{۳}x + c_۲\sin\sqrt{۳}x)$
۳) $e^{-۲x}(c_۱\cos\sqrt{۲}x + c_۲\sin\sqrt{۲}x)$
۴) $e^{-\frac{x}{۲}}(c_۱\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + c_۲\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$

۲۱۰ـ جواب خصوصی معادله $y'' - y' - ۶y = e^{۳x}$ عبارت است از: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{e^{۳x}}{۵}$
۲) $\frac{e^{۳x}}{۳}$
۳) $\frac{x}{۳}e^{۳x}$
۴) $\frac{x}{۵}e^{۳x}$

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda^۲ - ۱)(\lambda^۲ + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \lambda^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm ۱ \\ \lambda^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۲) برای ریشه $\lambda = ۱$ جمله $c_۱e^x$ و برای $\lambda = -۱$ جمله $c_۲e^{-x}$ و برای ریشه‌های مختلط $\lambda = \pm i$ مطابق (۲ـ۱۴) جمله $c_۳\cos x + c_۴\sin x$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x$$

برای محاسبه y_p چون $r(x) = x\sin x$ است به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ۳۵) داریم:

$$y_p = (B_۰x + B_۱)\cos x + (A_۰x + A_۱)\sin x$$

حال مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = x(B_۰x + B_۱)\cos x + x(A_۰x + A_۱)\sin x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصوت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱e^x + c_۲e^{-x} + c_۳\cos x + c_۴\sin x + x(B_۰x + B_۱)\cos x + x(A_۰x + A_۱)\sin x$$

۲ـ گزینه «۴» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + y'_u + y = ۰ \Rightarrow y''_u + y = ۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) داریم:

$$y = c_۱\cos(u) + c_۲\sin(u)$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_۱\cos(\ln x) + c_۲\sin(\ln x)$$

۳ـ گزینه «۴» با تغییر متغیر $u = \ln t$ و استفاده از جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(x''_u - x'_u) + x'_u + a^۲x = ۰ \Rightarrow x''_u + a^۲x = ۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + a^۲ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm ai \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = a \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) داریم:

$$x_h(t) = c_۱\cos(au) + c_۲\sin(au)$$

چون $u = \ln t$ است داریم:

$$x_h(t) = c_۱\cos(a\ln t) + c_۲\sin(a\ln t)$$

۴ـ گزینه «۴» از مقایسه دسته منحنی داده شده و فرمول (۲ـ۹) می‌توان نتیجه گرفت که معادله مفسر دارای ریشه مضاعف $\lambda = ۱$ می‌باشد بنابراین معادله مفسر بصورت زیر است:

$$(\lambda - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \lambda^۲ - ۲\lambda + ۱ = ۰$$

که این معادله نظیر معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + y = ۰$ می باشد.

۵ـ گزینه «۴» هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد. با استفاده از روش اپراتور معکوس و مطابق فرمول (۲ـ۲۵) و (۲ـ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۳ + ۲D^۲ + D - ۲}(e^x + \cos x) = \frac{۱}{D^۳ + ۲D^۲ + D - ۲}e^x + \frac{۱}{D^۳D + ۲D^۲ + D - ۲}\cos x$$

$$= \frac{۱}{(۱)^۳ + ۲(۱)^۲ + ۱ - ۲}e^x + \frac{۱}{(-۱)D + ۲(-۱) + D - ۲}\cos x = \frac{۱}{۲}e^x - \frac{۱}{۴}\cos x$$

۶ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda + ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } \lambda = ۱$$

مطابق فرمول (۲ـ۹) داریم:

$$y = c_۱e^x + c_۲xe^x = (c_۱ + c_۲x)e^x$$

۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۴\lambda + ۵ = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۲۰}}{۲} = \frac{۴ \pm ۲i}{۲} = ۲ \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱e^{۲x}\cos(x) + c_۲e^{۲x}\sin(x)$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و استفاده از فرمول (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۴D + ۵}۲e^{۳x} = \frac{۱}{(۳)^۲ - ۴(۳) + ۵}۲e^{۳x} = e^{۳x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{۲x}\cos(x) + c_۲e^{۲x}\sin(x) + e^{۳x}$$

با فرض $c_۱ = A\sin\alpha$ و $c_۲ = A\cos\alpha$ گزینه (۴) حاصل می‌شود.

۸ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda - ۳ = ۰ \Rightarrow (\lambda - ۳)(\lambda + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \lambda = ۳ \\ \lambda = -۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_۱e^{۳x} + c_۲e^{-x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۲}{D^۲ - ۲D - ۳}۳e^{۲x} = \frac{۱}{(۲)^۲ - ۲(۲) - ۳}۳e^{۲x} = -e^{۲x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱e^{۳x} + c_۲e^{-x} - e^{۲x}$$

چنانچه $c_۱ = ۱$ و $c_۲ = ۰$ بگیریم یک جواب خصوصی معادله عبارتست از:

$$y = e^{۳x} - e^{۲x}$$

۹ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ریشه مضاعف

مطابق فرمول (۲ ـ ۹) داریم: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

چون $r(x) = e^{2x}$ به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ ـ ۳۱) داریم: $y_p = Ae^{2x}$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب y_p در x^2 سبب می‌شود که y_h و y_p جملات یکسانی نداشته باشند. بنابراین: $y_p = Ax^2 e^{2x}$

۱۰ـ گزینه «۳» معادله مفسر $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ می‌باشد و مطابق (۲ ـ ۸) شرط آنکه y_1 و y_2 دو جواب خصوصی معادله باشد آنستکه $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_2 = 3$ بنابراین:

$\lambda_1 + \lambda_2 = -a = 1 \Rightarrow a = -1 \qquad \lambda_1\lambda_2 = b = -6$

در نتیجه: $ab = (-1)(-6) = 6$

۱۱ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

مطابق فرمول (۲ ـ ۱۰) داریم: $y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x$

مختصات مبدأ از دسته منحنی فوق می‌گذرد بنابراین $c_1 = 0$ در نتیجه: $y = c_2 e^{2x}\sin x$

۱۲ـ گزینه «۳» با ضرب طرفین معادله در x^2 یک معادله کوشی اویلر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$x^2 y'' - 2y = 0$

به کمک جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم: $(y''_u - y'_u) - 2y = 0$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

مطابق (۲ـ۸) داریم: $y = c_1 e^{2u} + c_2 e^{-u}$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} \rightarrow y' = 2c_1 x - \frac{c_2}{x^2}$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$y(1) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$y'(1) = 3 \rightarrow 2c_1 - c_2 = 3$

با حل دستگاه فوق $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$ می‌باشد، بنابراین:

$y = x^2 - \frac{1}{x}$

بنابراین: $y(2) = \frac{7}{2}$

۱۳ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه برابر است با:

$\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 2i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم: $y_h = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ـ۳۲) داریم:

$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب x در طرفین معادله سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند، بنابراین:

$y_p = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$

در نتیجه:

$y'_p = A\cos(2x) - 2Ax\sin(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x)$

$y''_p = -4A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = \sin 2x \rightarrow \begin{cases} -4A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{4} \\ 4B = 0 \rightarrow B = 0 \end{cases}$

در نتیجه:

$y_p = -\frac{x}{4}\cos(2x)$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$y = y_h + y_p = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x)$

$\rightarrow y' = -2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x)$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$y(0) = 1 \rightarrow c_1 = 1$

$y'(0) = 1 \rightarrow 2c_2 - \frac{1}{4} = 1 \rightarrow c_2 = \frac{5}{8}$

در نتیجه جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$y = \cos(2x) + \frac{5}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x)$

بنابراین: $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{5}{8}$

۱۴ـ گزینه «۳» با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:

$$y = ux^{\frac{-1}{2}} \rightarrow y' = u'x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}ux^{\frac{-3}{2}} \rightarrow y'' = u''x^{\frac{-1}{2}} - u'x^{\frac{-3}{2}} + \frac{3}{4}ux^{\frac{-5}{2}}$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$u''x^{\frac{3}{2}} + (x^{\frac{3}{2}} - (n^2 - \frac{1}{4})x^{\frac{-1}{2}})u = 0$$

با ضرب طرفین معادله در $x^{\frac{-3}{2}}$ داریم:

$$u'' + (1 - (n^2 - \frac{1}{4})x^{-2})u = 0$$

۱۵ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \\ \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \end{cases}$$

بنابراین مطابق (۲ ـ ۱۰) جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - 2c_3 \sin(2x) + 2c_4 \cos(2x)$$
$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x - 4c_3 \cos(2x) - 4c_4 \sin(2x)$$
$$y''' = c_1 \sin x - c_2 \cos x + 8c_3 \sin(2x) - 8c_4 \cos(2x)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 1 \rightarrow c_1 + c_3 = 1$$
$$y'(0) = -1 \rightarrow c_2 + 2c_4 = -1$$
$$y''(0) = 1 \rightarrow -c_1 - 4c_3 = 1$$
$$y'''(0) = 0 \rightarrow -c_2 - 8c_4 = 0$$

با حل دستگاه فوق $c_1 = \frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{-4}{3}$, $c_3 = \frac{-2}{3}$ و $c_4 = \frac{1}{6}$ می‌باشد بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y = \frac{5}{3}\cos x - \frac{4}{3}\sin x - \frac{2}{3}\cos(2x) + \frac{1}{6}\sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y(\pi) = \frac{-7}{3}$$

۱۶ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین معادله بر x داریم:

$$y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0$$

چون $p(x) + xq(x) = 0$ لذا یک جواب خصوصی معادله $y_1 = x$ می‌باشد برای محاسبه جواب خصوصی دیگر معادله با توجه به (۲ ـ ۲۲) داریم:

$$y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-x} dx$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 x \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx$$

۱۷ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ ـ ۳۲) داریم:

$$y_p = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب t در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$$

در نتیجه:

$$y_p' = A\cos(2t) - 2At\sin(2t) + B\sin(2t) + 2Bt\cos(2t)$$
$$y_p'' = -4A\sin(2t) - 4At\cos(2t) + 4B\cos(2t) - 4Bt\sin(2t)$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-4A\sin(2t) + 4B\cos(2t) = \sin(2t) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{4} \\ B = 0 \end{cases}$$

بنابراین $y_p = \frac{-t}{4}\cos(2t)$ و در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$$

$$\Rightarrow y' = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 2c_2 - \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{8}$$

بنابراین جواب معادله با توجه به شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y = \cos(2t) + \frac{5}{8}\sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$$

در نتیجه:

$$y(\pi) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

۱۸ـ گزینه «۴» مطابق مسأله قبلی جواب معادله با شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y = \cos(2t) + \frac{5}{8}\sin(2t) - \frac{t}{4}\cos(2t)$$

در نتیجه:

$$y(\frac{\pi}{2}) = -1 + \frac{\pi}{8}$$

۱۹ـ گزینه «۴» با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:

$$y = ux^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = u'x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}ux^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow y'' = u''x^{\frac{-1}{2}} - u'x^{\frac{-3}{2}} + \frac{3}{4}ux^{\frac{-5}{2}}$$

با جایگذاری موارد فوق در معادله داریم:

$$u'' + u = 0$$

۲۰ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p=\frac{1}{D^2+1}(x^2+2)$$

مطابق (۲ ـ ۲۷) عدد ۱ را بر D^2+1 تقسیم می‌کنیم و عمل تقسیم را تا زمانی که درجه جمله خارج قسمت ۲ باشد ادامه می‌دهیم زیرا عبارت x^2+2 از درجه دوم است.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1+D^2 \\ \hline \frac{1+D^2}{-D^2} & 1-D^2 \end{array}$$

$$y_p=(1-D^2)(x^2+2)=x^2$$

در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2 \Rightarrow y'=-c_1\sin x+c_2\cos x+2x$$

مطابق شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=0 \Rightarrow c_1=0$$
$$y'(0)=1 \Rightarrow c_2=1$$

بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$$y=\sin x+x^2$$

در نتیجه:

$$y(\pi)=\pi^2$$

۲۱ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)-(\lambda-2)=0$$
$$\Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=\pm 1\\ \lambda=2\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۲) برای ریشه $\lambda=1$ جمله c_1e^x، برای ریشه $\lambda=-1$ جمله c_2e^{-x} و برای ریشه $\lambda=2$ جمله c_3e^{2x} را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$$

۲۲ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda=1 \text{ ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x$$

۲۳ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-2\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

۲۴ـ گزینه «۴» بامشتق‌گیری از معادله اول دستگاه داریم:

$$\ddot{x}=-2\dot{x}+\dot{y} \Rightarrow \dot{y}=\ddot{x}+2\dot{x}$$

با جایگذاری مقدار فوق در معادله دوم دستگاه داریم:

$$\ddot{x}+2\dot{x}=-4x+3(\dot{x}+2x)+10\cos t \Rightarrow \ddot{x}-\dot{x}-2x=10\cos t$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$x_h=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}$$

برای محاسبه x_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$x_p=\frac{1}{D^2-D-2}10\cos t=\frac{1}{-1-D-2}10\cos t=\frac{-3+D}{9-D^2}10\cos t$$
$$=\frac{1}{10}(-3+D)(10\cos t)=-3\cos t-\sin t$$

در نتیجه:

$$x=x_h+x_p=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}-3\cos t-\sin t$$

۲۵ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2=0 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda=\pm i \text{ ۲ بار تکرار}$$

مطابق (۲ ـ ۱۴) داریم:

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$$

چون $r(x)=x\sin x$ به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ ـ ۳۵) داریم:

$$y_p=(A_1x+A_2)\cos x+(B_1x+B_2)\sin x$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب x^2 در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_h و y_p یکسان نشوند بنابراین:

$$y_p=x^2(A_1x+A_2)\cos x+x^2(B_1x+B_2)\sin x$$

۲۶ـ گزینه «۳» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')-y_u'+2y=0 \Rightarrow y_u''-2y_u'+2y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{1}=1\pm i \Rightarrow \alpha=\beta=1$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y=c_1e^u\cos u+c_2e^u\sin u$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=x(c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x))$$

۲۷ـ گزینه «۴» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + 7y'_u + 13y = 0 \Rightarrow y''_u + 6y'_u + 13y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-13}}{1} = -3 \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^{-3u}\cos(2u) + c_2 e^{-3u}\sin(2u)$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = \frac{c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)}{x^3}$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \to 0} y = \infty$$

۲۸ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتنداز:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ ـ ۳۲) داریم:

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب x در طرفین معادله سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$$

۲۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

با فرض $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ داریم:

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

بنابراین:

$$u_1 = -\int \frac{y_2 r(x)}{w(x)} dx = -\int \tan x dx = \ln(\cos x)$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 r(x)}{w(x)} dx = \int dx = x$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \cos x \ln(\cos x) + x\sin x$$

چون $\ln\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)$ تعریف نشده است هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۳۰ـ گزینه «۱»

$$w(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{x^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

بنابراین مطابق قضیه (۲ ـ ۴ ـ ۲) جوابها مستقل خطی هستند.

۳۱ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

بنابراین $y = e^{ix}, y = e^{-ix}$ جوابهای معادله هستند همچنین مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

لذا فقط $y = e^x$ جواب معادله نمی‌باشد.

۳۲ـ گزینه «۲» با مشتق‌گیری از طرفین معادله اول دستگاه داریم:

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 2\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{4\dot{x} - \ddot{x}}{2}$$

با جایگذاری $\dot{y}$ در معادله دوم دستگاه داریم:

$$\frac{4\dot{x} - \ddot{x}}{2} = x + \frac{4x - \dot{x}}{2} \Rightarrow \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$$

۳۳ـ گزینه «۳» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + ay'_u + by = 0 \Rightarrow y''_u + (a-1)y'_u + by = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1-a \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$$

جواب داده شده وقتی بدست می‌آید که معادله مفسر دارای ریشه مضاعف باشد یعنی:

$$(a-1)^2 - 4b = 0 \Rightarrow a - 1 = \pm 2\sqrt{b} \Rightarrow a = 1 \pm 2\sqrt{b}$$

۳۴ـ گزینه «۳» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$4(y''_u - y'_u) + 4y'_u - y = 0 \Rightarrow 4y''_u - y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}u} + c_2 e^{\frac{-1}{2}u}$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{\sqrt{x}}$$

۳۵ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3 - 1 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \\ \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

برای ریشه $\lambda = 1$ مطابق (۲-۱۲) جمله $c_1 e^x$ و برای ریشه‌های مختلط مطابق (۲ـ۱۴) جمله زیر را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم.

$$c_2 e^{\frac{-x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 e^{\frac{-x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

بنابراین:

$$y = c_1 e^x + e^{\frac{-x}{2}}\left(c_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۶ـ گزینه «۲» معادله فاقد x می‌باشد با قرار دادن $y' = z$ ، $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy} + yz = 0 \longrightarrow z(\frac{dz}{dy} + y) = 0$$

$$\longrightarrow z = 0$$

$$\longrightarrow y' = 0$$

$$\longrightarrow y = c$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \longrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \longrightarrow y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 4 \longrightarrow c_1 + c_2 = 4$$

$$y'(0) = 1 \longrightarrow c_1 - 2c_2 = 1$$

از حل دستگاه فوق $c_2 = 1$ و $c_1 = 3$ می‌شود در نتیجه:

$$y = 3e^x + e^{-2x}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۸ـ گزینه «۴» با مشتق‌گیری از معادله دوم دستگاه داریم:

$$\ddot{x} = -2\dot{x} + \dot{y} \longrightarrow \dot{y} = \ddot{x} + 2\dot{x}$$

با قرار دادن $\dot{y}$ در معادله اول دستگاه داریم:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = -4x + 3(\dot{x} + 2x) + 10\cos\alpha \longrightarrow \ddot{x} - \dot{x} - 2x = 10\cos\alpha$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \longrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$x_h = c_1 e^{2\alpha} + c_2 e^{-\alpha}$$

برای محاسبه x_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ۲۶) داریم:

$$x_p = \frac{1}{D^2 - D - 2}10\cos\alpha = \frac{1}{-1 - D - 2}10\cos\alpha = \frac{-D + 3}{D^2 - 9}10\cos\alpha = (D - 3)\cos\alpha = -\sin\alpha - 3\cos\alpha$$

در نتیجه:

$$x = x_h + x_p = c_1 e^{2\alpha} + c_2 e^{-\alpha} - \sin\alpha - 3\cos\alpha$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda = \pm i \\ \lambda^2 + 4 = 0 \to \lambda = \pm 2i \end{cases}$$

بنابراین:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x - 2c_3 \sin(2x) + 2c_4 \cos(2x)$$

$$y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x - 4c_3 \cos(2x) - 4c_4 \sin(2x)$$

$$y''' = c_1 \sin x - c_2 \cos x + 8c_3 \sin(2x) - 8c_4 \cos(2x)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 1 \longrightarrow c_1 + c_3 = 1$$

$$y'(0) = -1 \longrightarrow c_2 + 2c_4 = -1$$

$$y''(0) = 1 \longrightarrow -c_1 - 4c_3 = 1$$

$$y'''(0) = 0 \longrightarrow -c_2 - 8c_4 = 0$$

با حل دستگاه فوق $c_1 = \dfrac{5}{3}$ ، $c_2 = \dfrac{-4}{3}$ ، $c_3 = \dfrac{-2}{3}$ ، $c_4 = \dfrac{1}{6}$ می‌باشد بنابراین جواب معادله با توجه به شرایط داده شده عبارت است از:

$$y = \frac{5}{3}\cos x - \frac{4}{3}\sin x - \frac{2}{3}\cos(2x) + \frac{1}{6}\sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y(2\pi) = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۰ـ گزینه «۱» با انتگرالگیری از طرفین معادله داریم:

$$y' = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow y' = \text{Arcsin}\, x + c$$

با قرار دادن $x = 0$ در معادله فوق داریم:

$$y'(0) = 0 \longrightarrow c = 0 \longrightarrow y' = \text{Arcsin}\, x$$

مجدداً با انتگرالگیری از طرفین معادله داریم:

$$y = \int \text{Arcsin}\, x dx \longrightarrow y = x\text{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2} + c$$

با قرار دادن $x = 0$ در رابطه فوق داریم:

$$y(0) = 1 + c \longrightarrow c = 0 \longrightarrow y = x\text{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2}$$

۴۱ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \longrightarrow \lambda = 2 \text{ ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \longrightarrow y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$$

با استفاده از شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 3 \longrightarrow c_1 = 3$$

$$y'(0) = 4 \longrightarrow 2c_1 + c_2 = 4 \longrightarrow c_2 = -2$$

بنابراین جواب معادله با توجه به شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y = 3e^{2x} - 2xe^{2x}$$

۴۲ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 64 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 8i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 8 \end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y = c_1 \cos(8x) + c_2 \sin(8x) \longrightarrow y' = -8c_1 \sin(8x) + 8c_2 \cos(8x)$$

حال با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = -3 \longrightarrow c_1 = -3$$

$$y'(0) = 32 \longrightarrow 8c_2 = 32 \longrightarrow c_2 = 4$$

در نتیجه جواب مسأله بصورت زیر است:

$$y = -3\cos(8x) + 4\sin(8x)$$

$$2\pi\omega = 8 \longrightarrow \omega = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{دامنه} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$

۴۳ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مفسر عبارتنداز:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^{-x}\cos(3x) + c_2 e^{-x}\sin(3x)$$

با فرض $c_1 = A\sin\alpha$ و $c_2 = A\cos\alpha$ گزینه (۴) حاصل می‌شود.

۴۴ـ گزینه «۳» از مقایسه دسته منحنی داده شده و فرمول (۲ ـ ۹) نتیجه می‌گیریم که معادله مفسر دارای ریشه مضاعف $\lambda = 1$ می‌باشد بنابراین معادله مفسر به صورت زیر است:

$$(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

که این معادله مفسر نظیر معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = 0$ می‌باشد.

۴۵ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۲) برای ریشه $\lambda = 1$ جمله $c_1 e^x$، برای ریشه $\lambda = -1$ جمله $c_2 e^{-x}$ و برای ریشه $\lambda = 0$ جمله c_3 را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3$$

۴۶ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

که فقط در گزینه ۴ جمله y_h به شکل فوق می‌باشد.

۴۷ـ گزینه «۳» معادله از نوع (۲ ـ ۳۹) و کامل می‌باشد طرف چپ آن مشتق $(1+x^2)y'$ می‌باشد بنابراین معادله را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\left((1+x^2)y'\right)' = x^3$$

با انتگرالگیری از طرفین معادله فوق داریم:

$$(1+x^2)y' = \frac{1}{4}x^4 + c_1 \Rightarrow y' = \frac{x^4}{4(1+x^2)} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

با انتگرالگیری مجدد از طرفین معادله فوق داریم:

$$y = \frac{1}{4}\int (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1})dx + c_1 \int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{4}(\frac{x^3}{3} - x + \text{Arc tan}\, x) + c_1 \text{Arc tan}\, x + c_3$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + \underbrace{(\frac{1}{4} + c_1)}_{c_2}\text{Arc tan}\, x + c_3$$

۴۸ـ گزینه «۱» با تقسیم طرفین معادله بر $(x^۲-۱)$ داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{۲x}{x^۲-۱}}_{P(x)}y'+\frac{۲}{۱-x^۲}y=۰$$

مطابق (۲ـ۲۲) داریم:

$$y_۲=x\int\frac{۱}{x^۲}e^{-\int\frac{۲x}{x^۲-۱}dx}dx=x\int\frac{۱}{x^۲}e^{-\ln|x^۲-۱|}dx=x\int\frac{۱}{x^۲}e^{-\ln(۱-x^۲)}dx=x\int\frac{۱}{x^۲(۱-x^۲)}dx$$

$$=x\int(\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{۱-x^۲})dx=x\left(\frac{-۱}{x}+\frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x})\right)=-۱+\frac{x}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x})$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=c_۱y_۱+c_۲y_۲=c_۱x+c_۲\left(-۱+\frac{x}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x})\right)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲+۴=۰\Rightarrow\lambda=\pm ۲i\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۰\\ \beta=۲\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y_h=c_۱\cos(۲x)+c_۲\sin(۲x)$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ۳۲) داریم:

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضریب y_p در x سبب می‌شود که y_h و y_p جملات یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p=Ax\cos(۲x)+Bx\sin(۲x)$$

در نتیجه:

$$y_p'=A\cos(۲x)-۲Ax\sin(۲x)+B\sin(۲x)+۲Bx\cos(۲x)$$

$$y_p''=-۴A\sin(۲x)-۴Ax\cos(۲x)+۴B\cos(۲x)-۴Bx\sin(۲x)$$

با صدق دادن موارد فوق در معادله داریم:

$$-۴A\sin(۲x)+۴B\cos(۲x)=۸\sin(۲x)\Rightarrow\begin{cases}A=-۲\\ B=۰\end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p=-۲x\cos(۲x)$$

و جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_۱\cos(۲x)+c_۲\sin(۲x)-۲x\cos(۲x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «» هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

معادله داده شده از نوع فاقد x می‌باشد با قراردادن $y'=z$ ، $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy}+z^۳e^{۲y}=۰\Rightarrow\frac{dz}{dy}=-z^۲e^{۲y}\Rightarrow\int\frac{-dz}{z^۲}=\int e^{۲y}dy\Rightarrow\frac{۱}{z}=\frac{۱}{۲}e^{۲y}+c_۱$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{۲}e^{۲y}+c_۱\Rightarrow\int dx=\int(\frac{۱}{۲}e^{۲y}+c_۱)dy\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}e^{۲y}+c_۱y+c_۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۴» با ضرب طرفین معادله در $x^۲$ یک معادله کوشی ـ اویلر به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$x^۲y''-۳xy'+۳y=۲x^۳-x^۲$$

با استفاده از تغییرمتغیر $x=e^u$ و جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')-۳y_u'+۳y=۲e^{۳u}-e^{۲u}\Rightarrow y_u''-۴y_u'+۳y=۲e^{۳u}-e^{۲u}$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲-۴\lambda+۳=۰\Rightarrow(\lambda-۱)(\lambda-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}\lambda=۱\\ \lambda=۳\end{cases}$$

$$y_h=c_۱e^u+c_۲e^{۳u}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و با استفاده از (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p=\frac{۱}{D^۲-۴D+۳}(۲e^{۳u}-e^{۲u})=\frac{۱}{D^۲-۴D+۳}۲e^{۳u}-\frac{۱}{D^۲-۴D+۳}e^{۲u}=ue^{۳u}+e^{۲u}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_۱e^u+c_۲e^{۳u}+ue^{۳u}+e^{۲u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_۱x+c_۲x^۳+x^۳\ln x+x^۲$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۴» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')+y_u'+y=۰\Rightarrow y_u''+y=۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲+۱=۰\Rightarrow\lambda=\pm i\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۰\\ \beta=۱\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y=c_۱\cos(u)+c_۲\sin(u)$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_۱\cos(\ln x)+c_۲\sin(\ln x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۴-۱=۰\Rightarrow(\lambda^۲-۱)(\lambda^۲+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\lambda^۲-۱=۰\Rightarrow\lambda=\pm۱\\ \lambda^۲+۱=۰\Rightarrow\lambda=\pm i\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۰\\ \beta=۱\end{cases}\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۲) برای ریشه $\lambda=۱$ جمله $c_۱e^x$، برای ریشه $\lambda=-۱$ جمله $c_۲e^{-x}$ و مطابق (۲ـ۱۴) برای ریشه‌های مختلط جمله $c_۳\cos x+c_۴\sin x$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h=c_۱e^x+c_۲e^{-x}+c_۳\cos x+c_۴\sin x$$

چون $r(x)=x\sin x$ به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ـ۳۵) داریم:

$$y_p=(B_۰x+B_۱)\cos x+(A_۰x+A_۱)\sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p=x(B_۰x+B_۱)\cos x+x(A_۰x+A_۱)\sin x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_۱e^x+c_۲e^{-x}+c_۳\cos x+c_۴\sin x+x(B_۰x+B_۱)\cos x+x(A_۰x+A_۱)\sin x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۱» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + \alpha y'_u + \beta y = 0 \Rightarrow y''_u + (\alpha - 1)y'_u + \beta y = 0$$

معادله مشخصه بصورت زیر می‌باشد.

$$\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta = 0$$

در نتیجه $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\beta$ می‌باشد و سه حالت زیر را تشخیص می‌دهیم.

۱ـ $\Delta = 0$ باشد در اینصورت معادله دارای ریشه مضاعف $\lambda = \frac{-(\alpha-1)}{2}$ می‌باشد مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y = c_1 e^{\frac{-(\alpha-1)}{2}x} + c_2 x e^{\frac{-(\alpha-1)}{2}x}$$

چون $x \to \infty$ جواب فوق وقتی به صفر میل می‌کند که $\frac{\alpha-1}{2} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

۲ـ $\Delta < 0$ باشد در اینصورت معادله دارای ریشه‌های مختلط $\frac{-(\alpha-1)}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}}{2}$ می‌باشد مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^{\frac{-(\alpha-1)}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{-(\alpha-1)}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}}{2}x\right)$$

چون $x \to \infty$ جواب فوق وقتی به صفر میل می‌کند که $\frac{\alpha-1}{2} > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

۳ـ $\Delta > 0$ باشد در اینصورت معادله دارای دو ریشه حقیقی

$$\lambda_1 = \frac{-(\alpha-1)+\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-(\alpha-1)-\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2}$$

می‌باشد و مطابق (۲ ـ ۸) جواب معادله بصورت $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ می‌باشد چون $x \to \infty$ جواب فوق وقتی به صفر میل می‌کند که $\lambda_1 < 0$ و $\lambda_2 < 0$ باشد λ_2 همواره منفی است ولی λ_1 زمانی منفی است که $\alpha > 1$ و $\beta > 0$ باشد.

۵۵ـ گزینه «۳» به روش اپراتور معکوس و به کمک فرمولهای (۲ ـ ۲۸) و (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2+9} e^x \cos(2x) = e^x \frac{1}{(D+1)^2+9}\cos(2x)$$
$$= e^x \frac{1}{D^2+2D+10}\cos(2x) = e^x \frac{1}{-4+2D+10}\cos(2x)$$
$$= \frac{e^x}{2}\frac{D-3}{D^2-9}\cos(2x) = \frac{e^x}{2}\frac{D-3}{-4-9}\cos(2x) = \frac{-1}{26}e^x(-2\sin(2x)-3\cos(2x))$$

با قراردادن $x = 0$ در جواب فوق داریم:

$$y_p(0) = \frac{3}{26}$$

۵۶ـ گزینه «۲» به روش اپراتور معکوس و به کمک فرمول (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D+1}\sin(2x) = \frac{1}{-4-2D+1}\sin(2x) = \frac{-2D+3}{4D^2-9}\sin(2x)$$
$$= \frac{-2D+3}{4(-4)-9}\sin(2x) = \frac{-1}{25}(-4\cos(2x)+3\sin(2x)) = \frac{4}{25}\cos(2x)-\frac{3}{25}\sin(2x)$$

۵۷ـ گزینه «۲» به روش اپراتور معکوس و به کمک فرمول (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2-D-6}e^{3x} = \frac{x}{5}e^{3x}$$

۵۸ـ گزینه «۳»

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 2i \longrightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 2\end{cases}$$

مطابق (۲ – ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$$

به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ – ۳۲) داریم:

$$y_P = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

مطابق تذکر (۲–۹–۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y'_p = A\cos(2x) - 2Ax\sin(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x)$$
$$y''_p = -4A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$$

با صدق موادر فوق در معادله داریم:

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = 2\sin(2x) \longrightarrow \begin{cases}A = \frac{-1}{2}\\ B = 0\end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p = \frac{-x}{2}\cos(2x)$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x)$$
$$\longrightarrow y' = -2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + x\sin(2x)$$

با توجه به شرایط معادله داریم:

$$y(0) = 1 \longrightarrow c_1 = 1$$
$$y'(0) = \frac{-1}{2} \longrightarrow 2c_2 - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} \longrightarrow c_2 = 0$$

در نتیجه جواب مسأله بصورت زیر است:

$$y = \cos(2x) - \frac{x}{2}\cos(2x)$$

۵۹ـ گزینه «۲» معادله فاقد x است با جایگزینی $y' = z$ ، $y'' = z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$۱+yz\frac{dz}{dy}+z^۲=۰\longrightarrow\frac{zdz}{۱+z^۲}=\frac{-dy}{y}\longrightarrow\frac{۱}{۲}\ln(۱+z^۲)=-\ln y+\ln(c_۱)\longrightarrow\sqrt{۱+z^۲}=\frac{c_۱}{y}$$

$$\longrightarrow ۱+(y')^۲=\frac{c_۱^۲}{y^۲}\longrightarrow y'=\frac{\sqrt{c_۱^۲-y^۲}}{y}\longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c_۱^۲-y^۲}}{y}$$

$$\longrightarrow\int\frac{ydy}{\sqrt{c_۱^۲-y^۲}}=\int dx\longrightarrow-\sqrt{c_۱^۲-y^۲}=x+c_۲\longrightarrow\sqrt{c_۱^۲-y^۲}=-c_۲-x$$

$$\longrightarrow c_۱^۲-y^۲=(c_۲+x)^۲$$

۶۰ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲+\lambda=۰\longrightarrow\lambda(\lambda+۱)=۰\longrightarrow\begin{cases}\lambda=۰\\ \lambda=-۱\end{cases}$$

$$S_h=c_۱+c_۲e^{-t}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$S_p=\frac{۱}{D^۲+D}(t+e^{-t})=\frac{۱}{D+۱}(\frac{t^۲}{۲})+\frac{۱}{D^۲+D}e^{-t}$$

$$\begin{array}{r|l}۱ & ۱+D\\ \hline \frac{۱+D}{-D} & ۱-D+D^۲\\ \hline \frac{-D-D^۲}{D^۲} & \end{array}$$

حال مطابق فرمول (۲ ـ ۲۷) و (۲ – ۲۵) داریم:

$$S_P=(۱-D+D^۲)(\frac{t^۲}{۲})-te^{-t}=\frac{t^۲}{۲}-t+۱-te^{-t}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$S=S_h+S_p=c_۱+c_۲e^{-t}+\frac{t^۲}{۲}-t+۱-te^{-t}\longrightarrow S'=-c_۲e^{-t}+t-۱-e^{-t}+te^{-t}$$

حال با توجه به شرایط معادله داریم:

$$S(۰)=۰\longrightarrow c_۱+c_۲+۱=۰\longrightarrow c_۱=۱$$

$$S'(۰)=۰\longrightarrow -c_۲-۲=۰\longrightarrow c_۲=-۲$$

بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$S=۲-۲e^{-t}+\frac{t^۲}{۲}-t-te^{-t}$$

در نتیجه:

$$S(۱)=-۲e^{-۱}+\frac{۳}{۲}$$

۶۱ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲+۹=۰\longrightarrow\lambda=\pm۳i\longrightarrow\begin{cases}\alpha=۰\\ \beta=۳\end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$I_h=c_۱\cos(۳t)+c_۲\sin(۳t)$$

به روش ضرایب نامعین مطابق (۲-۳۲) داریم:

$$I_P=A\cos(۳t)+B\sin(۳t)$$

مطابق تذکر (۲-۹-۱) ضرب t در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_p و y_h یکسان نباشند. بنابراین:

$$I_P=At\cos(۳t)+Bt\sin(۳t)$$

در نتیجه:

$$I'_p=A\cos(۳t)-۳At\sin(۳t)+B\sin(۳t)+۳Bt\cos(۳t)$$

$$I''_p=-۶A\sin(۳t)-۹At\cos(۳t)+۶B\cos(۳t)-۹Bt\sin(۳t)$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-۶A\sin(۳t)+۶B\cos(۳t)=۱۲\cos(۳t)\longrightarrow\begin{cases}A=۰\\ B=۲\end{cases}$$

بنابراین:

$$I_P=۲t\sin(۳t)$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$I=I_h+I_p=c_۱\cos(۳t)+c_۲\sin(۳t)+۲t\sin(۳t)$$

$$\longrightarrow I'=-۳c_۱\sin(۳t)+۳c_۲\cos(۳t)+۲\sin(۳t)+۶t\cos(۳t)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$I(۰)=۴\longrightarrow c_۱=۴$$

$$I'(۰)=۰\longrightarrow ۳c_۲=۰\longrightarrow c_۲=۰$$

بنابراین جواب معادله با شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$I=۴\cos(۳t)+۲t\sin(۳t)\longrightarrow I(\pi)=-۴$$

۶۲ـ گزینه «۳» با استفاده از جایگزینی‌های (۲-۱۸) داریم:

$$۲(y''_u-y'_u)+۱۰y'_u+۸y=۰\longrightarrow ۲y''_u+۸y'_u+۸y=۰\longrightarrow y''_u+۴y'_u+۴y=۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲+۴\lambda+۴=۰\longrightarrow(\lambda+۲)^۲=۰\longrightarrow\lambda=-۲\ \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y=c_۱e^{۲u}+c_۲ue^{-۲u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$y=c_۱x^{-۲}+c_۲x^{-۲}\ln x=x^{-۲}(c_۱+c_۲\ln x)$$

۶۳ـ هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۱ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۱$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و با استفاده از فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۱}(۱) = \frac{۱}{D^۲ - ۱} e^{۰x} = -۱$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} - ۱ \longrightarrow y' = c_۱ e^{x} - c_۲ e^{-x}$$

حال با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(۰) = ۰ \longrightarrow c_۱ + c_۲ - ۱ = ۰$$

$$y'(۰) = ۰ \longrightarrow c_۱ - c_۲ = ۰$$

با حل دستگاه فوق $c_۱ = \frac{۱}{۲}$ ، $c_۲ = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد در نتیجه جواب مسأله بصورت زیر است.

$$y = \frac{۱}{۲} e^{x} + \frac{۱}{۲} e^{-x} - ۱$$

در نتیجه:

$$y(-۱) = \frac{۱}{۲} e + \frac{۱}{۲} e^{-۱} - ۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۴ـ گزینه «۴»

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos t + c_۲ \sin t$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۱} t$$

مطابق (۲-۲۷) عدد ۱ بر $D^۲ + ۱$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت از درجه یک باشد زیرا درجه عبارت t یک می‌باشد.

$$\begin{array}{r|l} ۱ & ۱ + D^۲ \\ \hline ۱ + D^۲ & ۱ \\ \hline -D^۲ & \end{array}$$

در نتیجه $y_p = t$ می‌باشد بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos t + c_۲ \sin t + t \longrightarrow y' = -c_۱ \sin t + c_۲ \cos t + ۱$$

با توجه به شرایط مسأله داریم:

$$y(۰) = ۱ \longrightarrow c_۱ = ۱$$

$$y'(۰) = -۲ \longrightarrow c_۲ + ۱ = -۲ \longrightarrow c_۲ = -۳$$

بنابراین جواب مسأله به صورت زیر است:

$$y = \cos t - ۳ \sin t + t$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۵ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۴ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۲i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۲ \end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos(۲x) + c_۲ \sin(۲x)$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۴}(۸x^۲)$$

مطابق فرمول (۲-۲۷) عدد ۱ را بر $D^۲ + ۴$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت از درجه ۲ باشد چون عبارت $۸x^۲$ از درجه دوم است.

$$\begin{array}{r|l} ۱ & ۴ + D^۲ \\ \hline ۱ + \frac{D^۲}{۴} & \frac{۱}{۴} - \frac{D^۲}{۱۶} \\ \hline \frac{-D^۲}{۴} & \end{array}$$

$$y_p = \left(\frac{۱}{۴} - \frac{D^۲}{۱۶}\right)(۸x^۲) = ۲x^۲ - ۱$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos(۲x) + c_۲ \sin(۲x) + ۲x^۲ - ۱$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۶ـ هیچ یک از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

با قرار دادن جایگزینی‌های (۲-۱۸) داریم:

$$۲(y''_u - y'_u) - ۳y'_u - ۳y = ۰ \longrightarrow ۲y''_u - ۵y'_u - ۳y = ۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$۲\lambda^۲ - ۵\lambda - ۳ = ۰ \longrightarrow \lambda = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۲۴}}{۴} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = ۳ \\ \lambda = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$y = c_۱ e^{۳u} + c_۲ e^{\frac{-u}{۲}}$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_۱ x^{۳} + c_۲ x^{\frac{-۱}{۲}}$$

گزینه‌های (۲) و (۴) می‌توانند درست باشند چون شرایط آغازی داده نشده است لذا نمی‌توان $c_۱$ و $c_۲$ را بدست آورد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۷ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 9 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 3$$

مطابق (۲-۸) داریم:

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 9} x$$

مطابق فرمول (۲-۲۷) عدد ۱ را بر $D^2 + 9 -$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه یک باشد زیرا عبارت x درجه اول است.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -9 + D^2 \\ \hline 1 - \dfrac{D^2}{9} & \dfrac{-1}{9} \\ \hline \dfrac{D^2}{9} & \end{array}$$

بنابراین $y_p = \dfrac{-x}{9}$ در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{x}{9}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۸ـ گزینه «۴» گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ جواب خصوصی معادله می‌باشند.

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \quad \text{دو بار تکرار} \end{cases}$$

برای ریشه $\lambda = 1$ مطابق (۲ ـ ۱۲) جمله $c_1 e^x$ و برای ریشه تکراری $\lambda = 2$ مطابق (۲ ـ ۱۳) جمله $c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق فرمول (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 5D^2 + 8D - 4} e^{2x} = \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است است:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

چنانچه $c_1 = c_2 = 0$ و $c_3 = -1$ بگیریم گزینه ۱ حاصل می‌شود.

چنانچه $c_3 = c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ بگیریم گزینه ۲ حاصل می‌شود.

چنانچه $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ و $c_3 = -1$ بگیریم گزینه ۴ حاصل می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۹ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس و مطابق فرمول (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2 + 4D - 4} \sin(3x) = \frac{1}{-9D + 9 + 4D - 4} \sin(3x) = \frac{-1}{5}\left(\frac{1}{D-1}\sin(3x)\right) =$$

$$= \frac{-1}{5}\left(\frac{1}{-9-1}(D+1)\sin(3x)\right) = \frac{1}{50}(3\cos(3x) + \sin(3x))$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۰ـ گزینه «۱» معادله داده شده از نوع (۲ ـ ۱۵) می‌باشد و با تغییر متغیر $2x + 1 = e^t$ به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۱ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس و مطابق فرمول (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 3D - 2} e^x = \frac{x}{2} e^x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۲ـ گزینه «۳» باقراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + y'_u + 9y = 0 \Rightarrow y''_u + 9y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y = c_1 \cos(3u) + c_2 \sin(3u)$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \sin(3 \ln x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۳ـ گزینه «۱» با قرادادن $x = 0$ در معادله داریم:

$$y''(0) + y(0) = 3 \Rightarrow y''(0) = 3$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله داریم:

$$-e^{-x}y'' + e^{-x}y''' + y' + xy'' + y' = 0$$

با قراردادن $x = 0$ در معادله فوق داریم:

$$-y''(0) + y'''(0) + 2y'(0) = 0 \Rightarrow -3 + y'''(0) + 2 = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۴ـ گزینه «۴» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + 3y'_u + by = 0 \Rightarrow y''_u + 2y'_u + by = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

در نتیجه:

$$\lambda^2 + 2\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-b}$$

چون $u = \ln t$ است داریم:

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{1-b})u} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1-b})u}$$

$$y = c_1 t^{-1+\sqrt{1-b}} + c_2 t^{-1-\sqrt{1-b}}$$

وقتی جواب محدود تولید می‌شود که $-1 + \sqrt{1-b} < 0$ در نتیجه $b > 1 > 0$ بدست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۵ـ گزینه «۴» با قرادادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) - 3y'_u + 4y = 0 \Rightarrow y''_u - 4y'_u + 4y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y = c_1 e^{2u} + c_2 u e^{2u}$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1 e^{2\ln x} + c_2 \ln x e^{2\ln x} = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

درنتیجه:

$$y' = 2c_1 x + 2c_2 x \ln x + c_2 x$$

از طرفی:

$$y(1)=1 \Rightarrow c_1=1$$

$$y'(1)=1 \Rightarrow 2c_1+c_2=1 \Rightarrow c_2=-1$$

در نتیجه جواب معادله با دو شرط داده شده بصورت زیر است:

$$y=x^2-x^2\ln x=x^2(1-\ln x)$$

۷۶ـ گزینه «۳» معادله فاقد x می‌باشد با تغییر متغیر $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$2yz\frac{dz}{dy}+z^2=0 \Rightarrow \frac{dz}{dy}=\frac{-z}{2y} \Rightarrow \int\frac{2dz}{z}=\int\frac{-dy}{y} \Rightarrow 2\ln z=-\ln y+\ln c_1$$

$$\Rightarrow (y')^2=\frac{c_1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{c_1}{y}} \Rightarrow \int y^{\frac{1}{2}}dy=\int\pm\sqrt{c_1}dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=\pm(\sqrt{c_1}x+c_2)$$

$$\Rightarrow y^{\frac{3}{2}}=\underbrace{\pm\frac{3}{2}\sqrt{c_1}}_{A}x\underbrace{\pm\frac{3}{2}c_2}_{B} \Rightarrow |y|^{\frac{3}{2}}=Ax+B$$

۷۷ـ گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر داده شده داریم:

$$y'=v'e^{x^2}+2xve^{x^2}$$

$$y''=v''e^{x^2}+4xv'e^{x^2}+2ve^{x^2}+4x^2ve^{x^2}$$

با صدق دادن موارد فوق در معادله داریم:

$$(v''+2v)e^{x^2}=xe^{x^2} \Rightarrow v''+2v=x$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}i \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$v_h=c_1\cos(\sqrt{2}x)+c_2\sin(\sqrt{2}x)$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

برای محاسبه v_p بروش اپراتور معکوس داریم:

$$v_p=\frac{1}{D^2+2}x$$

حال مطابق فرمول (۲ ـ ۲۷) عدد ۱ را بر D^2+2 تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه اول باشد زیرا عبارت x از درجه اول است بنابراین:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2+D^2 \\ \hline 1+\frac{1}{2}D^2 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2}D^2 & \end{array}$$

در نتیجه:

$$v_p=(\frac{1}{2})x$$

$$v=v_h+v_p=c_1\cos(\sqrt{2}x)+c_2\sin(\sqrt{2}x)+\frac{x}{2}$$

بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:

$$y=ve^{x^2}=(c_1\cos(\sqrt{2}x)+c_2\sin(\sqrt{2}x)+\frac{x}{2})e^{x^2}$$

۷۸ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$4\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y=c_1e^{\frac{1}{2}t}+c_2e^{\frac{-1}{2}t}$$

در نتیجه:

$$y'=\frac{c_1}{2}e^{\frac{1}{2}t}-\frac{c_2}{2}e^{\frac{-1}{2}t}$$

$$y(0)=2 \Rightarrow c_1+c_2=2$$

$$y'(0)=\beta \Rightarrow \frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2}=\beta \Rightarrow c_1-c_2=2\beta$$

بنابراین $c_1=1+\beta$ و $c_2=1-\beta$ در نتیجه جواب معادله با دو شرط داده شده بصورت زیر است:

$$y=(1+\beta)e^{\frac{t}{2}}+(1-\beta)e^{\frac{-t}{2}}$$

وقتی $\lim_{t\to+\infty} y=0$ که $1+\beta=0$ باشد درنتیجه مقدار $\beta=-1$ بدست می‌آید.

۷۹ـ گزینه «۳» با توجه به گزینه‌های داده می‌توان نتیجه گرفت:

$$y_h=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین و به کمک (۲ ـ ۳۲) داریم:

$$y_p=A\cos(2x)+B\sin(2x)$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p=Ax\cos(2x)+Bx\sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y_p'=A\cos(2x)-2Ax\sin(2x)+B\sin(2x)+2Bx\cos(2x)$$

$$y_p''=-4A\sin(2x)-4Ax\cos(2x)+4B\cos(2x)-4Bx\sin(2x)$$

با صدق دادن موارد فوق در معادله داریم:

$$-4A\sin(2x)+4B\cos(2x)=3\sin(2x) \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{-3}{4}\\ B=0\end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p=\frac{-3}{4}x\cos(2x)$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{3}{4}x\cos(2x)$$

۸۰ـ گزینه «۴» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')-3y_u'+4y=0 \Rightarrow y_u''-4y_u'+4y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda=2$$ ریشه مضاعف

مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y = c_1 e^{2u} + c_2 u e^{2u}$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

۸۱ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

برای ریشه $\lambda = 0$ مطابق (۲ ـ ۱۲) جمله c_1 و برای ریشه‌های مختلط مطابق (۲ ـ ۱۴) جمله $c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)$$

چون $r(x) = 5x\cos(2x)$ به روش ضرایب نامعین و با استفاده از (۲ ـ ۳۵) داریم:

$$y_p = (A_0x + A_1)\cos(2x) + (B_0x + B_1)\sin(2x)$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p = x(A_0x + A_1)\cos(2x) + x(B_0x + B_1)\sin(2x)$$

۸۲ـ گزینه «۲» با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:

$$x = \sin t \Rightarrow t = \text{Arc}\sin x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نتیجه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}}{1-x^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}}{1-x^2}$$

با جایگذاری موارد فوق در معادله داریم:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

۸۳ـ گزینه «۱» با قرار دادن جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) در معادله داریم:

$$(y''_u - y'_u) - y'_u + y = 0 \Rightarrow y''_u - 2y'_u + y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y = c_1 e^u + c_2 u e^u$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

۸۴ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

برای ریشه $\lambda = 0$ مطابق (۲ ـ ۱۲) جمله c_1 و برای ریشه‌های مختلط مطابق (۲ ـ ۱۴) جمله $c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)$ را اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x)$$

برای محاسبه y_p چون $r(x) = \sin(2x)$ به روش ضرایب نامعین و به کمک (۲ ـ ۳۲) داریم:

$$y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود که جملات اصلی y_h و y_p یکسان نباشند بنابراین:

$$y_p = Ax\cos(2x) + Bx\sin(2x)$$

در نتیجه:

$$y'_p = A\cos(2x) - 2Ax\sin(2x) + B\sin(2x) + 2Bx\cos(2x)$$
$$y''_p = -4A\sin(2x) - 4Ax\cos(2x) + 4B\cos(2x) - 4Bx\sin(2x)$$
$$y'''_p = -12A\cos(2x) + 8Ax\sin(2x) - 12B\sin(2x) - 8Bx\cos(2x)$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-8A\cos(2x) - 8B\sin(2x) = \sin(2x) \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{-1}{8} \end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p = \frac{-x}{8}\sin(2x)$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) - \frac{x}{8}\sin(2x)$$

۸۵ـ گزینه «۲» چون معادله دارای جوابهای $x, 1$ می‌باشد مطابق (۲ ـ ۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که معادله مشخصه دارای ریشه $\lambda = 0$ تکرار شده از مرتبه ۲ می‌باشد همچنین چون معادله دارای جوابهای e^{2x}، xe^{2x} می‌باشد مطابق (۲ ـ ۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که معادله مشخصه دارای ریشه $\lambda = 2$ تکرار شده از مرتبه ۲ می‌باشد بنابراین معادله مفسر بصورت زیر است:

$$\lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0$$

معادله دیفرانسیل نظیر این معادله مفسر بصورت زیر می‌باشد.

$$D^2(D-2)^2 y = 0$$

۸۶ـ گزینه «۲» معادله فاقد y می‌باشد با جایگزینی $y' = z$ و $y'' = z'$ داریم:

$$z' = xz^3$$

معادله مرتبه اول فوق از نوع تفکیک پذیر است بنابراین:

$$\frac{dz}{dx} = xz^3 \Rightarrow \int\frac{dz}{z^3} = \int x\,dx \Rightarrow \frac{-1}{2z^2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{1}{z^2} = -x^2 \underbrace{- 2c}_{c_1^2} \Rightarrow$$

$$(y')^2 = \frac{1}{c_1^2 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - x^2}}$$

معادله مرتبه اول فوق نیز از نوع تفکیک پذیر است بنابراین:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{c_1^2-x^2}} \Rightarrow \int dy=\int\frac{dx}{\sqrt{c_1^2-x^2}} \Rightarrow y=\text{Arc}\sin(\frac{x}{c_1})+c_2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{c_1}=\sin(y-c_2) \quad \Rightarrow \quad x=c_1\sin(y-c_2)$$

۸۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda=\pm i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \longrightarrow y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=-1 \longrightarrow c_1=-1$$

$$y'(0)=1 \longrightarrow c_2=1$$

بنابراین جواب معادله با توجه به شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y=-\cos x+\sin x$$

در نتیجه:

$$y(\frac{\pi}{2})=1$$

۸۸ـ گزینه «۱» مقادیر λ ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشد، داریم:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)=0 \rightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=3\end{cases}$$

۸۹ـ گزینه «۲» مقادیر λ ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشد، داریم:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \rightarrow (\lambda-1)^2=0 \rightarrow \lambda=1$$ ریشه مضاعف

۹۰ـ گزینه «۳» مطابق فرمول (۲-۲۸) داریم:

$$f(t)=e^t\frac{1}{D^2}(\frac{1}{t^2})$$

D نشانگر عملگر مشتق می‌باشد، بنابراین $\frac{1}{D}$ انتگرال و $\frac{1}{D^2}$ نشان دهنده ۲ بار عمل التگرالگیری می‌باشد. در نتیجه:

$$f(t)=-e^t\ln t$$

۹۱ـ گزینه «۳» با استفاده از جایگزینی‌های (۲-۱۸) داریم:

$$y''_u-y'_u+\alpha y'_u+y=0 \rightarrow y''_u+(\alpha-1)y'_u+y=0$$

معادله مشخصه عبارتست از:

$$\lambda^2+(\alpha-1)\lambda+1=0$$

معادله وقتی دارای جواب‌های نوسانی است که $\Delta<0$ باشد، بنابراین:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-4<0 \rightarrow (\alpha-1)^2<4 \rightarrow -2<\alpha-1<2 \rightarrow -1<\alpha<3$$

۹۲ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \rightarrow \lambda=\pm i \rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲-۱۰) داریم:

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \rightarrow y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=-1 \rightarrow c_1=-1$$

$$y'(0)=1 \rightarrow c_2=1$$

در نتیجه جواب معادله با شرایط داده شده به صورت زیر است:

$$y=-\cos x+\sin x$$

در نتیجه:

$$y(\pi)=1$$

۹۳ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 \rightarrow (\lambda+2)^2=0 \rightarrow \lambda=-2$$ ریشه مضاعف

مطابق (۲-۹) داریم:

$$y=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t} \rightarrow y'=-2c_1e^{-2t}+c_2e^{-2t}-2c_2te^{-2t}$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=0 \rightarrow c_1=0$$

$$y'(0)=a \rightarrow -2c_1+c_2=a \rightarrow c_2=a$$

بنابراین جواب مسأله به صورت زیر است:

$$y=ate^{-2t}$$

در نتیجه:

$$\lim_{t\to\infty} y=\lim_{t\to\infty}\frac{at}{e^{2t}}=\frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

$$\overset{\text{Hop}}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{a}{2e^{2t}}=0$$

۹۴ـ گزینه «۴» با قرار دادن جایگزینی‌های (۱۸ـ۲) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + 5y'_u + 4y = 0 \rightarrow y''_u + 4y'_u + 4y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۹ـ۲) داریم:

$$y = c_1 e^{-2u} + c_2 u e^{-2u}$$

چون $u = \ln x$ است، داریم:

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x)$$

۹۵ـ گزینه «۲» معادله فاقد x است با قرار دادن $y' = z$ و $y'' = z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$yz\frac{dz}{dy} = 2z^2 - 2z \rightarrow \int \frac{dz}{z-1} = \int 2\frac{dy}{y} \rightarrow \ln(z-1) = 2\ln y + \ln c_1^2 \rightarrow z - 1 = c_1^2 y^2$$

چون $z = y'$ است داریم:

$$y' = 1 + c_1^2 y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + c_1^2 y^2 \rightarrow \int \frac{dy}{1+c_1^2 y^2} = \int dx \rightarrow \frac{1}{c_1}\text{Arc}\tan(c_1 y) = x + c_2$$

$$\rightarrow \text{Arc}\tan(c_1 y) = c_1 x + \underbrace{c_1 c_2}_{B}$$

$$c_1 y = \tan(c_1 x + B)$$

۹۶ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 16 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 4i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

مطابق (۱۰ـ۲) داریم:

$$y = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow c_1 = 1$$

بنابراین مسأله جواب ندارد.

۹۷ـ گزینه «۱» چون $g(x)$ در $x = 0$ مشتق ندارد. پس رونسکین قابل محاسبه نیست. از طرفی $f(x) = \text{sgn}(x)g(x)$ بنابراین وابسته خطی هستند.

۹۸ـ گزینه «۳» با قرار دادن جایگزینی‌های (۱۸ـ۲) داریم:

$$(y''_u - y'_u) - 3y'_u + 4y = 0 \rightarrow y''_u - 4y'_u + 4y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۹ـ۲) داریم:

$$y = c_1 e^{2u} + c_2 u e^{2u}$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

۹۹ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارت است از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-13}}{1} = 2 \pm 3i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

مطابق (۱۰ـ۲) داریم:

$$y = c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x)$$

چنانچه $x \rightarrow -\infty$ جواب مسأله به c_1 و c_2 بستگی ندارد و مقدار آن صفر است.

۱۰۰ـ گزینه «۳» به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲۵ـ۲) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 5D + 4} 8e^x = \frac{-8}{3}xe^x$$

۱۰۱ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۹ـ۲) داریم:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

با فرض $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = xe^{2x}$ داریم:

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

۱۰۲ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{1} = -2 \pm i$$

مطابق (۸ـ۲) داریم:

$$x = c_1 e^{(-2+i)t} + c_2 e^{(-2-i)t}$$

۱۰۳ـ گزینه «۱» با قرار دادن جایگزینی‌های (۱۸ـ۲) داریم:

$$(x''_u - x'_u) - 3x'_u + 3x = 0 \rightarrow x''_u - 4x'_u + 3x = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

مطابق (۸ـ۲) داریم:

$$x = c_1 e^u + c_2 e^{3u}$$

چون $u = \ln t$ است، داریم:

$$x = c_1 t + c_2 t^3 \rightarrow x' = c_1 + 3c_2 t^2$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$x(1) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0$$
$$x'(1) = -2 \rightarrow c_1 + 3c_2 = -2$$

با حل دستگاه $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$ می‌باشد، بنابراین جواب مسأله به صورت زیر است:

$$x = t - t^3$$

۱۰۴ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

برای محاسبه x_p به روش ضرایب نامعین و مطابق (۲ـ۳۲) داریم:

$$x_p = A\cos t + B\sin t$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب t در x_p سبب می‌شود که x_h و x_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند، بنابراین:

$$x_p = At\cos t + Bt\sin t$$

در نتیجه:

$$x'_p = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t$$
$$x''_p = -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t \rightarrow \begin{cases} -2A = 2 \rightarrow A = -1 \\ 2B = 0 \rightarrow B = 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$x_p = -t\cos t$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$x = x_h + x_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t\cos t \rightarrow x' = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - \cos t + t\sin t$$

با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$x(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$
$$x'(0) = 1 \rightarrow c_2 - 1 = 1 \rightarrow c_2 = 2$$

بنابراین جواب مسأله به صورت زیر است:

$$x = 2\sin t - t\cos t$$

۱۰۵ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

۱۰۶ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4)^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 2 \quad \text{۲ بار تکرار}$$

مطابق (۲ـ۱۳) برای ریشه $\lambda = 2$ جمله $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ و برای ریشه $\lambda = -2$ جمله $c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x}$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم، بنابراین:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 x e^{-2x}$$

۱۰۷ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{5}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^{\frac{5}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{\frac{5}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

۱۰۸ـ گزینه «۱» با استفاده از جایگزینی (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) - y'_u + 2y = 0 \rightarrow y''_u - 2y'_u + 2y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{1} = 1 \pm i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^u \cos u + c_2 e^u \sin u$$

چون $u = \ln x$ است داریم:

$$y = x(c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x))$$

۱۰۹ـ گزینه «۴» مقادیر λ ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشد، بنابراین:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

۱۱۰ـ گزینه «۳»

۱۱۱ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس و به کمک فرمول (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^4 - 2D^2 + 1} e^x = \frac{x^2}{8} e^x$$

۱۱۲ـ گزینه «۴» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ ـ ۱۸) داریم:

$$(y''_u - y'_u) + ۳y'_u + y = ۰ \Rightarrow y''_u + ۲y'_u + y = ۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱ = ۰ \Rightarrow (\lambda+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \lambda = -۱ \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق فرمول (۲ ـ ۹) داریم: $y = c_۱e^{-u} + c_۲ue^{-u}$

چون $u = \ln x$ است داریم: $y = c_۱e^{-\ln x} + c_۲ \ln x e^{-\ln x} = \dfrac{c_۱ + c_۲ \ln x}{x}$

۱۱۳ـ گزینه «۳» با مشتق‌گیری از طرفین معادله داریم:

$$y''' - ۲xy - (x^۲+۱)y' = ۰$$

با قراردادن $x = ۰$ در معادله فوق داریم: $y'''(۰) - y'(۰) = ۰ \Rightarrow y'''(۰) = ۲$

مطابق بسط مکلورن ضریب $x^۳$ از رابطه $\dfrac{y'''(۰)}{۳!}$ بدست می‌آید یعنی ضریب $x^۳$ برابر است با $\dfrac{۱}{۳}$

۱۱۴ـ گزینه «۴» برای حل معادله فوق از روش حذف ضریب مشتق استفاده می‌کنیم در این معادله $p(x) = \dfrac{-۲}{x}$ ، $q(x) = ۱ + \dfrac{۲}{x^۲}$ و $r(x) = xe^x$ می‌باشد مطابق (۲ ـ ۴۲) داریم:

$$v = e^{\frac{-۱}{۲}\int \frac{-۲}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

ضریب u در معادله (۲ ـ ۴۳) برابر است با:

$$q(x) - \frac{۱}{۲}p'(x) - \frac{۱}{۴}p^۲(x) = (۱ + \frac{۲}{x^۲}) - \frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۲} = ۱$$

در نتیجه معادله (۲ ـ ۴۳) بصورت زیر می‌باشد. $u'' + u = e^x$

ریشه‌های معادله مشخصه بصورت زیر می‌باشد.

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم: $u_h = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$u_p = \frac{۱}{D^۲+۱}e^x = \frac{۱}{۲}e^x$$

در نتیجه: $u = u_h + u_p = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + \dfrac{۱}{۲}e^x$

و جواب عمومی معادله بصورت زیر است: $y = uv = (c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + \dfrac{۱}{۲}e^x)x$

۱۱۵ـ گزینه «۴» معادله داده شده فاقد x می‌باشد با جایگزینی $y' = z$ و $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy} = ۳y^۲ \Rightarrow zdz = ۳y^۲dy \Rightarrow \frac{z^۲}{۲} = y^۳ + c_۱ \Rightarrow \frac{(y')^۲}{۲} = y^۳ + c_۱$$

با قراردادن $x = ۰$ در معادله فوق داریم: $\dfrac{(y'(۰))^۲}{۲} = (y(۰))^۳ + c_۱ \Rightarrow ۸ = ۸ + c_۱ \Rightarrow c_۱ = ۰$

بنابراین:

$$\frac{(y')^۲}{۲} = y^۳ \Rightarrow y' = \pm\sqrt{۲}y^{\frac{۳}{۲}}$$

معادله حاصل یک معادله مرتبه اول از نوع تفکیک پذیر است داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{۲}y^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow \int y^{\frac{-۳}{۲}}dy = \int \pm\sqrt{۲}dx$$

$$\frac{-۲}{\sqrt{y}} = \pm\sqrt{۲}x + c$$

با قراردادن $x = ۰$ در معادله فوق نیز داریم:

$$\frac{-۲}{\sqrt{y(۰)}} = c \Rightarrow c = -\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{-۲}{\sqrt{y}} = \pm\sqrt{۲}x - \sqrt{۲}$$

جواب $\dfrac{-۲}{\sqrt{y}} = \sqrt{۲}x - \sqrt{۲}$ از نقطه $(-۱, \frac{۱}{۲})$ صدق می‌کند.

۱۱۶ـ گزینه «۳» با تغییر متغیر $z = \dfrac{۱}{۲}x^۲$ داریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = x\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{dy}{dz} + x\frac{d^۲y}{dz^۲}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} + x^۲\frac{d^۲y}{dz^۲}$$

با جایگذاری موارد فوق در معادله داریم:

$$\frac{dy}{dz} + x^۲\frac{d^۲y}{dz^۲} + (x - \frac{۱}{x})x\frac{dy}{dz} + x^۲y = ۰ \Rightarrow x^۲\frac{d^۲y}{dz^۲} + x^۲\frac{dy}{dz} + x^۲y = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲y}{dz^۲} + \frac{dy}{dz} + y = ۰$$

۱۱۷ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مفسر عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \rightarrow \lambda = \pm i \rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x$$

چون $r(x) = 2\sin x$ به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ۳۲) داریم:

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند، بنابراین:

$$y_p = Ax\cos x + Bx\sin x$$

در نتیجه:

$$y'_p = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$$
$$y''_p = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p = -x\cos x$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۸ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

در نتیجه:

$$y' = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t}$$
$$y(0) = \alpha \rightarrow c_1 + c_2 = \alpha$$
$$y'(0) = 2 \rightarrow 2c_1 - c_2 = 2$$

با حل دستگاه حاصل $c_1 = \frac{\alpha + 2}{3}$ و $c_2 = \frac{2\alpha - 2}{3}$ می‌باشد، در نتیجه:

$$y = \frac{\alpha + 2}{3} e^{2t} + \frac{2\alpha - 2}{3} e^{-t}$$
$$\lim_{t \to \infty} y = 0 \rightarrow \frac{\alpha + 2}{3} = 0 \rightarrow \alpha = -2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 10\lambda + (25 + \pi^2) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(25 + \pi^2)}}{2} = 5 \pm i\pi \rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pi \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y = c_1 e^{5x}\cos(\pi x) + c_2 e^{5x}\sin(\pi x)$$

در نتیجه:

$$y' = 5c_1 e^{5x}\cos(\pi x) - \pi c_1 e^{5x}\sin(\pi x) + 5c_2 e^{5x}\sin(\pi x) + \pi c_2 e^{5x}\cos(\pi x)$$
$$y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$
$$y'(0) = \pi e \rightarrow 5c_1 + \pi c_2 = \pi e \rightarrow c_2 = e$$

بنابراین:

$$y = e^{5x+1}\sin(\pi x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۰ـ گزینه «۱» معادله فاقد y می‌باشد با جایگزینی $y' = z$ و $y'' = z'$ داریم:

$$xz' + z = 1 + x^2$$

با تقسیم طرفین معادله بر x یک معادله خطی مرتبه اول حاصل می‌شود مطابق فرمول حل معادلات خطی مرتبه اول داریم:

$$z' + \frac{1}{x}x = x + \frac{1}{x} \rightarrow z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}(x + \frac{1}{x})dx + c_1\right]$$
$$= \frac{1}{x}\left[\int (x^2 + 1)dx + c_1\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^3}{3} + x + c_1\right] = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{c_1}{x}$$

با قرار دادن $z = y'$ یک معادله مرتبه اول به شکل $y' = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{c_1}{x}$ حاصل می‌شود که از نوع تفکیک‌پذیر است برای حل آن داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{c_1}{x} \rightarrow \int dy = \int (\frac{x^2}{3} + 1 + \frac{c_1}{x})dx \rightarrow y = \frac{x^3}{9} + x + c_1 \ln x + c_2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۱ـ گزینه «۱» شرط وابستگی است آن که رونسکین برابر صفر باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۲ـ گزینه «۱» معادله مفسر به صورت زیر است:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

معادله داده شده در صورتی که $\Delta = p^2 - 4q < 0$ باشد دارای جواب‌های نوسانی است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۳ـ گزینه «۲» معادله از نوع کوشی اویلراست با تغییر متغیر $t = \ln r$ و با کمک جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(u''_t - u'_t) + u'_t = 0 \rightarrow u''_t = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲ـ۹) داریم:

$$u = c_1 + c_2 t$$

چون $t = \ln r$ است داریم:

$$u = c_1 + c_2 \mathrm{L}nr$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۴ـ گزینه «۳»

$$y=\omega(x)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx} \rightarrow y'=(\omega'-\frac{1}{2}p\omega)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx} \rightarrow y''=(\omega''-p\omega'-\frac{1}{2}p'\omega+\frac{1}{4}p^2\omega)e^{\frac{-1}{2}\int p(x)dx}$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$\omega''+\underbrace{(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2)}_{r(x)}\omega=0$$

۱۲۵ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس و مطابق فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+4}8e^{2x}=\frac{x^2}{2}(8e^{2x})=4x^2e^{2x}$$

۱۲۶ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-13}}{1}=-2\pm3i \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=3\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h=c_1e^{-2x}\cos(3x)+c_2e^{-2x}\sin(3x)$$

چون $r_1(x)=e^{-2x}\cos(3x)$ به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ ـ ۳۶) داریم:

$$y_{p_1}=Ae^{-2x}\cos(3x)+Be^{-2x}\sin(3x)$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب y_{p_1} در x سبب می‌شود تا y_h و y_{p_1} جملات یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_{p_1}=Axe^{-2x}\cos(3x)+Bxe^{-2x}\sin(3x)$$

چون $r_2(x)=18e^{-2x}$ به روش اپراتور معکوس مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_{p_2}=\frac{1}{D^2+4D+13}18e^{-2x}=2e^{-2x}$$

بنابراین:

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=Axe^{-2x}\cos(3x)+Bxe^{-2x}\sin(3x)+2e^{-2x}$$

۱۲۷ـ گزینه «۴» با تقسیم طرفین معادله بر $x-1$ داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{-x}{x-1}}_{p(x)}y'+\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{q(x)}y=(x-1)e^x$$

چون $p(x)+xq(x)=0$ بنابراین یک جواب معادله همگن $y=x$ می‌باشد.

۱۲۸ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+4}8e^{2x}=4x^2e^{2x}$$

۱۲۹ـ گزینه «۲» معادله داده شده فاقد y می‌باشد با جایگزینی $y'=z$ و $y''=z'$ داریم:

$$x^2z'-2z=0$$

معادله حاصل یک معادله کوشی اویلر است با جایگزینی $x^2z''=z''_u-z'_u$ داریم:

$$z''_u-z'_u-2z=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$z=c_1e^{2u}+c_2e^{-u}$$

چون $u=\ln x$ است داریم:

$$z=c_1e^{2\text{Ln}x}+c_2e^{-\text{Ln}x}=c_2x^2+\frac{c_2}{x}$$

با توجه به اینکه $z=y'$ است داریم:

$$y'=c_1x^2+\frac{c_2}{x} \Rightarrow y=c_1\frac{x^3}{3}+c_2\text{Ln}x+c_3$$

۱۳۰ـ گزینه «۱» به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_p=\frac{1}{D^4+10+D^2+9}(-2\cos(2t))=\frac{1}{(-2)^2+10(-2)+9}(-2\cos(2t))=\frac{2}{7}\cos(2t)$$

۱۳۱ـ گزینه «۲» با قرار دادن $xy'=y'_u$ و $x^2y''=y''_u-y'_u$ داریم:

$$y''_u-y'_u+5y'_u+4y=0 \Rightarrow y''_u+4y'_u+4y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda=-2$$

مطابق (۲ ـ ۹) داریم:

$$y=c_1e^{-2u}+c_2ue^{-2u}$$

چون $u=\text{Ln}x$ است داریم:

$$y=c_1e^{-2\text{Ln}x}+c_2\text{Ln}xe^{-2\text{Ln}x}=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\text{Ln}x$$

۱۳۲ـ گزینه «۴» معادله فاقد y است با قرار دادن $y'=z$ و $y''=z'$ داریم:

$$z'+z^2=0 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-z^2 \Rightarrow \int\frac{-dz}{z^2}=\int dx \Rightarrow \frac{1}{z}=x+c_1 \Rightarrow y'=\frac{1}{x+c_1}$$

با انتگرالگیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$y=\text{Ln}(x+c_1)+\text{Ln}(c_2)=\text{Ln}(c_2(x+c_1))=\text{Ln}(c_2x+c_1c_2)$$

با فرض $a=c_2$ و $b=c_1c_2$ داریم:

$$y=\text{Ln}(ax+b)$$

۱۳۳ـ گزینه «۲» با قرار دادن $xy' = y'_u$ و $x^2y'' = y''_u - y'_u$ داریم:

$$y''_u - y'_u + y'_u - 4y = 0 \Rightarrow y''_u - 4y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y = c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}$$

چون $u = Lnx$ است داریم:

$$y = c_1 e^{2Lnx} + c_2 e^{-2Lnx} = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

۱۳۴ـ گزینه «۳» به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_P = \frac{1}{D^2-1}(e^x + 2e^{2x}) = \frac{1}{D^2-1}e^x + 2\frac{1}{D^2-1}e^{2x} = \frac{x}{2}e^x + \frac{2}{3}e^{2x}$$

۱۳۵ـ گزینه «۴» معادله مشخصه بصورت زیر می‌باشد:

$$(\lambda+4)(\lambda+4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

بنابراین معادله دیفرانسیل نظیر آن بصورت زیر است:

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

از طرفی مطابق (۲ ـ ۹) جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$$

۱۳۶ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$(\lambda+5)^2(\lambda^2 - 4\lambda + 29) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -5 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-29}}{1} = 2 \pm 5i \end{cases}$$

برای ریشه تکراری $\lambda = -5$ مطابق (۲ ـ ۱۳) جمله $c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$ و برای ریشه‌های مختلط $2 \pm 5i$ مطابق (۲ ـ ۱۴) جمله $c_3 e^{2x}\cos(5x) + c_4 e^{2x}\sin(5x)$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم داریم:

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x} + c_3 e^{2x}\cos(5x) + c_4 e^{2x}\sin(5x)$$

۱۳۷ـ گزینه «۲» معادله فاقد x است با قراردادن $y' = z$ و $y'' = z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$z^2 + yz\frac{dz}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{-z}{y} \Rightarrow \int\frac{dz}{z} = \int\frac{-dy}{y} \Rightarrow Lnz = -Lny + Lnc_1 \Rightarrow z = \frac{c_1}{y} \Rightarrow y' = \frac{c_1}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow \int y\,dy = \int c_1\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2 \Rightarrow y^2 = Ax + B$$

۱۳۸ـ گزینه «۳» با استفاده از تغییر متغیر $u = Lnx$ در طرفین معادله و به کمک جایگزینی‌های $xy' = y'_u$ و $x^2y'' = y''_u - y'_u$ داریم:

$$y''_u - y'_u + y'_u - y = u \Rightarrow y''_u - y = u$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y_h = c_1 e^u + c_2 e^{-u}$$

به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۷) عدد ۱ را بر $D^2 - 1$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت تقسیم درجه اول باشد چون u درجه اول است:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -1+D^2 \\ \hline \frac{1-D^2}{D^2} & -1 \end{array}$$

$$y_P = \frac{1}{D^2-1}u = -u$$

بنابراین:

$$y = y_h + y_P = c_1 e^u + c_2 e^{-u} - u$$

چون $u = Lnx$ است داریم:

$$y = c_1 e^{Lnx} + c_2 e^{-Lnx} - Lnx = c_1 x + c_2 x^{-1} - Lnx$$

۱۳۹ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$$

برای محاسبه y_P به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۵) داریم:

$$y_P = \frac{1}{D^2+4}e^t = \frac{1}{5}e^t$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_P = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{e^t}{5} \Rightarrow y' = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) + \frac{e^t}{5}$$

حال با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{-1}{5}$$

$$y' = -2c_2 + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{-1}{10}$$

بنابراین جواب معادله با توجه به شرایط داده شده بصورت زیر است:

$$y = \frac{-1}{5}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t) + \frac{e^t}{5}$$

در نتیجه:

$$y(\pi)=\frac{e^{\pi}-1}{5}$$

۱۴۰ـ گزینه «۳» با تقسیم طرفین معادله بر $(x+1)^2$ داریم:

$$y''+\underbrace{\frac{-2}{x+1}}_{P(x)}y'+\underbrace{\frac{2}{(x+1)^2}}_{q(x)}y=0$$

حال مطابق (۲ـ۲۲) داریم:

$$y_2=(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}e^{\int\frac{2}{x+1}dx}dx=x^2+x$$

۱۴۱ـ گزینه «۲» با تقسیم طرفین معادله بر x^2-1 داریم:

$$y''+\frac{-2x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

مطابق (۲ـ۲۲) داریم:

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{-2x}{x^2-1}dx}dx=x\int\frac{x^2-1}{x^2}dx=x(x+\frac{1}{x})=x^2+1$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1x+c_2(x^2+1)$$

۱۴۲ـ گزینه «۳» با استفاده از جایگزینی‌های $xy'=y'_u$ و $x^2y''=y''_u-y'_u$ داریم:

$$(y''_u-y'_u)+y'_u+y=0 \quad\Rightarrow\quad y''_u+y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\pm i \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y=c_1\cos u+c_2\sin u$$

چون $u=\text{Lnx}$ است داریم:

$$y=c_1\cos(\text{Lnx})+c_2\sin(\text{Lnx})$$

۱۴۳ـ گزینه «۳» با قرار دادن $xy'=y'_u$ و $x^2y''=y''_u-y'_u$ داریم:

$$y''_u-y'_u+3y'_u+2y=0 \quad\Rightarrow\quad y''_u+2y'_u+2y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+2\lambda+2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{1}=-1\pm i \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۰) داریم:

$$y=c_1e^{-u}\cos u+c_2e^{-u}\sin u$$

چون $u=\text{Lnx}$ است داریم:

$$y=c_1e^{-\text{Lnx}}\cos(\text{Lnx})+c_2e^{-\text{Lnx}}\sin(\text{Lnx})=c_1x^{-1}\cos(\text{Lnx})+c_2x^{-1}\sin(\text{Lnx})$$

۱۴۴ـ گزینه «۱» با استفاده از جایگزینی $xy'=y'_u$ و $x^2y''=y''_u-y'_u$ داریم:

$$4(y''_u-y'_u)+4y'_u-y=0 \quad\Rightarrow\quad 4y''_u-y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$4\lambda^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \lambda=\pm\frac{1}{2}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1e^{\frac{1}{2}u}+c_2e^{\frac{-1}{2}u}$$

چون $u=\text{Lnx}$ است داریم:

$$y=c_1e^{\frac{1}{2}\text{Lnx}}+c_2e^{\frac{-1}{2}\text{Lnx}}=c_1x^{\frac{1}{2}}+c_2x^{\frac{-1}{2}}=\frac{c_1x+c_2}{\sqrt{x}}$$

۱۴۵ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-2)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=2 \qquad \text{۲ بار تکرار}$$

مطابق (۲ـ۹) داریم:

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

برای محاسبه y_P به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_P=\frac{1}{D^2-4D+4}16e^{-2x}=\frac{16}{4+8+4}e^{-2x}=e^{-2x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_P=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^{-2x}$$

۱۴۶ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$2\lambda^2-3\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{\frac{x}{2}}$$

۱۴۷ـ گزینه «۱» با قرار دادن $xy' = y'_u$ و $x^2y'' = y''_u - y'_u$ داریم:

$$y''_u - y'_u + 3y'_u + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y''_u + 2y'_u + y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \qquad \text{۲ بار تکرار}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y = c_1 e^{-u} + c_2 u e^{-u}$$

چون $u = \mathrm{Ln}|x|$ است داریم:

$$y = c_1 e^{-\mathrm{Ln}x} + c_2 e^{-\mathrm{Ln}x}\mathrm{Ln}|x| = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1}\mathrm{Ln}|x|$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۸ـ گزینه «۳» به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ ـ ۲۶) داریم:

$$y_P = \frac{1}{D^2 - 3D - 4} 2\sin x = \frac{1}{-1 - 3D - 4} 2\sin x = \frac{1}{-5 - 3D} 2\sin x = \frac{-5 + 3D}{25 - 9D^2} 2\sin x$$

$$= \frac{1}{34}(-10\sin x + 6\cos x) = \frac{-5}{17}\sin x + \frac{3}{17}\cos x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۹ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

مطابق فرمول (۲ـ۹) داریم:

از طرف دیگر با توجه به تساوی $r(t) = t$ و ضابطه y_λ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_P = A.t + B$ در نظر گرفت. در اینصورت؛

$$(y_P = At + B \quad \Rightarrow \quad y'_P = A \quad \& \quad y''_P = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} 0 + (-2A) + At + B = t \quad \Rightarrow \quad (-2A + B) + At = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$\xrightarrow{y_P = At + B} y_P = t + 2$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + y = t$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t) = y_\lambda + y_p = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 2$$

برای محاسبه ضرائب c_1 و c_2 اینگونه عمل می‌کنیم:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 2 \xrightarrow{t=0} y(0) = c_1 + 2 \xrightarrow{y(0)=0} c_1 = -2$$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 2 \quad \Rightarrow \quad y'(t) = c_1 e^t + c_2 e^t + c_2 t e^t + 1 \xrightarrow{t=0} y'(0) = c_1 + c_2 + 1$$

$$\xrightarrow{y'(0)=0 \ \& \ c_1=-2} 0 = -2 + c_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی : } (c_1=-2 \ \& \ c_2=1)} y(t) = -2e^t + te^t + t + 2$$

لازم بذکر است، فقط گزینه (۳) در شرط $y(0) = 0$ صدق می‌کند.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۰ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \pm \sqrt{2}\,i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله همگن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h(t) = c_1 e^{-2t}\cos(\sqrt{2}\,t) + c_2 e^{-2t}\sin(\sqrt{2}\,t) \xrightarrow{t=0} y_h(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = c_1$$

$$\xrightarrow{y_h(0)=0} 0 = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

بنابراین با توجه به ضابطه جواب عمومی، تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۱ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \qquad \text{ریشه مضاعف}$$

در نتیجه مطابق فرمول (۲ـ۹) داریم:

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x) = -2$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p = A$ در نظر گرفت.

در اینصورت؛

$$(y_p = A \quad \Rightarrow \quad y'_p = y''_p = 0) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} 0 + 0 + 4A = -2 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{y_p=A} y_p = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 4y = -2$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y(t) = y_h + y_p = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - \frac{1}{2}$$

با توجه به گزینه‌ها، بدون محاسبه c_1 و c_2، فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

لازم بذکر است، فقط گزینه (۳) در شرایط $y(0) = y'(0) = 0$ صدق می‌کند.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۲ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

در اینصورت با توجه به تساوی $r(x) = x\sin 2x$، به روش ضرائب i معین و مطابق (۲ ـ ۳۵) داریم:

$$y_p = (A_1x + A_2)\cos 2x + (B_1x + B_2)\sin 2x$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_h و y_p یکسان نشوند. بنابراین؛

$$y_p = x((A_1x + A_2)\cos 2x + (B_1x + B_2)\sin 2x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۳ـ گزینه «۱»

$$z = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = e^x \xrightarrow{e^x = z} \frac{dz}{dx} = z \qquad ;(۱)$$

در نتیجه؛

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dx} \qquad ;(۲)$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \xrightarrow{\text{تساوی (۲)}} \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dy}{dz}\right) = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d}{dz}\left(z\times\frac{dy}{dz}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \frac{d^۲y}{dx^۲} = z\left(\frac{dy}{dz} + z\times\frac{d^۲y}{dz^۲}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^۲y}{dx^۲} = z^۲\frac{d^۲y}{dz^۲} + z\frac{dy}{dz} \qquad ;(۳)$$

در اینصورت؛

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} + \frac{dy}{dx} + y = ۰ \xrightarrow{\text{با جایگذاری تساویهای (۲) و(۳)}} \left(z^۲\frac{d^۲y}{dz^۲} + z\frac{dy}{dz}\right) + z\frac{dy}{dz} + y = ۰ \quad \Rightarrow \quad z^۲\frac{dy}{dz^۲} + ۲z\frac{dy}{dz} + y = ۰$$

یادآوری. می‌دانیم معادله کشی ـ اویلر $x^۲y'' + p_۰xy' + q_۰y = ۰$ با اعمال تغییر متغیر $z = \text{Ln}x$ به معادله با ضرائب ثابت

$\frac{d^۲y}{dz^۲} + (p_۰ - ۱)\frac{dy}{dz} + q_۰y = ۰$ تبدیل می‌شود. و هم‌چنین می‌توان بررسی کرد، معادله با ضرائب ثابت $y'' + p_۰y' + q_۰y = ۰$ با

اعمال تغییر متغیر $z = e^x$ به معادله کشی ـ اویلر $z^۲\frac{d^۲y}{dz^۲} + (p_۰ + ۱)\frac{dy}{dz} + q_۰y = ۰$ تبدیل می‌شود.

۱۵۴ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_۱\cos t + c_۲\sin t$$

از طرف دیگر با توجه به تساوی $r(x) = t$ ، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p = At + B$ در نظر گرفت. در اینصورت؛

$$(y_p = At + B \quad \Rightarrow \quad y_p' = A \quad \& \quad y_p'' = ۰)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} ۰ + At + B = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = ۱ \\ B = ۰ \end{cases} \xrightarrow{y_p = At+B} y_p = t$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\ddot{y} + y = t$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t) = y_h + y_p = c_۱\cos t + c_۲\sin t + t$$

برای محاسبه ضرائب $c_۱$ و $c_۲$ اینگونه عمل می‌کنیم:

$$y(t) = c_۱\cos t + c_۲\sin t + t \xrightarrow{t=۰} y(۰) = c_۱ \xrightarrow{y(۰)=۱} c_۱ = ۱$$

در اینصورت با توجه به گزینه‌ها، فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد.

لازم بذکر است، فقط گزینه (۳) در شرایط $y(۰) = ۱$ و $\dot{y}(۰) = -۲$ صدق می‌کند.

۱۵۵ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل $y'' + y'^۳e^{۲y} = ۰$ است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر $(y' = P \quad \Rightarrow \quad y'' = P\frac{dP}{dy})$ داریم:

$$P\frac{dP}{dy} + P^۳e^{۲y} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{-P^۲} = e^{۲y}\,dy \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \frac{۱}{P} = \frac{۱}{۲}e^{۲y} + c_۱y + c_۲ = x \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{P=y'} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}e^{۲y} + c_۱} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{۱}{۲}e^{۲y} + c_۱\right)dy = dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} \frac{۱}{۴}e^{۲y} + c_۱y + c_۲ = x \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to-\infty} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{۱}{۴}e^{۲y} + c_۱y + c_۲\right) \xrightarrow{y\to-\infty \Rightarrow e^{۲y}\to ۰} \lim_{y\to-\infty} x = \lim_{y\to-\infty}(c_۱y + c_۲)$$

با توجه به تساوی حاصل، اگر $c_۱ = ۰$ فرض شود، آنگاه با شرط $y \to -\infty$ ، x می‌تواند کراندار باشد.

۱۵۶ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm ۱$$

در نتیجه جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_۱e^x + c_۲e^{-x}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x) = e^{-x}$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p = (Ax + B)e^{-x}$ با شرط $A \neq ۰$ در نظر گرفت. در اینصورت؛

$$\lim_{x\to+\infty} y_p = \lim_{x\to+\infty}(Ax + B)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ax + B}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to+\infty} y_p = \frac{A}{e^x} = ۰$$

۱۵۷ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۶\lambda + ۹ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (\lambda + ۳)^۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda = -۳ \quad \text{ریشه مضاعف}$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۹) جواب عمومی معادله همگن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_۱e^{-۳x} + c_۲xe^{-۳x}$$

۱۵۸ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda + ۱۰ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{۲ \pm \sqrt{-۳۶}}{۲} = \frac{۲ \pm ۶i}{۲} \quad \Rightarrow \quad \lambda = ۱ \pm ۳i \rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = ۳ \end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن $y'' - ۲y' + ۱۰y = ۰$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = e^x(c_۱\cos ۳x + c_۲\sin ۳x)$$

۱۵۹ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۳\lambda + ۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (\lambda - ۱)(\lambda - ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} \lambda = ۱ \\ \lambda = ۲ \end{cases}$$

در نتیجه مطابق فرمول (۲ـ۸) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_۱e^x + c_۲e^{۲x}$$

از طرف دیگر با توجه به تساوی $r(x)=2e^{x}(1-x)$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p=x(Ax+B)e^{x}$ در نظر گرفت. در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-3y'+2y=2e^{x}(1-x)$ با ضابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y=y_h+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+(Ax^2+Bx)e^{x}$$

با توجه به گزینه‌ها، بدون محاسبه ثابتها، فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۰ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4-1=0\longrightarrow(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0\longrightarrow\begin{cases}\lambda^2-1=0\longrightarrow\lambda=\pm1\\ \lambda^2+1=0\longrightarrow\lambda=\pm i\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۲) برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda=1$ جمله c_1e^{x} و برای $\lambda=-1$ جمله c_2e^{-x} و مطابق (۲ـ۱۴) برای ریشه‌های $\lambda=\pm i$ جمله $c_3\cos x+c_4\sin x$ به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ ۳۲) داریم:

$$y_p=A\cos x+B\sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود تا y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p=Ax\cos x+Bx\sin x$$

در نتیجه:

$$y_p'=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x$$
$$y_p''=-2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x$$
$$y_p'''=-3A\cos x+Ax\sin x-3B\sin x-Bx\cos x$$
$$y_p^{(4)}=4A\sin x+Ax\cos x-4B\cos x+Bx\sin x$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$4A\sin x-4B\cos x=\sin x+\cos x\longrightarrow\begin{cases}4A=1\longrightarrow A=\frac{1}{4}\\ -4B=1\longrightarrow B=\frac{-1}{4}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p=\frac{1}{4}x\cos x-\frac{1}{4}x\sin x$$

و جواب عمومی معادله بصورت زیر می‌باشد.

$$y=y_h+y_p=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{x}{4}\cos x-\frac{x}{4}\sin x$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۱ـ گزینه «۱» با استفاده از جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')+5y_u'+4y=0\longrightarrow y_u''+4y_u'+4y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+4\lambda+4=0\longrightarrow(\lambda+2)^2=0\longrightarrow\lambda=-2$$

مطابق (۲ـ ۹) داریم:

$$y=c_1e^{-2u}+c_2ue^{-2u}$$

چون $u=\mathrm{Ln}u$ است داریم:

$$\lim_{x\to\infty}y=\frac{\infty}{\infty}\ (\text{مبهم})\xrightarrow{\text{HoP}}\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۲ـ گزینه «۱» معادله مشخصه عبارتست از:

$$4\lambda^3-3\lambda+1=0$$

چون جمع ضرایب توانهای فرد λ با جمع ضرایب توانهای زوج λ برابر است لذا معادله دارای ریشه $\lambda=-1$ می‌باشد برای تعیین ریشه‌های دیگر معادله داریم:

$$\begin{array}{r|l}4\lambda^3-3\lambda+1 & \lambda+1\\ \hline 4\lambda^3+4\lambda^2 & 4\lambda^2-4\lambda+1\\ \hline -4\lambda^2-3\lambda+1 & \\ -4\lambda^2-4\lambda & \\ \hline \lambda+1 & \\ \lambda+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ریشه‌های دیگر معادله مشخصه عبارتست از:

$$4\lambda^2-4\lambda+1=0\longrightarrow(2\lambda-1)^2=0\longrightarrow\lambda=\frac{1}{2}\ \text{۲ بار تکرار}$$

مطابق (۲ـ ۱۲) برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda=-1$ جمله c_1e^{-x} و برای ریشه تکراری $\lambda=\frac{1}{2}$ مطابق (۲ـ۱۳) جمله $c_2e^{\frac{1}{2}x}+c_3xe^{\frac{1}{2}x}$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}+c_3xe^{\frac{1}{2}x}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۶۳ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3+1=0\longrightarrow(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0\longrightarrow\begin{cases}\lambda+1=0\longrightarrow\lambda=-1\\ \lambda^2-\lambda+1=0\longrightarrow\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$$

مطابق (۲ــ ۱۲) برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda = -1$ جمله $c_1 e^{-x}$ و برای ریشه‌های مختلط مطابق (۲ــ ۱۴) جمله $c_2 e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3+1}e^{-x} = \frac{1}{(D+1)(D^2-D+1)}e^{-x} = \frac{1}{3(D+1)}e^{-x} = \frac{x}{3}e^{-x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_3 e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{3}x e^{-x}$$

۱۶۴ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 + 4 = 0 \longrightarrow (\lambda^2+2)^2 - 4\lambda^2 = 0 \longrightarrow (\lambda^2-2\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda^2-2\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda = \frac{1\pm\sqrt{1-2}}{1} = 1\pm i \\ \lambda^2+2\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1-2}}{1} = -1\pm i \end{cases}$$

مطابق (۲ــ ۱۰) برای ریشه‌های مختلط $1\pm i$ جمله $c_1 e^x\cos x + c_2 e^x \sin x$ و برای ریشه‌های مختلط $-1\pm i$ جمله $c_3 e^{-x}\cos x + c_4 e^{-x}\sin x$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x\cos x + c_2 e^x \sin x + c_3 e^{-x}\cos x + c_4 e^{-x}\sin x + y_p$$

چنانچه y_1 و y_2 دو جواب معادله باشد داریم:

$$y_1 = c_1' e^x\cos x + c_2' e^x \sin x + c_3' e^{-x}\cos x + c_4' e^{-x}\sin x + y_p$$

$$y_2 = c_1'' e^x\cos x + c_2'' e^x \sin x + c_3'' e^{-x}\cos x + c_4'' e^{-x}\sin x + y_p$$

بنابراین:

$$y_2 - y_1 = \underbrace{(c_1''-c_1')}_{C_3}e^x\cos x + \underbrace{(c_2''-c_2')}_{C_4}e^x\sin x + \underbrace{(c_3''-c_3')}_{C_1}e^{-x}\cos x + \underbrace{(c_4''-c_4')}_{C_2}e^{-x}\sin x \Rightarrow$$

$$y_2 - y_1 = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^x(c_3\cos x + c_4\sin x)$$

۱۶۵ـ گزینه «۱» با تقسیم طرفین معادله بر x^2 داریم:

$$y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}y' + \underbrace{(1-\frac{1}{4x^2})}_{q(x)}y = 0$$

$$y_2 = x^{\frac{-1}{2}}\sin x \int \frac{1}{x^{-1}\sin^2 x} e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx = x^{\frac{-1}{2}}\sin x\int\frac{dx}{\sin^2 x} = x^{\frac{-1}{2}}\sin x(-\cot x) = -x^{\frac{-1}{2}}\cos x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = c_1 y_1 - c_2 y_2 = x^{-\frac{1}{2}}(c_1\sin x - c_2\cos x)$$

۱۶۶ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب معین مطابق (۲ـ ۳۲) داریم:

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود که y_h و y_p دارای جملات تکراری نباشند بنابراین:

$$y_p = A\cos x + Bx\sin x$$

در نتیجه:

$$y_p' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$$
$$y_p'' = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x \longrightarrow \begin{cases} -2A = 0 \longrightarrow A = 0 \\ 2B = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$y_p = \frac{x}{2}\sin x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x$$

۱۶۷ـ گزینه «۴» معادله مشخصه عبارتست از:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

چون جمع ضرایب توانهای فرد λ با جمع ضرایب توانهای زوج λ برابر است معادله دارای ریشه $\lambda = -1$ می‌باشد برای تعیین ریشه‌های دیگر معادله داریم:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 & \lambda + 1 \\ \hline \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 13 \\ \hline -4\lambda^2 + 9\lambda + 13 & \\ -4\lambda^2 - 4\lambda & \\ \hline 13\lambda + 13 & \\ 13\lambda + 13 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابراین ریشه‌های دیگر معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4\lambda+13=0 \longrightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-13}}{1}=2\pm 3i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=3\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۲) برای ریشه $\lambda=-1$ جمله c_1e^{-x} و مطابق (۲ـ۱۴) برای ریشه $\lambda=2\pm 3i$ جمع $c_2e^{2x}\cos(3x)+c_3e^{2x}\sin(3x)$ را به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}\cos(3x)+c_3e^{2x}\sin(3x)$$

۱۶۸ـ گزینه «۴» معادله داده شده فاقد x می‌باشد با قرار دادن $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$yz\frac{dz}{dy}=2z^2 \longrightarrow z(y\frac{dz}{dy}-2z)=0 \xrightarrow{z\neq 0} \frac{dz}{z}=\frac{2dy}{y} \longrightarrow Lnz=2Lny+Lnc_1 \longrightarrow z=c_1y^2$$

$$\longrightarrow y'=c_1y^2 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=c_1y^2 \longrightarrow \frac{dy}{y^2}=c_1dx \longrightarrow \frac{-1}{y}=c_1x+c_2 \longrightarrow y=\frac{-1}{c_1x+c_2}$$

اگر $z=0$ باشد $y'=0$ است در نتیجه $y=c$ می‌باشد.

۱۶۹ـ گزینه «۳» با قرار دادن جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$(y_u''-y_u')+y_u'-4y=0 \longrightarrow y_u''-4y=0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-4=0 \longrightarrow \lambda=\pm 2$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1e^{2u}+c_2e^{-2u}$$

چون $u=Lnx$ است داریم:

$$y=c_1x^2+c_2x^{-2}$$

۱۷۰ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-1=0 \longrightarrow \lambda=\pm 1$$

مطابق نتیجه (۲ـ۸) داریم:

$$y=c_1\cos h\,x+c_2\sin h\,x$$

۱۷۱ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \longrightarrow (\lambda+2)(\lambda-1)=0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda=-2\\ \lambda-1=0 \longrightarrow \lambda=1\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y_h=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲ـ۲۶) داریم:

$$y_p=\frac{1}{D^2+D-2}(\cos t-3\sin t)=\frac{1}{D^2+D-2}\cos t-3\frac{1}{D^2+D-2}\sin t$$

$$=\frac{1}{-1+D-2}\cos t+3\frac{1}{-1+D-2}\sin t=\frac{D+3}{D^2-9}\cos t+3\frac{D+3}{D^2-9}\sin t$$

$$=\frac{-1}{10}(D+3)\cos t+\frac{3}{10}(D+3)\sin t=\frac{1}{10}\sin t-\frac{3}{10}\cos t+\frac{3}{10}\cos t+\frac{9}{10}\sin t=\sin t$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y=y_h+y_p=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}+\sin t$$

جواب فوق در صورتی کراندار است که $c_1=0$ در نتیجه $y=c_2e^{-2t}+\sin t$ بنابراین $y'=-2c_2e^{-2t}+\cos t$ حال با توجه به شرایط داده شده داریم:

$$y(0)=a \longrightarrow c_2=a$$

$$y'(0)=b \longrightarrow -2c_2+1=b \longrightarrow 2a+b=1$$

۱۷۲ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4-1=0 \longrightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda^2-1=0 \longrightarrow \lambda=\pm 1\\ \lambda^2+1=0 \longrightarrow \lambda=\pm i\end{cases}$$

مطابق (۲ـ۱۲) برای ریشه حقیقی متمایز $\lambda=1$ جمله c_1e^{x} و برای $\lambda=-1$ جمله c_2e^{-x} و مطابق (۲ـ۱۴) برای ریشه‌های $\lambda=\pm i$ جمله $c_3\cos x+c_4\sin x$ به جواب عمومی اضافه می‌کنیم بنابراین:

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ ۳۲) داریم:

$$y_p=A\cos x+B\sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب y_p در x سبب می‌شود تا y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند بنابراین:

$$y_p=Ax\cos x+Bx\sin x$$

در نتیجه:

$$y_p'=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x$$

$$y_p''=-2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x$$

$$y_p'''=-3A\cos x+Ax\sin x-3B\sin x-Bx\cos x$$

$$y_p^{(4)}=4A\sin x+Ax\cos x-4B\cos x+Bx\sin x$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$4A\sin x-4B\cos x=\sin x+\cos x \longrightarrow \begin{cases}4A=1 \longrightarrow A=\frac{1}{4}\\ -4B=1 \longrightarrow B=\frac{-1}{4}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$y_p = \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x\sin x$$

و جواب عمومی معادله بصورت زیر می‌باشد.

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{x}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x$$

۱۷۳ـ گزینه «۴» معادله فاقد y است با قرار دادن $y' = p$ و $y'' = p'$ داریم:

$$p' = f(x,p)$$

که یک معادله مرتبه اول حاصل می‌شود.

۱۷۴ـ گزینه «۳» به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲- ۲۵) و (۲ـ ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1}(\cos x + e^{2x}) = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1}\cos x + \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 1}e^{2x}$$
$$= \frac{1}{D^2D - 2D^2 + 1}\cos x + \frac{1}{(2)^3 - 2D^2 + 1}e^{2x} = \frac{1}{-D + 3}\cos x + e^{2x} = \frac{3 + D}{9 - D^2}\cos x + e^{2x}$$
$$= \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x + e^{2x}$$

۱۷۵ـ گزینه «۴» مطابق جایگزینی‌های (۲ـ ۱۸) داریم:

$$(y_u'' - y_u') - y_u' + y = 0 \longrightarrow y_u'' - 2y_u' + y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \longrightarrow \lambda = 1 \text{ ریشه مضاعف}$$

مطابق (۲ـ ۹) داریم:

$$y = c_1e^u + c_2ue^u$$

چون $u = \text{Ln}x$ است داریم:

$$y = c_1e^{\text{Ln}x} + c_2\text{Ln}x\,e^{\text{Ln}x} = c_1x + c_2x\,\text{Ln}x$$

۱۷۶ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تعریف رونسکین}} 2e^x = W(y_1', y_2') = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{y_1 = e^x \Rightarrow y_1' = y_1'' = e^x} 2e^x = \begin{vmatrix} e^x & y_2' \\ e^x & y_2'' \end{vmatrix} \Rightarrow 2e^x = e^x(y_2'' - y_2') \Rightarrow y_2'' - y_2' = 2$$

در اینصورت جواب y_2 مطلوب، یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' - y' = 2$ است. برای حل معادله دیفرانسیل مذکور ابتدا ریشه‌های معادله مشخصه را بدست می‌آوریم:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_1 + c_2e^x$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x) = 2$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p = Ax$ در نظر گرفت که با جایگذاری در معادله $y'' - y' = 2$ مقدار $A = -2$ حاصل می‌شود. در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض از تساوی زیر محاسبه می‌شود:

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^x - 2x$$

که با فرض $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$ تنها گزینه (۴) با ضابطه $y_2 = e^x - 2x$ می‌تواند صحیح باشد.

۱۷۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 5}}{1} = 2 \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 5}(5x - 4)$$

مطابق (۲ ـ ۲۷) عدد ۱ را بر $D^2 - 4D + 5$ تقسیم می‌کنیم و عمل تقسیم را تا زمانی که درجه خارج قسمت یک باشد ادامه می‌دهیم چون عبارت $5x - 4$ از درجه اول است.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 5 - 4D + D^2 \\ \hline 1 - \frac{4}{5}D + \frac{1}{5}D^2 & \frac{1}{5} + \frac{4}{25}D \\ \hline \frac{4}{5}D - \frac{1}{5}D^2 & \end{array}$$

$$y_p = (\frac{1}{5} + \frac{4}{25}D)(5x - 4) = x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x + x$$

۱۷۸ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

مطابق (۲ ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

با توجه به تساوی $r(x) = x^۲$ ضابطه جواب خصوصی را بصورت $y_p = Ax^۲ + Bx + C$ درنظر می‌گیریم. در اینصورت با جایگذاری در معادله دیفرانسیل $y'' + y = x^۲$، مقادیر $A = ۱$، $B = ۰$ و $C = -۲$ بدست می‌آید. در نتیجه؛

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + x^۲ - ۲$$

۱۷۹ـ گزینه «۱» همانند مسأله قبل است قبل جواب خصوصی آن سه برابر جواب خصوصی مسأله قبل است یعنی:

$$y_p = ۳x^۲ - ۶$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + ۳x^۲ - ۶$$

۱۸۰ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۳ + ۳\lambda^۲ + ۳\lambda + ۱ = ۰ \longrightarrow (\lambda + ۱)^۳ = ۰ \longrightarrow \lambda = -۱$$ ۳ بار تکرار

مطابق (۲ـ ۱۳) داریم:

$$y = c_۱ e^{-x} + c_۲ x e^{-x} + c_۳ x^۲ e^{-x}$$

۱۸۱ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x$$

برای محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین مطابق (۲ـ۳۲) داریم:

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

مطابق تذکر (۲ـ۹ـ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که y_h و y_p جملات اصلی یکسان نداشته باشند یعنی:

$$y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$$

بنابراین:

$$y'_p = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$$

$$y''_p = -۲A \sin x - Ax \cos x + ۲B \cos x - Bx \sin x$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$-۲A \sin x + ۲B \cos x = ۳ \sin x \longrightarrow \begin{cases} -۲A = ۳ \longrightarrow A = \dfrac{-۳}{۲} \\ ۲B = ۰ \longrightarrow B = ۰ \end{cases}$$

در نتیجه $y_p = \dfrac{-۳}{۲} x \cos x$ می‌باشد و جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x - \frac{۳}{۲} x \cos x$$

۱۸۲ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۴ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۲i$$

مطابق (۲ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos(۲x) + c_۲ \sin(۲x)$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ + ۴}(x^۲ + ۴)$$

مطابق (۲ـ۲۷) عدد یک را بر $D^۲ + ۱$ تقسیم می‌کنیم بطوری که خارج قسمت تقسیم از درجه دوم باشد زیرا عبارت $x^۲ + ۴$ از درجه دوم است:

$$\begin{array}{l|l} ۱ & ۴ + D^۲ \\ \hline ۱ + \frac{۱}{۴}D^۲ & \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}D^۲ \\ \hline -\frac{۱}{۴}D^۲ & \end{array}$$

$$y_p = (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}D^۲)(x^۲ + ۴) = \frac{x^۲}{۴} + \frac{۷}{۸}$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos(۲x) + c_۲ \sin(۲x) + \frac{x^۲}{۴} + \frac{۷}{۸}$$

۱۸۳ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ + ۱ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x$$

با توجه به تساوی $r(x) = x^۲ + ۴$، ضابطه جواب خصوصی را بصورت $y_p = Ax^۲ + Bx + C$ در نظر می‌گیریم. در اینصورت با جایگذاری در معادله دیفرانسیل $y'' + y = x^۲ + ۴$، مقادیر $A = ۱$، $B = ۰$ و $C = ۰$ بدست می‌آید. در نتیجه؛

$$y = y_h + y_p = c_۱ \cos x + c_۲ \sin x + x^۲ + ۲$$

۱۸۴ـ گزینه «۴» برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۴D + ۱}(۳t - ۴)$$

مطابق (۲ـ۲۷) عدد یک را بر $D^۲ - ۴D + ۱$ تقسیم می‌کنیم بطوری که درجه خارج قسمت یک باشد چون عبارت $۳t - ۴$ از درجه اول است:

$$\begin{array}{r|l} ۱ & ۱ - ۴D + D^۲ \\ \hline ۱ - ۴D + D^۲ & ۱ + ۴D \\ \hline ۴D - D^۲ & \end{array}$$

$$y_p = (۱ + ۴D)(۳t - ۴) = ۳t + ۸$$

۱۸۵ـ گزینه «۲» به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۲D + ۱}\left(\frac{e^x}{x^۲}\right) = \frac{۱}{(D-۱)(D-۱)}\left(\frac{e^x}{x^۲}\right)$$

با فرض $u = \frac{۱}{D-۱}\left(\frac{e^x}{x^۲}\right)$ داریم:

$$u' - u = \frac{e^x}{x^۲} \longrightarrow u = e^x\left[\int e^{-x}\frac{e^x}{x^۲}\,dx\right] = \frac{-۱}{x}e^x$$

بنابراین $y_p = \frac{۱}{D-۱}u$ می‌باشد و از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$y_p' - y_p = u = \frac{-۱}{x}e^x \longrightarrow y_p = e^x\left[\int e^{-x}\frac{-e^x}{x}dx\right] = -e^x \operatorname{Ln}|x|$$

۱۸۶ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۴ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۲$$

مطابق (۲ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{۲x} + c_۲ e^{-۲x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس مطابق (۲ـ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۴}\sin x = \frac{-۱}{۵}\sin x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{۲x} + c_۲ e^{-۲x} - \frac{۱}{۵}\sin x$$

۱۸۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۱ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۱$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس مطابق (۲ـ۲۵) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۱}۴e^{۰x} = -۴c^{۰x} = -۴$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{x} + c_۲ e^{-x} - ۴$$

۱۸۸ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۹ = ۰ \longrightarrow \lambda = \pm ۳$$

مطابق (۲ـ ۱۰) داریم:

$$y_h = c_۱ e^{۳x} + c_۲ e^{-۳x}$$

برای محاسبه y_p به روش اپراتور معکوس مطابق (۲ـ۲۶) داریم:

$$y_p = \frac{۱}{D^۲ - ۹}\sin x = \frac{-۱}{۱۰}\sin x$$

بنابراین جواب عمومی معادله بصورت زیر است:

$$y = y_h + y_p = c_۱ e^{۳x} + c_۲ e^{-۳x} - \frac{۱}{۱۰}\sin x$$

۱۸۹ـ گزینه «۳» با قراردادن جایگزینی‌های (۲ـ۱۸) داریم:

$$۲(y_u'' - y_u') + ۱۱y_u' + ۴y = ۰ \longrightarrow ۲y_u'' + ۹y_u' + ۴y = ۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$۲\lambda^۲ + ۹\lambda + ۴ = ۰ \longrightarrow \lambda = \frac{-۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۳۲}}{۴} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-۹ + ۷}{۴} = \frac{-۱}{۲} \\ \lambda = \frac{-۹ - ۷}{۴} = -۴ \end{cases}$$

مطابق (۲ـ۸) داریم:

$$y = c_۱ e^{\frac{-۱}{۲}u} + c_۲ e^{-۴u}$$

چون $u = \operatorname{Ln} x$ است داریم:

$$y = c_۱ x^{\frac{-۱}{۲}} + c_۲ x^{-۴}$$

۱۹۰ـ گزینه «۱» معادله فاقد x است با قرار دادن $y'' = z\frac{dz}{dy}$ و $y' = z$ داریم:

$$1+yz\frac{dz}{dy}+z^2=0 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{z\,dz}{1+z^2}=\int\frac{-dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Ln(1+z^2)=-Ln\,y+Ln\,c_1 \quad \Rightarrow$$

$$Ln\sqrt{1+z^2}=Ln\frac{c_1}{y} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+z^2}=\frac{c_1}{y} \quad \Rightarrow \quad 1+z^2=\left(\frac{c_1}{y}\right)^2$$

$$\xrightarrow{z=y'} (y')^2=\frac{c_1^2}{y^2}-1 \quad \Rightarrow \quad y'^2=\frac{c_1^2-y^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{c_1-y^2}}=dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int:\text{ جدا شونده}} \int\frac{ydy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=\int dx \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{c_1^2-y^2}=x+c_2 \quad \Rightarrow \quad (x+c_2)^2+y^2=c_1^2$$

۱۹۱ـ گزینه «۳» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله کشی ـ اویلر با $p_0 = 3$ و $q_0 = 5$ است. در اینصورت؛

$$x^2y''+3xy'+5y=0 \xrightarrow{z=Lnx} \frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+5y=0$$

ریشه‌های مشخصه، معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت حاصل عبارتند از:

$$\lambda^2+2\lambda+5=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1\pm 2i \rightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=e^{-z}(c_1\cos 2z+c_2\sin 2z) \xrightarrow{z=Lnx} y_h=e^{-Lnx}(c_1\cos(2Lnz)+c_2\sin(2Lnz)) \quad \Rightarrow$$

$$y_h=c_1x^{-1}\cos(2Lnz)+c_2x^{-1}\sin(2Lnz)$$

یـادآوری. معادلـه کـشی ـ اویلـر همگـن $x^2y''+p_0xy'+q_0y=0$ بـا تغییـر متغیـر $z=Lnx$ بـه معادلـه بـا ضـرائب ثابـت $\frac{d^2y}{dz^2}+(p_0-1)\frac{dy}{dz}+q_0y=0$ تبدیل می‌شود.

۱۹۲ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+2\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=0,-2$$

در نتیجه مطابق فرمول (۲ـ۸) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=c_1e^{0x}+c_2e^{-2x}=c_1+c_2e^{-2x}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x)=4\sin 2x$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p=A\sin 2x+B\cos 2x$ در نظر گرفت. در اینصورت؛

$$(y_p=A\sin 2x+B\cos 2x \quad \Rightarrow \quad y_p'=2A\cos 2x-2B\sin 2x \quad \& \quad y_p''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} y''+2y'=4\sin 2x \Rightarrow (-4A\sin 2x-4B\cos 2x)+2(2A\cos 2x-2B\sin 2x)=4\sin 2x \Rightarrow$$

$$-4(A+B)\sin 2x-4(B-A)\cos 2x=4\sin 2x \longrightarrow \begin{cases}-4(A+B)=4\\ -4(B-A)=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=B=-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{y_p=A\sin 2x+B\cos 2x} y_p=-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'=4\sin 2x$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$$

لازم بذکر است، جواب خصوصی y_p را با روش اپراتور معکوس نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$y_p=4\frac{1}{D^2+2D}\sin 2x=4\frac{1}{-4+2D}\sin 2x=2\frac{1}{D-2}\sin 2x=2\frac{D+2}{D^2-4}\sin 2x=-\frac{1}{4}(D+2)\sin 2x \quad \Rightarrow$$

$$y_p=-\frac{1}{4}(2\cos 2x+2\sin 2x) \quad \Rightarrow \quad y_p=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$$

۱۹۳ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله کشی ـ اویلر با $p_0 = 1$ و $q_0 = 1$ است. در اینصورت؛

$$x^2y''+xy'+y=0 \xrightarrow{z=Lnx} \frac{d^2y}{dz^2}+y=0$$

معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت است. ریشه‌های مشخصه آن عبارتند از:

$$\lambda^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=e^{0z}(c_1\cos z+c_2\sin z) \xrightarrow{z=Lnx} y_h=c_1\cos(Lnx)+c_2\sin(Lnx)$$

۱۹۴ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله کشی ـ اویلر با $p_0 = 1$ و $q_0 = 9$ است. در اینصورت؛

$$x^2y''+xy'+9y=0 \xrightarrow{z=Lnx} \frac{d^2y}{dz^2}+9y=0$$

ریشه‌های مشخصه معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت حاصل عبارتند از:

$$\lambda^2+9=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm 3i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=3\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h(z)=e^{0z}(c_1\cos(3z)+c_2\sin(3z)) \xrightarrow{z=Lnx} y_h(x)=c_1\cos(3Lnx)+c_2\sin(3Lnx)$$

برای محاسبه ضرائب c_1 و c_2 با توجه به شرایط اولیه اینگونه عمل می‌کنیم:

$$y_h(x)=c_1\cos(3Lnx)+c_2\sin(3Lnx) \quad ;(I) \xrightarrow{x=1} y_h(1)=c_1 \xrightarrow{y_h(1)=2} c_1=2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y_h'(x)=-c_1\frac{3}{x}\sin(3Lnx)+c_2\cos(3Lnx) \xrightarrow{x=1} y_h'(1)=3c_2 \xrightarrow{y_h'(1)=0} c_2=0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی ; } (c_1=2 \ \& \ c_2=0)} y=2\cos(3Lnx)$$

۱۹۵ـ گزینه «۲»

$$y''+۴y'+۵y=۰ \quad \Rightarrow \quad L[y'']+۴L[y']+۵L[y]=۰$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-۱}f(۰)-\cdots-f^{(n-۱)}(۰)} (s^۲L[y]-sy(۰)-y'(۰))+۴(sL[y]-y(۰))+۵L[y]=۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۱ \ \& \ y'(۰)=۰} s^۲L[y]-s+۴sL[y]-۴+۵L[y]=۰ \quad \Rightarrow \quad (s^۲+۴s+۵)L[y]=s+۴ \quad \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{s+۴}{s^۲+۴s+۵} \quad \Rightarrow \quad y=L^{-۱}\left[\frac{s+۴}{s^۲+۴s+۵}\right]=L^{-۱}\left[\frac{(s+۲)+۲}{(s+۲)^۲+۱}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} y=e^{-۲t}L^{-۱}\left[\frac{s+۲}{s^۲+۱}\right]=e^{-۲t}L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۱}+\frac{۲}{s^۲+۱}\right] \quad \Rightarrow \quad y=e^{-۲x}(\cos x+۲\sin x)$$

لازم بذکر است، معادله مفروض را می‌توان با روش مربوط به معادلات دیفرانسیل همگن با ضرائب ثابت نیز حل کرد.

۱۹۶ـ گزینه «۳» از آنجائیکه $e^{۱x}$ و $e^{۲x}$. دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مطلوب هستند، در نتیجه مقادیر $m_۱=۱$ و $m_۲=۲$ ریشه‌های معادله مشخصه متناظر هستند. در اینصورت؛

$$(D-۱)(D-۲)=۰ \quad \Rightarrow \quad D^۲-۳D+۲=۰ \quad \Rightarrow \quad y''-۳y'+۲y=۰$$

یادآوری. همانگونه که می‌دانیم، اگر $y=e^{mx}$ یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض باشد، آنگاه مقدار m یک ریشه معادله مشخصه متناظر است.

۱۹۷ـ گزینه «۳»

$$y''+y'=-۲e^{-x} \quad \Rightarrow \quad L[y'']+L[y']=-۲\frac{۱}{s+۱}$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-۱}f(۰)-\cdots-f^{(n-۱)}(۰)} (s^۲L[y]-s\,y(۰)-y'(۰))+(sL[y]-y(۰))=-\frac{۲}{s-۱}$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۲ \ \& \ y'(۰)=۰} s^۲L[y]-۲s+s\,L[y]-۲=\frac{۲}{s-۱} \quad \Rightarrow \quad (s^۲+s)L[y]=۲+۲s-\frac{۲}{s+۱} \quad \Rightarrow$$

$$s(s+۱)L[y]=\frac{۲s(s+۲)}{s+۱} \quad \Rightarrow \quad L[y]=۲\frac{s+۲}{(s+۱)^۲} \quad \Rightarrow \quad y(x)=۲L^{-۱}\left[\frac{s+۲}{(s+۱)^۲}\right]=۲L^{-۱}\left[\frac{(s+۱)+۱}{(s+۱)^۲}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} y(x)=۲e^{-x}L^{-۱}\left[\frac{s+۱}{s^۲}\right]=۲e^{-x}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s^۲}\right] \quad \Rightarrow \quad y(x)=۲e^{-x}(۱+x)$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱)=۲e^{-۱}(۱+۱)=۴e^{-۱}$$

۱۹۸ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله کشی ـ اویلر با $p_۰=-۳$ و $q_۰=۵$ است. در اینصورت؛

$$x^۲y''-۳xy'+۵y=۰ \xrightarrow{z=Lnx} \frac{d^۲y}{dz^۲}-۴\frac{dy}{dz}+۵y=۰$$

ریشه‌های مشخصه معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت حاصل، عبارتند از:

$$\lambda^۲-۴\lambda+۵=۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۲۰}}{۲}=\frac{۴\pm۲i}{۲} \quad \Rightarrow \quad \lambda=۲\pm i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=۲\\ \beta=۱\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h(z)=e^{۲z}(c_۱\cos z+c_۲\sin z) \xrightarrow{z=Lnx} y_h(x)=e^{۲Lnx}(c_۱\cos(Lnx)+c_۲\sin(Lnx)) \quad \Rightarrow$$

$$y_h(x)=c_۱x^۲\cos(Lnx)+c_۲x^۲\sin(Lnx)$$

با توجه به گزینه‌ها، بدون محاسبه $c_۱$ و $c_۲$، فقط گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۱۹۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲-\lambda=۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda-۱)=۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda=۰,۱$$

در نتیجه مطابق فرمول (۲ـ۸) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=c_۱e^{۰x}+c_۲e^{x}=c_۱+c_۲e^{x}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x)=۳e^{x}+۷$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-y'=۳e^{x}+۷$ را می‌توان بصورت $y_p=x(Ae^{x}+B)$ در نظر گرفت.

۲۰۰ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲-۴\lambda+۱=۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴}}{۲}=\frac{۲\pm۲\sqrt{۳}}{۲} \quad \Rightarrow \quad \lambda=۱\pm\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر با توجه به ضابطه جواب $y=e^{۲ax}+e^{۳bx}$، مقادیر ۲a و ۳a در واقع ریشه‌های معادله مشخصه می‌باشند. در نتیجه؛

$$۲a=۱\pm\sqrt{۳} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{۱}{۲}\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \& \qquad ۳b=۱\pm\sqrt{۳} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{۱}{۳}\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۰۱ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۴+۲\lambda^۲+۱=۰ \quad \Rightarrow \quad (\lambda^۲+۱)^۲=۰ \quad \Rightarrow \quad \lambda^۲=\pm i \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm i \qquad \text{ریشه‌های مضاعف}$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{(۴)}+۲y''+y=۰$ با توجه به روش ضرائب نامعین با ضابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y_h=(c_۱+c_۲x)\cos x+(c_۳+c_۴x)\sin x$$

۲۰۲ـ گزینه «۲»

$$y''=x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy'}{dx}=x \quad \Rightarrow \quad dy'=x\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} y'=\frac{x^۲}{۲}+c_۱ \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^۲}{۲}+c \quad \Rightarrow \quad dy=(\frac{x^۲}{۲}+c)\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} y(x)=\frac{x^۳}{۶}+c_۱x+c_۲ \quad \text{; (جواب عمومی)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x=۰} y(۰)=c_۲ \xrightarrow{y(۰)=۱} c_۲=۱\\ \xrightarrow{x=۱} y(۱)=\frac{۱}{۶}+c_۱+c_۲ \xrightarrow{c_۲=۱ \ \& \ y(۱)=۲} ۲=\frac{۱}{۶}+c_۱+۱ \quad \Rightarrow \quad c_۱=\frac{۵}{۶}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y=\frac{x^۳}{۶}+x+\frac{۵}{۶}$$

۲۰۳ـ گزینه «۳»

$$(x+1)y''-(2x+3)y'+(x+2)y=0 \quad \Rightarrow \quad y''-\frac{2x+3}{x+1}y'+\frac{x+2}{x+1}y=0$$

مطابق (۲ـ۲۲) داریم:

$$y_2=e^x\int\frac{1}{(e^x)^2}e^{-\int-\frac{2x+3}{x+1}dx}dx=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\frac{1}{x+1}dx}dx \quad \Rightarrow$$

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int(2+\frac{1}{x+1})dx}dx=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{2x+\mathrm{Ln}(x+1)}dx \quad \Rightarrow$$

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}\cdot e^{2x}(x+1)\,dx \quad \Rightarrow \quad y_2=e^x\cdot\frac{(x+1)^2}{2}$$

۲۰۴ـ گزینه «۲» با توجه به تعریف رونسکین داریم:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_2 & y_2'\end{vmatrix}\xrightarrow{y_1=x^{-1}}W(\frac{1}{x},y_2)=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & y_2\\ \frac{-1}{x^2} & y_2'\end{vmatrix}=\frac{1}{x}y_2'-\frac{1}{x^2}y_2$$

$$\xrightarrow{W(\frac{1}{x},y_2)=e^{-x}}\frac{1}{x}y_2'-\frac{1}{x^2}y_2=e^{-x}$$

با توجه به ضابطه حاصل، توابع $y_1=\frac{1}{x}$ و y_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=e^{-x}$ صدق می‌کنند.

برای تشخیص گزینه صحیح اینگونه عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=e^{-x}\xrightarrow{x^2\times(\text{معادله})}xy'-y=x^2e^{-x}\ ;(1)\xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})}xy''+2y=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$$

$$\xrightarrow{x\times(\text{معادله})}x^2y''+2xy'=2x^2e^{-x}-x(x^2e^{-x})$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}\ \Rightarrow\ x^2e^{-x}=xy'-y}x^2y''+2xy'=2(xy'-y)-x(xy'-y) \quad \Rightarrow \quad x^2y''+x^2y'-(2+x)y=0$$

لازم بذکر است، تابع $y_1=x^{-1}$ تنها در گزینه (۲) صدق می‌کند.

۲۰۵ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله کشی اویلر با $p_0=-1$ و $q_0=1$ است. در اینصورت؛

$$x^2y''-xy'+y=0\xrightarrow{z=\mathrm{Ln}x}\frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}+y=0$$

ریشه‌های مشخصه معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت حاصل عبارتند از:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

در نتیجه مطابق فرمول (۹ـ۲) داریم:

$$y=c_1e^z+c_2ze^z\xrightarrow{z=\mathrm{Ln}x}y=c_1x+c_2x\,\mathrm{Ln}x$$

در اینصورت؛

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\xrightarrow{y_1=x\ \ \&\ \ y_2=x\mathrm{Ln}x}W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x & x\,\mathrm{Ln}x\\ 1 & \mathrm{Ln}x+1\end{vmatrix}=x(\mathrm{Ln}x+1)-x\,\mathrm{Ln}x=x$$

۲۰۶ـ گزینه «۲»

$$W(x^{-1},y)=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & y\\ \frac{-1}{x} & y'\end{vmatrix}=\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y\xrightarrow{W(x^{-1},y)=3}\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=3 \quad \Rightarrow \quad y'+\frac{1}{x}y=3x$$

$$\xrightarrow{\text{معادله خطی مرتبه اول}}\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\mathrm{Ln}x}=x \quad \&$$

$$y=\frac{1}{x}\left\{\int x\times 3x\ dx+c\right\}=\frac{1}{x}(x^3+c) \quad \Rightarrow \quad y=x^2+cx^{-1}$$

۲۰۷ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$D^2-3D+2=0 \quad \Rightarrow \quad (D-1)(D-2)=0 \quad \Rightarrow \quad D=1,2$$

در نتیجه مطابق فرمول (۸ـ۲) داریم:

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

از طرف با توجه به تساوی $r(x)=e^{5x}$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p=Ae^{5x}$ در نظر گرفت. در اینصورت:

$$(y_p=Ae^{5x} \quad \Rightarrow \quad y_p'=5Ae^{5x} \quad \&\quad y_p''=25Ae^{5x})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}}(D^2-3D+2)y=y''-3y'+2y=12e^{5x} \quad \Rightarrow \quad 25Ae^{5x}-15Ae^{5x}+2Ae^{5x}=12e^{5x} \quad \Rightarrow$$

$$12Ae^{5x}=12e^{5x} \quad \Rightarrow \quad A=1\xrightarrow{y_p=Ae^{5x}}y_p=e^{5x}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(D^2-3D+2)y=12e^{5x}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^{5x}$$

۲۰۸ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=2,3$$

در نتیجه مطابق فرمول (۸ـ۲) جواب عمومی معادله همگن $y''-5y'+6y=0$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

برای محاسبه جواب خصوصی y_p، ابتدا به محاسبه رونسکین دو جواب $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{3x}$ می‌پردازیم:

$$W=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}e^{2x} & e^{3x}\\ 2e^{2x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=3e^{5x}-2e^{5x}=e^{5x}$$

در اینصورت؛

$$y_p=-y_1\int\frac{y_2\,g(t)}{W}dt+y_2\int\frac{y_1\,g(t)}{W}dt=-e^{2x}\int\frac{e^{3t}g(t)}{e^{5t}}dt+e^{3x}\int\frac{e^{2t}g(t)}{e^{5t}}dt \quad \Rightarrow$$

$$y_p=-e^{2x}\int e^{-2t}g(t)\,dt+e^{3x}\int e^{-3t}g(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad y_p=\int(e^{3(x-t)}-e^{2(x-t)})g(t)\,dt$$

۲۰۹ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن $y''+y'+y=0$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

۲۱۰ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda-6=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-2,3$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۸) جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x)=e^{3x}$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت $y_p=A+e^{3x}$ در نظر گرفت. در اینصورت؛

$$(y_p=Axe^{3x} \quad \Rightarrow \quad y_p'=Ae^{3x}+3Axe^{3x} \quad \& \quad y_p''=6Ae^{3x}+9Axe^{3x})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} y''-y'-6y=e^{3x} \Rightarrow (6Ae^{3x}+9Axe^{3x})-(Ae^{3x}+3Axe^{3x})-6Axe^{3x}=e^{3x} \Rightarrow$$

$$5Ae^{3x}=e^{3x} \quad \Rightarrow \quad 5A=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5} \xrightarrow{y_p=Axe^{3x}} y_p=\frac{1}{5}xe^{3x}$$

تست‌های تکمیلی فصل دوم

۱ـ صورت کلی جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-6y'+13y=xe^{3x}\sin 2x$ عبارتست از:

۱) $y_P=e^{3x}\{(a_1x+a_0)\cos 2x+(b_1x+b_0)\sin 2x\}$

۲) $y_P=x^2e^{3x}\{(a_1x+a_0)\cos 2x+(b_1x+b_0)\sin 2x\}$

۳) $y_P=e^{3x}\{A\cos 2x+B\sin 2x\}$

۴) $y_P=e^{3x}\{(a_1x^2+a_0x)\cos 2x+(b_1x^2+b_0x)\sin 2x\}$

۲ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+3y'-2y=2e^{3x}$ به ازای $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{17}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۲

۳ـ جواب خصوصی معادله $y=xe^{-x}$ (D^2+2D+1) به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2e}$ ۲) $\frac{1}{3e}$ ۳) $\frac{1}{6e}$ ۴) $\frac{2}{3e}$

۴ـ کدامیک از توابع زیر جواب معادله دیفرانسیل $y''+4y'-4y=0$ نیست؟

۱) $\cosh 2x$ ۲) $\tanh 2x$ ۳) $2\sinh 2x$ ۴) $\sinh 2x$

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''+2y'+xy=0$ برابر است با:

۱) $y=\frac{1}{x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$ ۲) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\sin x+c_2\cos x)$

۳) $y=\frac{1}{x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$ ۴) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

۶ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'^2=6xy^2-y''y$ کدام است؟

۱) $y=x^3+c_1x+c_2$ ۲) $y=\exp\{x^3+c_1x+c_2\}$

۳) $y=x^2+c_1x+c_2$ ۴) $y=\exp\{x^2+c_1x+c_2\}$

۷ـ از اینکه $y_1=\frac{\sin x}{x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $xy''+2y'+xy=0$ است آنگاه جواب دیگر مستقل خطی با این جواب عبارتست از:

۱) $\frac{-\cos x}{x}$ ۲) $\frac{\sin x}{x^2}$ ۳) $\frac{-\cos x}{x^2}$ ۴) $x^2\sin x$

۸ـ جواب مساله $xy''-y'=3x^2$ با شرط $y(0)=0$ و $y'(1)=0$ کدام است؟

۱) $y=x^3+\frac{1}{3}x^2+x$ ۲) $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ ۳) $y=x^3-\frac{2}{3}x^2+1$ ۴) $y=x^3+\frac{1}{2}x^2+1$

۹ـ هرگاه $\omega(y_1,y_2)$ رونسکین دو تابع y_1 و y_2 باشد، آنگاه جواب معادله $y''=e^x$ $\omega(e^x,y)$ کدام است؟

۱) $e^x-e^{-x}=c$ ۲) $e^{-x}y+e^{-x}=c$ ۳) $e^xy-e^x=c$ ۴) $e^{-x}y-e^x=c$

۱۰ـ اگر $y_1=x^2$ یک جواب معادله $x^2y''+xy'-4y=0$ باشد در اینصورت جواب عمومی عبارتست از:

۱) $y=c_1y_1+\frac{c_1}{y_1^3}$ ۲) $y=c_1y_1+c_2y_1^2$ ۳) $y=c_1y_1+\frac{c_2}{y_1}$ ۴) $y=c_1y_1+c_1y_1^{-2}$

۱۱ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ که $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$ برابر است با:

۱) $y = 2\sin x + \cos 2x$ ۲) $y = 2\sin x + 3\cos 2x$ ۳) $y = \sin x + 3\cos x$ ۴) $y = 3\sin x + 2\cos x$

۱۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $yy'' + y'^2 = 2yy'$ وقتی که $x \to -\infty$ کدام است؟

۱) عدد ثابت ۲) ∞ ۳) صفر ۴) ۱

۱۳ـ در معادله دیفرانسیل $y'' + 2xy' + 2(x^2 + 2)y = 0$ با شرط $y'(0) = 1$ مقدار $y'(1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴ـ جواب عمومی معادله $x^2 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ کدام است؟

۱) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ ۲) $y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^2$

۳) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x}$ ۴) $y = c_1 x + c_2 x^{-2} + c_3 x^2$

۱۵ـ یک جواب خصوصی آزمایش برای معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' + y = 2e^{-x} + xe^{x}$ کدام است؟

۱) $y_p = Axe^{-x} + (Bx + C)e^{x}$ ۲) $y_p = Ax^2 e^{-x} + (Bx + C)e^{x}$

۳) $y_p = Ae^{-x} + x(Bx + C)e^{x}$ ۴) $y_p = Ae^{-x} + x^2(Bx + C)e^{x}$

۱۶ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y^{(4)} - 2y'' + y = x - \sin x$ به ازای $x = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۱۷ـ یک جواب خصوصی معادله $y'' + a^2 y = \cos bx$ به ازای $x = 0$ کدام است؟ $(a^2 \neq b^2)$

۱) $\frac{1}{a^2 + b^2}$ ۲) $a^2 + b^2$ ۳) $\frac{1}{a^2 - b^2}$ ۴) $a^2 - b^2$

۱۸ـ جواب خصوصی معادله $y''' - y' = e^{2x}\sin^2 x$ به ازای $x = 0$ عبارتست از:

۱) $e - \frac{9}{520}$ ۲) $\frac{e}{12} + \frac{9}{520}$ ۳) $e + \frac{7}{520}$ ۴) $\frac{e}{12} - \frac{7}{520}$

۱۹ـ با شرط $y(0) = 3$ و $y'(0) = 4$ جواب معادله $y'' - y' - 6y = 0$ عبارتست از:

۱) $e^{-2x} + 2e^{3x}$ ۲) $\frac{13}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$ ۳) $\frac{2}{5}e^{-2x} + \frac{13}{5}e^{3x}$ ۴) $\frac{2}{5}e^{2x} + \frac{13}{5}e^{-3x}$

۲۰ـ یک جواب خصوصی آزمایشی معادله $y'' - 2y' + y = xe^{x}$ عبارتست از:

۱) $y_p = (Ax + B)e^{x}$ ۲) $y_p = x(Ax + B)e^{x}$ ۳) $y_p = x^2(Ax + B)e^{x}$ ۴) $y_p = x^3(Ax + B)e^{x}$

۲۱ـ اگر $y_p(x)$ جواب خصوصی معادله $y'' - y' - 2y = \cosh 2x$ باشد آنگاه $\lim_{x \to 0} y_p(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' - y' = (y')^3$ کدام است؟

۱) $x^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2$ ۲) $x^2 - (y - c_2)^2 = c_1^2$ ۳) $y^2 - (x - c_2)^2 = c_1^2$ ۴) $y^2 + (x - c_2)^2 = c_1^2$

۲۳ـ جواب معادله $(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = 0$ به ازای $x = 0$ عبارتست از:

۱) ۱ ۲) ثابت c ۳) صفر ۴) ∞

۲۴ـ جواب عمومی معادله $y''' + 13y' + 4y = 0$ کدام است؟

۱) $e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C$ ۲) $e^{x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C$

۳) $e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C$ ۴) $e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + C$

۲۵ـ جواب عمومی معادله $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 6x^2$ برابر است با:

۱) $y = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x^2$ ۲) $y = c_1 x + c_2 x^2 + x^2$ ۳) $y = c_1 x + \frac{c_2}{x_2} + \frac{3}{2}x^2$ ۴) $y = c_1 x + \frac{c_2}{x_2} - \frac{1}{2}x^2$

۲۶ـ جواب عمومی معادله $y'' - xy' + y = 0$ عبارتست از:

۱) $y = c_1 x^2 + c_2 e^{x}$ ۲) $y = c_1 x e^{x} + c_2 x$ ۳) $y = c_1 x + c_2 e^{x}$ ۴) $y = c_1 x^2 e^{x} + c_2 x$

۲۷ـ در معادله دیفرانسیل $y'' - xy' = y'^2$ هرگاه $x \to \infty$، آنگاه y' به سمت:

۱) به صفر میل می‌کند. ۲) به سمت عدد خاصی میل نمی‌کند.

۳) به یک میل می‌کند. ۴) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۲۸ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - xy' + y = 6x\,Lnx$ برابر است با:

۱) $y = c_1 x + c_2 x\,Lnx + x(Lnx)^3$ ۲) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + x e^{x}$

۳) $y = c_1 x + c_2 x\,Lnx + x^3 e^{x}$ ۴) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + x^3 e^{x}$

۲۹ـ جواب خصوصی معادله $y^{(4)} - y = e^{x}\cos x$ به ازای $x = 0$ برابر است با:

۱) $\frac{e}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{-e}{3}$ ۴) $\frac{-e}{5}$

۳۰ـ جواب معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' = 1$ وقتی که $x \to 1$ عبارتست از:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) عدد ثابت

۳۱ـ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^2 y' + y = x^2 e^{2x}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}e^{2}$ ۲) $\frac{1}{2}e^{4}$ ۳) e ۴) صفر

۳۲ـ یک جواب خصوصی معادله $x^3 y''' + x^2 y'' + xy' = 1$ کدام است؟

۱) x^2 ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{1}{2x}$ ۴) x

۳۳ـ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$ عبارتست از:

۱) $x^3 - x$ ۲) $-2x^2$ ۳) $x^3 + x$ ۴) x^2

۳۴ـ جواب معادله $xy'' - y' + y'^2 = 0$ عبارتست از:

۱) $y = -x + c_1 Ln|x| + c_2$ ۲) $y = -x + c_1 Ln|c_1 - x| + c_2$

۳) $y = -x + e_1 Ln|x| + c_2$ ۴) $y = x - c_1 Ln|c_1 + x| + c_2$

۳۵ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y'^2 = 0$ کدام است؟

۱) $Ln(x - e_1) + c_2$ ۲) $ae^{x} + b$ ۳) $\sin h(ax + b)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{ae^{x} + b}}$

۳۶ـ جواب معادله $\frac{1}{1+x^2} = xy' + (x^2+1)y'' + 2$ **با شرط** $y(0) = y'(0) = 0$ **کدام است؟**

۱) $y = x\tan^{-1}x$ ۲) $y = \tan^{-1}(x^2)$ ۳) $y = \frac{1}{2}\text{Arc}\tan^2 x$ ۴) $y = \text{Arc}\tan^2 x$

۳۷ـ جواب معادله $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ **کدام است؟**

۱) $x^2 = e^y + A$ ۲) $x^2 = 4e^y + A$ ۳) $e^y + 2x^2 = A$ ۴) $e^{2y} + 2x^2 = A$

۳۸ـ جواب معادله $2y^5 y'' - y' = 0$ **با شرط** $y(0) = y'(0) = 1$ **کدام است؟**

۱) $y = \frac{1}{1+x}$ ۲) $y = \frac{1}{1-x}$ ۳) $y = x^2 + x + 1$ ۴) $y = x^3 + x + 1$

۳۹ـ اگر $\varphi(x)$ **جواب معادله** $yy'' - y'^2 = -1$ **باشد به طوری که** $\varphi(0) = 1$ **و** $\varphi'(0) = 0$ **آنگاه جواب** $\varphi(x) = 0$ **کدام است؟**

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۴۰ـ اگر $y = \varphi(x)$ **جوابی از معادله** $y'' = 2y^3$ **باشد که** $\varphi'(0) = -1$ **و** $\varphi(0) = 1$ **آنگاه مقدار** $\varphi(3)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۴۱ـ معادله $3yy'' - 3y'^2 + 12y^2 = 0$ **دارای کدامیک از جوابهای زیر است؟**

۱) $y = e^{-x}$ ۲) $y = e^{-x^2+x}$ ۳) $y = e^{-x^2}$ ۴) $y = e^{-2x^2}$

۴۲ـ y_1 **و** y_2 **دو جواب از معادله** $(x^3+8x^2+7)y'' + (x^3+4x)y' + e^x y = 0$ **هستند به طوری که:**

$y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = -1$, $y_2(0) = 2$, $y_2'(0) = 3$

مقدار $w(y_1, y_2)(1)$ **برابر است با:**

۱) $\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$ ۲) $\sqrt[4]{7}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt[4]{7}}$ ۴) $\frac{\sqrt[4]{7}}{4}$

۴۳ـ y_1 **و** y_2 **دو جواب از معادله** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **با ضرایب پیوسته‌اند که** y_2 **فاقد ریشه است و** $w(y_1, y_2)(0) = 1$ **کدام گزینه در مورد** $\varphi(x) = \frac{y_1}{y_2}$ **درست است؟**

۱) صعودی اکید است. ۲) دارای اکسترمم است. ۳) نزولی اکید است. ۴) تابع ثابت است.

۴۴ـ اگر $w(\varphi_1, \varphi_2)(x) = x\cos x$ **آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟**

۱) φ_1 و φ_2 روی هر بازه شامل صفر وابسته‌اند.

۲) φ_1 و φ_2 می‌توانند روی $(0, \pi)$ مجموعه اساسی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ با ضرایب پیوسته باشند.

۳) φ_1 و φ_2 نمی‌توانند مجموعه اساسی جواب برای معادله ضرایب پیوسته $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ بر R باشند.

۴) هر سه گزینه ممکن است درست باشد.

۴۵ـ توابع φ_1 **و** φ_2 **که دارای مشتق مرتبه دوم هستند دو جواب از معادله** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **می‌باشند که** $w(1) = 5$ **و** $w(2) = -2$ **در اینصورت:**

۱) φ_1 و φ_2 وابسته‌اند. ۲) $p(x)$ یا $q(x)$ ناپیوسته‌اند. ۳) $w \equiv 0$ روی $(1,2)$ ۴) هر سه گزینه نادرست است.

۴۶ـ کدامیک از زوج توابع داده شده می‌توانند مجموعه اساسی جواب برای معادله زیر با ضرایب پیوسته بر R **باشند؟**

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

۱) $1+x^2$ و $-x^4$ ۲) x و $\sin x$ ۳) x و x^3 ۴) هیچکدام

۴۷ـ کدامیک از توابع داده شده روی R **می‌تواند جوابی از معادله با ضرایب پیوسته** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **باشد؟**

۱) $\cos x$ ۲) $x\sin x$ ۳) $\sin x^2$ ۴) هر سه مورد

۴۸ـ y_1 **و** y_2 **دو جواب مستقل خطی از معادله با ضرایب پیوسته** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ **روی** $I = (-1,1)$ **هستند. کدام گزینه درست است؟**

۱) اگر y_1 از مبدأ بگذرد، y_2 از مبدأ نمی‌گذرد. ۲) y_1 در مبدأ می‌تواند بر محور xها مماس شود.

۳) y_1 و y_2 در یک نقطهٔ مشترک می‌توانند اکسترمم شوند. ۴) هر سه گزینه درست هستند.

۴۹ـ چند مورد از گزاره‌های زیر الزاماً درست است؟

الف) اگر دو تابع $\varphi_1(x)$ **و** $\varphi_2(x)$ **بر بازه‌های** $(0,\infty]$ **و** $[0,-\infty)$ **وابسته باشند بر** R **نیز وابسته‌اند.**

ب) اگر $\varphi_1(x)$ **و** $\varphi_2(x)$ **دارای ریشه مشترک باشند، وابسته خطی‌اند.**

ج) اگر $\varphi_1(x)$ **و** $\varphi_2(x)$ **بر** R **مستقل باشند، بر هر زیر مجموعه** R **نیز مستقل هستند.**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۵۰ـ هر جواب دلخواه از کدامیک از معادلات زیر در $-\infty$ **صفر می‌شود؟**

۱) $(D^2-1)y = 0$ ۲) $(D^2+1)(D-1)^2 y = 0$

۳) $(D^2-D+4)^5 y = 0$ ۴) $(D^2-2D+7)^2(D+2)^3 y = 0$

۵۱ـ حدود q **برای آنکه جوابهای معادله** $y'' + 3y' + qy = 0$ **در** $+\infty$ **گران‌دار باشند، کدام است؟**

۱) $q > 0$ ۲) $q < 0$ ۳) $q \geq 0$ ۴) $q \leq 0$

۵۲ـ جواب خاص معادله دیفرانسیل غیرهمگن $(D^2+D+1)y = e^x$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}e^{-x}$ ۲) $\frac{1}{2}\sin x$ ۳) $\frac{1}{3}e^x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos x$

۵۳ـ جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + y = \sin x$ **عبارتست از:**

۱) $\frac{x^2}{8}\cos x$ ۲) $-\frac{x^2}{8}\sin x$

۳) $x\sin x$ ۴) $\frac{1}{8}(x^2\cos x + x^2\sin x)$

۵۴ـ جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin 2x$ **عبارتست از:**

۱) $\frac{1}{3}e^{-x}\sin 2x$ ۲) $-\frac{1}{3}e^{-x}\sin 2x$ ۳) $\frac{1}{3}e^{-x}\cos 2x$ ۴) $-\frac{1}{3}e^{-x}\cos 2x$

۵۵ـ جواب خصوصی معادله $y'' + 9y = e^x\cos 2x$ **در** $x = 0$ **برابر است با:**

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{26}$ ۳) $\frac{3}{11}$ ۴) $\frac{3}{26}$

۵۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $(D^2-9D+18)y = e^{e^{-3x}}$ **عبارتست از:**

۱) $y = c_1e^{3x} + (c_2 + \frac{1}{9}e^{e^{-3x}})e^{6x}$ ۲) $y = c_1e^{6x} + (c_2 + \frac{1}{9}e^{e^{-3x}})e^{3x}$

۳) $y = c_1e^{3x} + (c_2 + \frac{1}{6}e^{e^{-3x}})$ ۴) $y = c_1e^{6x} + (c_2 + \frac{1}{6}e^{e^{-3x}})e^{3x}$

۵۷ـ جواب مسأله مقدار اولیه $y'' + y = f(x)$ **و** $y(0) = y'(0) = 0$ **کدام است؟**

۱) $\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$ ۲) $\int_0^x \cos(x-t) f(t)\,dt$ ۳) $\int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$ ۴) $\int_0^x \sin^2(x-t) f(t)\,dt$

۵۸ـ در معادله دیفرانسیل $x^2y'' - xy' + y = 0$ داریم $y(1) = 0$ و $y'(0) = 1$ و $y(e)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $2e$ ۴) e

۵۹ـ اگر $y(t)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} + by = 0$ باشد به قسمتی که $y(1) = 0$ آنگاه کلیه مقادیری از ثابت حقیقی b که به ازای آنها جواب مذکور در زمانهای بعد گران‌دار (محدود) باقی می‌ماند، کدام است؟

۱) $0 < b < 1$ ۲) $b \geq 0$ ۳) $b > 0$ ۴) $b < 0$

۶۰ـ مقدار $m+n$ چقدر باشد تا معادله $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$ دارای جواب خصوصی $y_p = Ax^nLn^mx$ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۱ـ معادله $x^2y'' + 2xy' + 2y = \frac{1}{x^2}$ با تغییر متغیر $x = e^t$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

(در گزینه‌ها $y' = \frac{dy}{dt}$ و $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$)

۱) $y'' + y' + 2y = e^{2t}$ ۲) $y'' + y' + 2y = e^{-2t}$ ۳) $y'' + 3xy' + 2y = e^{-2t}$ ۴) $y'' + 2xy' + y = e^{-2t}$

۶۲ـ معادله $(3x+1)^2y'' + 2(3x+1)y' + y = 0$ با کدامیک از تغییر متغیرهای زیر به معادله ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) $x = e^t$ ۲) $x = \frac{e^t - 1}{3}$ ۳) $x = \frac{e^t + 1}{3}$ ۴) $x = 3e^t + 1$

۶۳ـ معادله $(2x+1)^2y'' - y = 16x + 4$ با $2x+1 = e^t$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

(در گزینه‌ها $y' = \frac{dy}{dt}$ و $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$)

۱) $y'' - y' - 3y = 4(2e^t - 1)$ ۲) $y'' - \frac{3}{4}y = e^t - 1$

۳) $y'' - y' - \frac{3}{4}y = 2e^t - 1$ ۴) $y'' - y' - 3y = e^t - 1$

۶۴ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر عبارت است از:

$((3x+2)^2D^2 + 3(3x+2)D - 36)y = 3x^2 + 4x + 1$

۱) $\frac{1}{108}((3x+2)^2\text{Ln}(3x+2) + 1)$ ۲) $\frac{1}{27}((3x+2)^2\text{Ln}(3x+2) + 1)$

۳) $\frac{1}{108}((3x+2)\text{Ln}(3x+2) + 1)$ ۴) $\frac{1}{27}((3x+2)\text{Ln}(3x+2) + 1)$

۶۵ـ معادله $x^2y'' - 3xy' + 4y = 4\,\text{Ln}x$ دارای کدامیک از جوابهای زیر است؟

۱) $y = x^2(c_1 + c_2\text{Ln}x) + \text{Ln}x$ ۲) $y = x(c_1 + c_2\text{Ln}x) + \text{Ln}^2x - 1$

۳) $y = x^2(c_1 + c_2\text{Ln}x) + \text{Ln}x + 1$ ۴) $y = x^2(c_1 + c_2\text{Ln}x) + \text{Ln}^2x$

۶۶ـ جواب عمومی معادله $x^2y'' - xy' + y = x$ برای $x > 0$ کدام است؟

۱) $y = x(c_1 + c_2\text{Ln}x + \text{Ln}^2x)$ ۲) $y = c_1x + c_2x^{-1} + x\text{Ln}^2x$

۳) $y = x(c_1 + c_2\text{Ln}x + 2\text{Ln}^2x)$ ۴) $y = x(c_1 + c_2\text{Ln}x + \frac{1}{2}\text{Ln}^2x)$

۶۷ـ جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x$ ۲) $\frac{x}{4}e^{-x}\sin 2x$ ۳) $\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$ ۴) $-\frac{x}{4}e^{-x}\cos 2x$

۶۸ـ کدامیک از زوج توابع داده شده بر R مستقل خطی‌اند؟

۱) e^x و $\sin x$ ۲) x و $x|x|$ ۳) x^2 و $x^2|x|$ ۴) هر سه مورد

۶۹ـ کدامیک از گزینه‌ها جواب معادله $y'' - 4y = 3e^x + 4$ است؟

۱) $y = 2e^{-2x} - e^x - 1$ ۲) $y = 3e^{2x} + e^x + 1$ ۳) $y = 3e^{-2x} - 2e^x + 1$ ۴) $y = 3e^{2x} + e^x - 1$

۷۰ـ جواب عمومی معادله همگن نظیر معادله $(D^2 + 5D + 6)y = xe^x$ برابر است با:

۱) $y = ce^{2x} + c_2e^{-3x}$ ۲) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ ۳) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$ ۴) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$

۷۱ـ شکل جواب خصوصی معادله $y''' - 3y'' + 2y' = 1 + 4e^x$ عبارتست از:

۱) $y = a + be^x$ ۲) $y = ax + bxe^x$ ۳) $y = ax + bx^2e^x$ ۴) $y = ax^2 + bxe^x$

۷۲ـ معادله دیفرانسیل حاصل از حذف پارامترها در $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}$ کدام است؟

۱) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ ۲) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$

۳) $y''' + 4y'' + 5y' - 10y = 0$ ۴) $y''' - 4y'' + 4y' - y = 0$

۷۳ـ در حل معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 2y = 3xe^{-x}$ همراه با دو شرط $y(0) = 4$ و $y'(0) = 2$ چنانچه مقدار $x = \pi$ باشد، آنگاه مقدار y برابر است با:

۱) $(3\pi - 3)e^{-\pi}$ ۲) $(3\pi + 3)e^{-\pi}$ ۳) $(3\pi - 4)e^{-\pi}$ ۴) $(3\pi + 4)e^{-\pi}$

۷۴ـ معادله $(2x+1)^2y'' + (4x+2)y' + 4y = 0$ با کدام تغییر متغیر به معادله ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) $x = \frac{e^t + 1}{2}$ ۲) $x = \frac{e^t - 1}{2}$ ۳) $x = e^t$ ۴) $x = 2e^t + 1$

۷۵ـ معادله $y'' + (\tan x)y' - (\cos^2 x)y = \sin x^2$ با کدام تغییر متغیر به معادله ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) $t = \tan x$ ۲) $t = e^x$ ۳) $t = \cos x$ ۴) $t = \sin x$

۷۶ـ اگر $y_1 = x$ یکی از جوابهای معادله $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$ برای $x > 0$ باشد، جواب دوم کدام است؟

۱) $\frac{1}{x^2}$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{1}{x^3}$ ۴) x^2

۷۷ـ جواب خصوصی معادله $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$ عبارت است از:

۱) $\sin x - \cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

۷۸ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 16y = 4\sin 2x + 2\cos 2x$ با شرایط اولیه $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ و $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ برابر است با:

۱) -1 ۲) ۱ ۳) π ۴) ۲

۷۹ـ $\varphi(x)$ جواب دلخواهی از معادله $(D^2 + 2D + 2)^2(D+3)^2y = 0$ است. کدام گزینه در مورد $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ درست است؟

۱) صفر است. ۲) موجود نمی‌باشد.

۳) ∞ است. ۴) به ضابطه $\varphi(x)$ وابسته است.

۸۰ـ جواب عمومی معادله $y'' + y' = e^{-x}$ عبارتست از:

۱) $y = xe^{-x} + c_1e^{-x} + c_2$
۲) $y = -(x+1)e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2$
۳) $y = xe^{-x} + c_1e^{x} + c_2$
۴) $y = (x+1)e^{-x} + c_1e^{-x} + c_2$

۸۱ـ اگر $y = \varphi(x)$ جواب معادله $xy'' + y' = y'^2$ تحت شرایط $y(1) = -1$ و $y'(1) = 1$ باشد مقدار $\varphi(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲ـ جواب عمومی معادله $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$ کدام است؟

۱) $y_1 = c_1x + c_2x^2 + \frac{3}{2}x\,Ln\,x$
۲) $y_1 = x(c_1 + c_2Ln\,x) + x^2Ln\,x$
۳) $y_1 = c_1x + c_2x^2 + 3x^2Ln\,x$
۴) $y_1 = c_1x + c_2x^2 + x^2Ln\,x$

۸۳ـ جواب معادله $4y^2 = 4y'^2 - 3y''y$ برابر است با:

۱) $y = \sec^2 x$ ۲) $y = \sec x$ ۳) $y = \tan^2 x$ ۴) $y = \sin^2 x$

۸۴ـ جواب خصوصی معادله $y'' + 2y' + y = xe^x$ عبارتست از:

۱) $y = x(ax+b)e^x$ ۲) $y = (ax+b)e^x$ ۳) $y = x^2(ax+b)e^x$ ۴) $y = ae^x$

۸۵ـ جواب معادله $2y'^2 - 2y''y = 0$ برابر است با:

۱) $y = \frac{1}{(cx+d)^2}$ ۲) $y = x + \frac{c}{x+d}$ ۳) $y = (cx+d)^2$ ۴) $y = \frac{1}{cx+d}$

۸۶ـ با توجه به روش حذف ضریب مشتق، کدامیک از توابع زیر در معادله $xy'' + 2y' - xy = 0$ صدق می‌کند؟

۱) $y = xe^x$ ۲) $y = \frac{e^{2x}}{x}$ ۳) $y = \frac{e^{-x}}{x}$ ۴) $y = \frac{\sin x}{x}$

۸۷ـ معادله $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ با تغییر متغیر $t = e^x$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

(در گزینه‌ها $y' = \frac{dy}{dt}$ و $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$)

۱) $t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$ ۲) $t^2y'' + 5ty' + 5y = 0$ ۳) $t^2y'' + 5ty' + 5y = 0$ ۴) $t^2y'' + 4ty' + 6y = 0$

۸۸ـ اگر $y_1 = \frac{1}{x}$ جواب معادله $xy'' + (2+x)y' + y = 0$ باشد، جواب دوّم عبارت است از:

۱) $(1+x)e^{-x}$ ۲) $\frac{e^{-x}}{x}$ ۳) $\frac{e^{-x}}{x^2}$ ۴) $\frac{e^x}{x}$

۸۹ـ اگر $\varphi(x)$ جواب معادله $yy'' + y - y'^2 = 0$ باشد به طوری که $\varphi'(0) = -2$ و $\varphi(0) = 2$. آنگاه جواب $\varphi(x) = 0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

۹۰ـ جواب خصوصی معادله $x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2\,Ln^2\,x}$ عبارت است از:

۱) $y_P = -\frac{Ln(Ln\,x)}{x^2}$
۲) $y_P = \frac{Ln(Ln\,x)}{x^2}$
۳) $y_P = -\frac{Ln(Ln^2x)}{x^2}$
۴) $y_P = \frac{-Ln(Ln^2x)+1}{x^2}$

مدرسان شریف

فصل سوم

« سریها »

مفاهیم مقدماتی

تعریف. اگر $\{a_n\}_{n\in IN}$ دنباله دلخواهی در مجموعه اعداد حقیقی باشد، سری با نمایش $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$، یک سری توانی حول نقطه $x = x_0$ نامیده می‌شود.

می‌توان بررسی کرد، عدد حقیقی نامنفی R موجود است، که سری مذکور به ازاء xهایی با شرط $|x - x_0| < R$ همگرا و برای xهایی با شرط $|x - x_0| > R$ واگرا می‌باشد. عدد R که شعاع همگرایی نامیده می‌شود معمولاً به کمک آزمون زیر که به آزمون دالامبر معروف است محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .$$

قضیه. (بسط تیلور) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$، از هر مرتبه دلخواه مشتقپذیر باشد، آنگاه در یک همسایگی نقطه مذکور، می‌توان تابع مفروض $f(x)$ را بصورت یک سری توانی با نمایش زیر بسط داد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

که در آن فاصله اعتبار تساوی، همان فاصله همگرایی سری توانی سمت راست تساوی است.

لازم بذکر است، بسط تیلور حول نقطه $x_0 = 0$، بسط مک لورن نامیده می‌شود.

تعریف. تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x_0$ تحلیلی می‌نامیم، اگر در این نقطه دارای نمایش بسط تیلور با شعاع غیر صفر باشد. همچنین می‌توان نشان داد که اگر تابع $f(x)$ در هر نقطه $|x - x_0| < R$ دارای بسط تیلور باشد، آنگاه تابع مفروض در این فاصله تحلیلی است.

در نظریه معادلات دیفرانسیل شرایطی وجود دارند که به ازاء آنها، جواب یک معادله دیفرانسیل حول نقطه مفروض $x = x_0$ یک تابع تحلیلی است. در اینصورت می‌توان با توجه به مفاهیم فوق، با فرض تابع جواب بصورت سری توانی $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ حول نقطه $x = x_0$ و جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض و محاسبه ضرائب a_n، جواب معادله دیفرانسیل مفروض را بدست آورد.

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $y' - y = 0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل مفروض، تحلیلی و دارای بسط سری توانی بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حول نقطه صفر باشد. در اینصورت؛

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله } y'-y=0} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_n] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$(n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n \quad ; n \geq 0 \Rightarrow$$

$$a_0 = a_0: \quad a_1 = \frac{1}{1} a_0 = a_0; \quad a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2!} a_0; \quad a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3!} a_0 \ \& \ \cdots \ a_n = \frac{1}{n!} a_0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در } y=\sum a_n x^n} y = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} a_0) x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

با توجه به بسط مک لورن $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت $y = a_0 e^x$ در می‌آید، که دقیقاً همان جوابی است که با استفاده از روشهای مربوط به حل معادلات مرتبه اول جدا شونده و یا معادلات با ضرائب ثابت می‌توان بدست می‌آورد.

تذکر. اگر در یک معادله دیفرانسیل جواب عمومی $y = y(x)$ حول $x = x_0$ تحلیلی با نمایش $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ باشد، در اینصورت با توجه به قضیه بسط تیلور، می‌توان به ازاء $n \geq 0$ ضرائب a_n را از تساوی $a_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ و با توجه به ضابطه معادله مفروض بدست آورد. بعنوان مثال؛

$$a_0 = y(0) \ ; \ a_1 = y'(0) \ ; \ a_2 = \frac{y''(0)}{2!} \cdots$$

مثال ۱. چند جمله از سری تیلور تابع جواب معادله $y(0) = 1, y'(0) = 2$; $yy'' + xy' + e^x y = x^2 + y$ حول $x = 0$ چیست؟

۱) $1 + 2x - x^2 - 7x^3 + \cdots$
۲) $1 + 2x + x^2 + 7x^3 + \cdots$
۳) $1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \cdots$
۴) $1 + 2x - \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

☑ **حل.** گزینه «۴». همانگونه که ملاحظه می‌کنیم، در تمامی گزینه‌ها عبارت $1 + 2x$ ـ که در واقع جمله اول و دوم بسط تیلور تابع $y(x)$ است ـ حضور دارد. در اینصورت، برای تعیین گزاره صحیح کافیست ضریب x^2 را از ضابطه $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ بدست آوریم:

$$yy'' + xy' + e^x y = x^2 + y \xrightarrow{x=0} y(0)y''(0) + (0)y'(0) + e^0 y(0) = 0 + y(0) \Rightarrow y(0)y''(0) + y(0) = y(0)$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} y(0)y''(0) + y(0) = y(0) \Rightarrow y''(0) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 0$$

در نتیجه، گزینه صحیح باید فاقد جمله سوم یعنی $a_2 x^2$ باشد.

مثال ۲. هرگاه $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی بصورت سری توانی برای مسأله $y(0) = 12 \ \& \ y'(0) = 0$; $y'' - 2xy' + 8y = 0$ باشد آنگاه مقدار ضریب a_2 عبارتست از:

۱) $0/1$
۲) -48
۳) -24
۴) 72

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به بسط مک لورن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ضریب a_2 از ضابطهٔ $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' - 2xy' + 8y = 0 \xrightarrow{x=0} y''(0) - 2 \times 0 \times y'(0) + 8y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) + 8y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=12} y''(0) + 8 \times 12 = 0 \Rightarrow y''(0) = -96 \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{-96}{2} = -48$$

مثال ۳. هرگاه $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جوابی به صورت سری توانی برای $y'' + xy = 0$ با $y(0) = 1$ ، $y'(0) = 1$ باشد، آنگاه ضریب a_3 برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{6}$
۳) -1
۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به بسط مک لورن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$، ضریب a_3 از ضابطه $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' + xy = 0 \ ; (I) \xrightarrow{x=0} y''(0) + (0)y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' + xy' + y = 0 \xrightarrow{x=0} y'''(0) + (0)y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) + y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} y'''(0) + 1 = 0 \Rightarrow y'''(0) = -1 \Rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{6} = \frac{-1}{6}$$

مثال ۴. در مسأله مقدار اولیه $y'' + yLnx = 0$ و $y(1) = 1$ و $y'(1) = -1$، ضریب $(x-1)^4$ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{4}$
۲) 3
۳) $\frac{1}{8}$
۴) -3

☑ **حل.** گزینه «۳». با توجه به بسط تیلور $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$ حول نقطه $x_0 = 1$، ضریب $(x-1)^4$ از ضابطه $a_4 = \frac{y^{(4)}(1)}{4!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' + yLnx = 0 \ ; (I) \xrightarrow{x=1} y''(1) + y(1)Ln1 = 0 \xrightarrow{Ln1=0} y''(1) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' + y'Lnx + y \times \frac{1}{x} = 0 \ ; (II) \xrightarrow{x=1} y'''(1) + y'(1)Ln1 + y(1) \times 1 = 0 \Rightarrow y'''(1) + y(1) = 0$$

$$\xrightarrow{y(1)=1} y'''(1) = -1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y^{(4)} + y''Lnx + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0 \xrightarrow{x=1} y^{(4)}(1) + y''(1)Ln1 + 2\frac{y'(1)}{1} - \frac{y(1)}{1} = 0 \Rightarrow y^{(4)}(1) + 2y'(1) - y(1) = 0$$

$$\xrightarrow{y(1)=1 \ \& \ y'(1)=-1} y^{(4)}(1) + 2(-1) - (1) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(1) = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{y^{(4)}(1)}{4!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

مثال۵. *در مسأله مقدار اولیه زیر، ضریب $(x+1)^3$ کدام است؟*

$$y'' + y' + yLn(x+2) = 0 \quad ; \quad y(-1) = 2 \ , \ y'(-1) = 0$$

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **حل.** گزینه «۱». با توجه به بسط تیلور $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n$ حول نقطه $x_0 = -1$، ضریب $(x+1)^3$، از ضابطه $a_3 = \frac{y^{(3)}(-1)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' + y' + yLn(x+2) = 0 \quad ; (I) \xrightarrow{x=-1} y''(-1) + y'(-1) + y(-1)Ln1 = 0$$

$$\xrightarrow{y'(1)=0 \ \& \ Ln1=0} y''(-1) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' + y'' + y'Ln(x+2) + y\frac{1}{x+2} \xrightarrow{x=-1} y'''(-1) + y''(-1) + y'(-1)Ln1 + y(-1)\frac{1}{1} = 0$$

$$\xrightarrow{y''(-1)=y'(-1)=0 \ \& \ y(-1)=2} y'''(-1) + 0 + 0 + 2 = 0 \Rightarrow y'''(-1) = -2 \Rightarrow a_3 = \frac{y'''(-1)}{3!} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

روش سریها که عمدتاً برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب متغیر، با نمایش عمومی $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ بکار برده می‌شود، بر تعاریف و قضایای زیر پایه‌گذاری می‌شود.

I . حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن حول نقاط عادی

تعریف I. فرض کنید توابع $a_0(x)$، $a_1(x)$ و $a_2(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ تحلیلی هستند. در اینصورت x_0 را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ می‌نامند، هرگاه $a_2(x_0) \neq 0$ باشد. به عبارت دیگر $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ در نقطه $x = x_0$ توابعی تحلیلی باشند.

قضیه زیر، راهگشای ما در بررسی این حالت می‌باشد.

قضیه I. معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ را در نظر بگیرید. اگر توابع $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ در نقطه $x = x_0$، تحلیلی و بسطهای سری توانی آنها در فاصله $|x - x_0| < L$ معتبر باشند، آنگاه هر جواب معادله دیفرانسیل مفروض در نقطه $x = x_0$ تابعی تحلیلی بوده و بصورت یکسری توانی برحسب توانهای $x - x_0$ قابل محاسبه است. و هم‌چنین شعاع همگرایی هر سری جواب، حداقل برابر L خواهد بود. در واقع می‌توان گفت، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرائب متغیر، حول یک نقطه عادی، دارای نمایش $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ است، که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض، به صورت دو دسته مستقل از جملات سری جواب عمومی محاسبه می‌گردند.

بعنوان مثال. با استفاده از روش سریهای توانی جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ را تعیین کنید.

حل. توابع ثابت $a_2(x) = a_0(x) = 1$ و $a_1(x) = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی تحلیلی هستند و با توجه به اینکه $a_2(0) = 1$ است، در نتیجه $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است. در اینصورت با توجه به قضیه I. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان بصورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حول نقطه $x_0 = 0$ در نظر گرفت:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \& \ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل } y''+y=0} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n \mapsto n+2 \text{ در سری اول}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با بیرون کشیدن جملات به ازاء } n=-2 \text{ ، } n=-1 \text{ از سری اول}} [0 + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0$$

$$\xrightarrow{(\sum a_n x^n = 0 \ ; \forall x) \Rightarrow a_n = 0 \ ; \forall n} (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \quad ; \forall n \Rightarrow$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n \quad ; n \geq 0 \qquad \text{(فرمول بازگشتی متناظر)}$$

با توجه به ضابطه فرمول بازگشتی هر دو جمله از سری جواب عمومی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، که اختلاف اندیس آنها ۲ واحد باشد برحسب یکدیگر محاسبه شده‌اند. در اینصورت ضرائب سری جواب عمومی را می‌توان در پیمانه۲ دسته بندی کرد:

i) دسته ضرائب a_n از سری جواب عمومی که در آن $n \overset{2}{\equiv} 0$ است. این دسته در واقع همان ضرائب جملات ردیف زوج سری جواب عمومی می‌باشد. با توجه به فرمول بازگشتی و با مفروض قراردادن a_0، ضرائب بعدی متعلق به این دسته بر حسب a_0 اینگونه بدست می‌آیند:

$$a_0 = a_0$$

$$n = 0; \quad a_2 = a_{2\times1} = \frac{-1}{2\times1}a_0 = \frac{(-1)^1}{2!}a_0$$

$$n = 2; \quad a_4 = a_{2\times2} = \frac{-1}{4\times3}a_2 = \frac{(-1)^2}{4!}a_0$$

$$n = 3; \quad a_6 = a_{2\times3} = \frac{-1}{6\times5}a_4 = \frac{(-1)^3}{6!}a_0$$

$$\Rightarrow$$

$$k = 0; \quad a_{2\times0} = \frac{(-1)^0}{(2\times0)!}a_0$$

$$k = 1; \quad a_{2\times1} = \frac{(-1)^1}{(2\times1)!}a_0$$

$$k = 2; \quad a_{2\times2} = \frac{(-1)^2}{(2\times2)!}a_0$$

$$k = 3; \quad a_{2\times3} = \frac{(-1)^3}{(2\times3)!}a_0$$

$$k = k; \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0 \quad ; k \geq 0$$

در نتیجه، جملات ردیف زوج سری جواب عمومی بصورت سری توانی $\bar{y}_1(x) = a_0 y_1(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ محاسبه می‌گردد.

ii) دسته ضرائب a_n از سری جواب عمومی که در آن $n \stackrel{2}{\equiv} 1$ است. که در واقع همان ضرائب جملات فرد سری جواب عمومی می‌باشد.

با توجه به فرمول بازگشتی و با مفروض قراردادن a_1، ضرائب بعدی متعلق به این دسته بر حسب a_1 اینگونه بدست می‌آیند:

$a_1 = a_1$ $\qquad k=0;\quad a_{2\times 0+1} = \frac{(-1)^0}{1!} a_1$

$n=1;\quad a_3 = a_{2\times 1+1} = \frac{-1}{3\times 2} a_1 = \frac{(-1)^1}{3!} a_1 \qquad k=1;\quad a_{2\times 1+1} = \frac{(-1)^1}{(2\times 1+1)!} a_1$

$n=3;\quad a_5 = a_{2\times 2+1} = \frac{-1}{5\times 4} a_3 = \frac{(-1)^2}{5!} a_1 \quad \Rightarrow \quad k=2;\quad a_{2\times 2+1} = \frac{(-1)^2}{(2\times 2+1)!} a_1$

$n=5;\quad a_7 = a_{2\times 3+1} = \frac{-1}{7\times 6} a_5 = \frac{(-1)^3}{7!} a_1 \qquad k=3;\quad a_{2\times 3+1} = \frac{(-1)^3}{(2\times 3+1)!} a_1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k=k;\quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1 \;;k \geq 0$

در نتیجه، جملات ردیف فرد سری جواب عمومی بصورت سری توانی $\bar{y}_2(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_1 y_2(x)$ محاسبه می‌گردند.

در اینصورت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$، با جمع بستن دو سری جواب مستقل $\bar{y}_1(x)$ و $\bar{y}_2(x)$ بدست می‌آید:

$$y(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

که با توجه به بسط مک لورن توابع $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ و $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$، می‌توان جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ را بصورت $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ نوشت، که دقیقاً همان صورت از جواب است که با استفاده از روش مربوط به حل معادلات خطی همگن مرتبه دوم با ضرائب ثابت تعیین می‌شود.

تذکر. برای محاسبه شعاع همگرایی سری جواب عمومی معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد:

روش اول ـ همانگونه که در قضیه I. اشاره شد، اگر $x = x_0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ باشد، آنگاه توابع $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ حول نقطه $x = x_0$ توابعی تحلیلی می‌گردند. در اینصورت اگر R_P و R_Q شعاعهای همگرایی سریهای توانی متناظر توابع فوق باشند، هر سری جواب معادله دیفرانسیل مفروض در فاصله $|x - x_0| < R$ معتبر است، که $R \geq \min\{R_P, R_Q\}$ می‌باشد. و مقدار $\min\{R_P, R_Q\}$ کران پایین شعاع همگرایی جواب نامیده می‌شود.

می‌توان بررسی کرد، شعاع‌های همگرایی R_P و R_Q حول نقطه $x = x_0$، برابر با فاصله نقطه مذکور از نزدیکترین نقطه غیر تحلیلی مجاور آن در توابع $P(x)$ و $Q(x)$ بدست می‌آیند.

بعنوان مثال، در مسأله فوق، با توجه به اینکه شعاع همگرایی هر دو سری توانی $P(x) = 0$ و $Q(x) = 1$ برابر ∞ است، در نتیجه شعاع همگرایی سری جواب عمومی نیز برابر $R = \infty$ بدست می‌آید.

روش دوم ـ از طرف دیگر، از آنجائیکه در حل معادله دیفرانسیل مفروض با استفاده از روش سریها، فرمول بازگشتی متناظر، در واقع بیانگر رابطه میان جملات متوالی سریهای توانی مستقلی است که در تعیین جواب عمومی نقش دارند، بنابراین شعاع همگرایی سری جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض، را می‌توان به کمک آزمون دالامبر و با توجه به فرمول بازگشتی متناظر آن بدست آورد.

بعنوان مثال در همان مسئله قبل؛

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n \xrightarrow{\text{فرمول بازگشتی متناظر}}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \infty \quad \text{(شعاع همگرایی)} \xleftarrow{\text{با توجه به آزمون دالامبر}}$$

مثال ۶. اگر حل سری معادله $(2+x^2)y'' + y' + y = 0$ حول نقطه $x = 1$ محاسبه شود، شعاع همگرایی سری حاصل کدامیک از مقادیر زیر خواهد بود؟

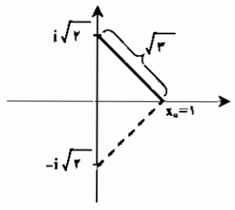
۱) ∞ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۱

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$(2+x^2)y'' + y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{1}{2+x^2} y' + \frac{1}{2+x^2} y = 0$$

حل اول. همانگونه که می‌دانیم شعاع اعتبار هر سری جواب، حداقل برابر می‌نیمم شعاع همگرایی توابع $P(x) = Q(x) = \frac{1}{2+x^2}$ است.

در اینصورت با توجه به اینکه، سری توانی جواب حول نقطه $x_0 = 1$ مدنظر است، در نتیجه برای محاسبهٔ شعاع همگرایی $R_P = R_Q$ کافیست، فاصله ریشه‌های مخرج $2 + x^2 = 0$، که در واقع نقاط غیر تحلیلی توابع $P(x)$ و $Q(x)$ محسوب می‌شوند، از $x_0 = 1$ محاسبه گردد.



و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $2 + x^2 = 0$ برابر $\pm\sqrt{2}\,i$ می باشد، فاصله این ریشه‌ها تا نقطه $x_0 = 1$ برابر $R_P = R_Q = \sqrt{3}$ است. در نتیجه شعاع همگرایی سری جواب عمومی نیز حداقل برابر $\min\{R_P, R_Q\} = \sqrt{3}$ خواهد بود.

حل دوم. $a_2(1) = 2 \neq 0$ در نتیجه $x_0 = 1$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است، بنابراین دارای جوابی به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ خواهد بود. در این صورت رابطه بازگشتی متناظر معادله دیفرانسیل مفروض بصورت زیر خواهد بود:

$$\left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} 2y'' + x^2 y'' + y' + y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n (x-1)^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n (x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با ادامه محاسبات و دسته‌بندی بر حسب توانهای } (x-1)^n} \sum_{n=0}^{\infty} [n^2 a_n + (2n+1)(n+1)a_{n+1} + 3(n+1)(n+2)a_{n+2}](x-1)^n = 0$$

$$\xrightarrow{\left(\sum a_n (x-1)^n = 0 \;;\forall x \Rightarrow a_n = 0 \;;\forall n\right)} n^2 a_n + (2n+1)(n+1)a_{n+1} + 3(n+1)(n+2)a_{n+2} = 0 \;;\forall n \geq 0$$

$$\xrightarrow[n^{2}a_{n+1}]{\frac{1}{\cdots\times(\text{طرفین تساوی})}} \frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{(2n+1)(n+1)}{n^{2}}+\frac{3(n+1)(n+2)}{n^{2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=0 \quad ;\ n\geq 0$$

$$\xrightarrow[\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{A}]{\text{با فرض}} A+2+\frac{3}{A}=0 \Rightarrow A^{2}+2A+3=0 \Rightarrow A=-1\pm\sqrt{2}i \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{1}{A}\right| \Rightarrow R=|A|=\sqrt{(-1)^{2}+(\sqrt{2})^{2}}=\sqrt{3}$$

مثال ۷. *کدامیک از بسط های توانی زیر، یکی از حل‌های معادله دیفرانسیل $y''+x^{3}y=0$ می باشد؟*

۱) $y(x)=1-\frac{x^{6}}{3\circ}+\frac{x^{13}}{1360}-\cdots$

۲) $y(x)=1-\frac{x^{5}}{3\circ}+\frac{x^{12}}{3960}-\cdots$

۳) $y(x)=1-\frac{x^{4}}{3\circ}+\frac{x^{10}}{3960}-\cdots$

۴) $y(x)=1-\frac{x^{6}}{3\circ}+\frac{x^{12}}{3960}-\cdots$

☑ **حل.** گزینه «۴». با توجه به اینکه $a_2(0)=0$ است، بنابراین نقطهٔ $x_0=0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است:

$$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n} \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \ \&\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل } y''+x^{3}y=0} \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+6 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-6}^{\infty}(n+6)(n+5)a_{n+6}x^{n+4}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=0 \Rightarrow$$

$$[0+0+2a_2+6a_3x+12a_4x^{2}+20a_5x^{3}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)(n+5)a_{n+6}x^{n+4}]+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=0 \Rightarrow$$

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^{2}+20a_5x^{3}+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+6)(n+5)a_{n+6}+a_n]x^{n+3}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0=a_0 \\ a_1=a_1 \end{cases} \Rightarrow \text{می‌توانند مخالف صفر فرض شوند.} \quad a_0 \text{ و } a_1$$

$$\begin{cases} a_2=a_3=a_4=a_5=0 \\ (n+6)(n+5)a_{n+6}+a_n=0 \quad ;\ n\geq 0 \Rightarrow a_{n+6}=-\frac{1}{(n+6)(n+5)}a_n \quad ;n\geq 0 \end{cases}$$

با توجه به رابطه بازگشتی متناظر هر دو جمله از سری جواب عمومی که اختلاف اندیس آنها ۶ واحد باشد برحسب یکدیگر محاسبه شده‌اند.

بنابراین یکی از جوابهای معادله دیفرانسیل مفروض می‌تواند، جملاتی از سری جواب عمومی باشد که برحسب a_0 محاسبه می‌شوند:

$$a_0=a_0$$

$$n=0; \quad a_6=-\frac{1}{6\times 5}a_0=-\frac{1}{30}a_0$$

$$n=6; \quad a_{12}=-\frac{1}{12\times 11}a_6=\frac{1}{12\times 11\times 30}a_0=\frac{1}{3960}a_0 \quad \&\ \cdots$$

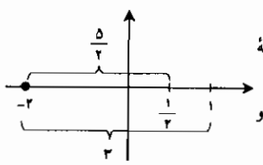
در نتیجه، با فرض $a_0=1$ یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض می‌تواند بصورت سری توانی $y(x)=1-\frac{1}{30}x^{6}+\frac{1}{3960}x^{12}-\cdots$ محاسبه شود.

مثال ۸. *جواب معادله $(2x^{2}-3x+1)y''-x^{2}y'-y=0$ به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^{n}$ در نظر گرفته می‌شود.*

حداقل شعاع همگرایی جواب چقدر است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۳

☑ **حل.** گزینه «۱». می‌دانیم، شعاع همگرایی سری جواب عمومی، حداقل برابر R_P و R_Q است. برای محاسبه R_P و R_Q با توجه به ضابطه‌های $P(x)=-\frac{x^{2}}{2x^{2}-3x+1}$ و $Q(x)=-\frac{1}{2x^{2}-3x+1}$ و اینکه سری جواب حول نقطه $x_0=-2$ مدنظر است، کافیست می‌نیمم ریشه‌های مخرج توابع $P(x)$ و $Q(x)$، که در واقع نقاط غیرتحلیلی توابع $P(x)$ و $Q(x)$ محسوب می‌شوند، از نقطهٔ $x_0=-2$ را بدست آوریم.



در اینصورت، از آنجائیکه فاصله $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=1$، ریشه‌های معادله $2x^{2}-3x+1=0$ از نقطهٔ $x_0=-2$ به ترتیب برابر $r_1=\frac{5}{2}$ و $r_2=3$ می‌باشد، در نتیجه $R_P=R_Q=\min\{r_1,r_2\}=\frac{5}{2}$ و از آنجا شعاع همگرایی سری جواب نیز حداقل برابر $\min\{R_P,R_Q\}=\frac{5}{2}$ خواهد بود.

مثال ۹. *رابطه بازگشتی برای محاسبه a_n، هرگاه $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}$ جواب معادله $y''+xy'+y=0$ باشد، کدام است؟*

۱) $a_{n+2}=-\frac{1}{2(n+2)}a_n$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{1}{4(n+2)}a_n$

۳) $a_{n+2}=-\frac{1}{2(n+1)}a_n$ ۴) $a_{n+2}=-\frac{1}{4(n+1)}a_n$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n} \Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \ \&\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} 4y''+xy'+y=\sum_{n=0}^{\infty}4n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+2 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-2}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0 \Rightarrow$$

$$[0+0+\sum_{n=0}^{\infty}4(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n}]+\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n}=0 \Rightarrow$$

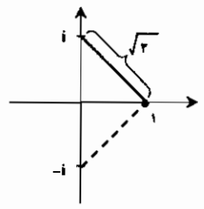
$$\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n]x^{n}=0 \Rightarrow 4(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0 \quad ;n\geq 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+2}=-\frac{1}{4(n+2)}a_n \quad ;n\geq 0 \qquad \text{(فرمول بازگشتی متناظر)}$$

مثال ۱۰. ***جواب مسأله مقدار اولیه*** $y'' + y = 0$ ***و*** $y(x^2+1) = 2$ ***و*** $y'(x^2+1) = 2$ ***حداقل بر کدام یک از بازه های زیر معتبر است؟***

۱) $(-1,1)$ ۲) $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ ۳) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ۴) $(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به شرایط اولیه داده شده، سری جواب عمومی حول نقطه $x_0 = 1$ مدنظر است. در اینصورت حداقل R_P، R_Q همان نیم فاصله ریشه‌های مخرج توابع $P(x)$ و $Q(x)$ از نقطه $x_0 = 1$ می‌باشد:



i) با توجه به ضابطه تحلیلی $P(x) = 0$ داریم؛ $R_P = \infty$.

ii) برای محاسبه R_Q، کافیست نیم فاصله ریشه‌های مخرج $Q(x) = \frac{1}{x^2+1}$ از نقطه $x_0 = 1$ محاسبه گردد. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ برابر $\pm i$ و فاصله این نقاط از $x_0 = 1$، برابر $\sqrt{2}$ است، داریم؛ $R_Q = \sqrt{2}$.

در نتیجه شعاع همگرایی سری جواب عمومی حداقل برابر $R = \min\{R_P, R_Q\} = \min\{\infty, \sqrt{2}\} = \sqrt{2}$ بدست می‌آید. برای محاسبه بازه اعتبار سری جواب عمومی، با توجه به اینکه سری جواب عمومی طول $x_0 = 1$ مدنظر است و شعاع همگرایی سری مذکور نیز حداقل برابر $\sqrt{2}$ است، کافیست نامعادله $|x-1| < \sqrt{2}$ را حل کنیم:

$$|x-1| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow -\sqrt{2} < x-1 < \sqrt{2} \quad \Rightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$

مثال ۱۱. ***اگر*** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ***جواب معادله*** $y'' + xy' - 4y = 0$ ***باشد،*** $y(x^2+1) = 0$ ***رابطه بازگشتی متناظر عبارتست از:***

۱) $a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+1}a_n$ ۲) $a_{n+2} = -\frac{n+1}{n-2}a_n$ ۳) $a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n$ ۴) $a_{n+2} = -\frac{n+2}{n-1}a_n$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض

$$\Rightarrow (x^2+1)y'' + xy' - 4y = x^2y'' + y'' + xy' - 4y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_2 x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

با تبدیل $n \to n+2$ در سری دوم و جمع بستن سایر سریها

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n^2-4)a_n x^n + \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2-4)a_n x^n + [0+0+\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} [(n^2-4)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n = 0 \Rightarrow$$

$$(n^2-4)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad ; n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+1}a_n \quad ; n \geq 0$$

مثال ۱۲. ***حداقل شعاع اعتبار جواب معادله*** $y'' + (tag^{-1}x)y = 0$ ***با شرایط*** $y(0) = 2$ ***و*** $y'(0) = 0$ ***برابر است با:***

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **حل.** گزینه «۳». می‌دانیم، شعاع همگرایی سری جواب، حداقل برابر می‌نیمم مقادیر R_P و R_Q است. با توجه به شرایط اولیه ارائه شده، از آنجائیکه سری جواب حول نقطه $x_0 = 1$ مدنظر است، به محاسبه R_P و R_Q حول نقطه مذکور می‌پردازیم:

i) با توجه به ضابطه تحلیلی $P(x) = 0$ داریم؛ $R_P = \infty$.

ii) با توجه به ضابطه تحلیلی $Q(x) = tag^{-1}x$ داریم؛ $R_Q = 1$.

در اینصورت شعاع همگرایی سری جواب حداقل برابر $\min\{R_P, R_Q\} = 1$ بدست می‌آید.

یادآوری. با توجه به بسط مک لورن $tag^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ و به کمک آزمون دالامبر، شعاع همگرایی تابع $tag^{-1}x$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2n+3}\right| = 1$$

هم‌چنین سری مک لورن و شعاع همگرایی برخی توابع مهم در زیر آمده است:

۱) $tagx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$; $R = \frac{\pi}{2}$

۲) $Arcsin\, x = x + \frac{x^3}{2\times 3} + \frac{3x^5}{2\times 4\times 5} + \cdots$; $R = 1$

۳) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; $R = \infty$

۴) $Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$; $R = 1$

۵) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$; $R = \infty$

۶) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; $R = \infty$

مثال ۱۳. ***اگر*** $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ***جواب معادله دیفرانسیل*** $y'' - (x+1)y' + xy = 0$ ***باشد، رابطه بازگشتی*** a_n ***عبارتست از:***

۱) $a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2} - a_{n+1}}{(n+2)(n+3)}$ ۲) $a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+3)}$

۳) $a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2} + a_{n+1}}{(n+2)(n+3)}$ ۴) $a_{n+3} = \frac{(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+3)}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض

$$\Rightarrow y'' - y' - xy' + xy = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+3\to n \text{ در سری اول، } n+2\to n \text{ در سری دوم، } n+1\to n \text{ در سری سوم}} \sum_{n=-3}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} - \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$- \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[0+0+2a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}] - [0+a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}] - [0+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2a_2 - a_1) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)a_{n+3} - (n+2)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_n]x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 2a_2 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} - (n+2)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{n+3} = -\frac{(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+3)(n+2)} \quad ; n \geq 3$$

مثال ۱۴. *حداقل بازه اعتبار جواب معادله دیفرانسیل* $(Lnx)y = 0$ $y'' + e^x y' + y = 0$ *با شرایط* $y(1) = y'(1) = 1$ *عبارتست از:*

۱) $(0,2)$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(1-e,1+e)$

☑ **حل.** گزینه «۱». می‌دانیم، شعاع همگرایی سری جواب، حداقل برابر می‌نیمم مقادیر R_P و R_Q است. با توجه به شرایط اولیه ارائه شده، از آنجائیکه سری جواب حول نقطه $x_0 = 1$ مدنظر است، به محاسبه P و R_Q جواب نقطه مفروض می‌پردازیم:

i) با توجه به ضابطه تحلیلی $P(x) = e^x$ داریم؛ $R_P = \infty$.

ii) تابع $Q(x) = \text{Ln}\, x$ در $x_0 = 1$ تحلیلی و تنها نقطه غیرتحلیلی آن $x = 1$ است. بنابراین شعاع همگرایی تابع $Q(x)$ برابر فاصله این دو نقطه از یکدیگر می‌باشد. به عبارت دیگر؛ $R_Q = 1$.

در اینصورت، شعاع همگرایی سری جواب حداقل برابر $\min\{R_P, R_Q\} = 1$ بدست می‌آید. در نتیجه جواب معادله دیفرانسیل مفروض در فاصله $(0 < x < 2 \Rightarrow |x-1| < 1)$ معتبر است.

مثال ۱۵. *در مسأله مقدار اولیه زیر ضریب* x^{270} *کدام است؟*

$$y'' + x^2 y' + 2xy = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$

۱) $\frac{1}{3^{222}(222!)}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{3^{222}(222!)}$ ۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۲». نقطه $x_0 = 0$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است. در اینصورت؛

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty}n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} y'' + x^2 y' + 2xy = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+3\to n \text{ در سری اول}} \sum_{n=-3}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[0+0+2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}] + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)a_n]x^{n+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_2 = 0 \quad \& \quad a_{n+3} = -\frac{1}{n+3}a_n \quad ; n \geq 0 \qquad \text{(فرمول بازگشتی متناظر)}$$

با توجه به فرمول بازگشتی بدست آمده، هر دو جمله از سری جواب $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ، که اختلاف اندیس آنها، ۳ واحد باشد، برحسب یکدیگر قابل محاسبه‌اند. بنابراین، دسته ضرائب a_n از سری فوق که در آن $n \overset{3}{\equiv} 2$ باشد، برحسب a_2 محاسبه می‌شوند. و از آنجائیکه $a_2 = 0$ است، تمامی ضرائب متعلق به این دسته، برابر صفر خواهند شد. در اینصورت با توجه به اینکه $2 \overset{3}{\equiv} 2702$ است، در نتیجه $a_{2702} = 0$ بدست می‌آید.

مثال ۱۶. *کران پایین شعاع همگرایی سری جواب معادله دیفرانسیل* $(5+x^2)y'' + xy' - 3y = 0$ *حول نقطه* $x = 2$ *کدام است؟*

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$(5+x^2)y'' + xy' - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{x}{5+x^2}y' - \frac{3}{5+x^2}y = 0$$

همانگونه که می‌دانیم شعاع اعتبار هر سری جواب، حداقل برابر می‌نیمم شعاع همگرایی توابع $P(x) = \frac{x}{5+x^2}$ و $Q(x) = \frac{-3}{5+x^2}$ است. در اینصورت با توجه به اینکه، سری جواب حول نقطه $x_0 = 2$ مدنظر است، در نتیجه برای محاسبه شعاع همگرایی سری جواب کافیست، می‌نیمم فاصله ریشه‌های مخرج $5 + x^2 = 0$ ، که در واقع نقاط غیرتحلیلی توابع $P(x)$ و $Q(x)$ محسوب می‌شوند، از نقطه $x_0 = 2$ محاسبه شود. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $5 + x^2 = 0$ برابر مقادیر $\pm\sqrt{5}\,i$ می‌باشند، فاصله این ریشه‌ها تا نقطه $x_0 = 1$ برابر $R_P = R_Q = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2)^2} = 3$ بدست می‌آید. در نتیجه شعاع همگرایی سری جواب حداقل برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = 3$ خواهد بود.

مثال ۱۷. *در حل معادله دیفرانسیل* $y' + xy = 0$ *به روش سری حول نقطه* $x_0 = 0$، *ضریب* x^{2n} *عبارتست از:*

۱) $\frac{(-1)^n}{2^n\, n!}$ ۲) $(-1)^n \frac{2^n}{n!}$ ۳) $(-1)^n \frac{n!}{2^n}$ ۴) $(-1)^n 2^n\, n!$

☑ **حل.** گزینه «۱». با توجه به اینکه سری جواب حول نقطه عادی $x_0 = 0$ مدنظر است، با فرض نمایش سری جواب عمومی بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ داریم:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} y' + xy = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+2 \mapsto n \text{ در سری اول}} \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = [0 + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \Rightarrow$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2) a_{n+2} + a_n] x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+2) a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases} ; n \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_1 = 0 \quad \& \quad a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n \quad ; n \geq 0 \qquad \text{(فرمول بازگشتی متناظر)}$$

با توجه به فرمول بازگشتی بدست آمده، هر دو جمله از سری جواب $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، که اختلاف اندیس آنها، ۲ واحد باشد، برحسب یکدیگر قابل محاسبه‌اند. در نتیجه؛

i) دسته ضرائب a_n از سری فوق که در آن $n \overset{2}{\equiv} 1$ است، برحسب a_1 محاسبه می‌شوند. و از آنجائیکه $a_1 = 0$ است، تمامی ضرائب متعلق به این دسته نیز برابر صفر می‌شوند. بعبارت دیگر؛ $a_{2k+1} = 0$; $k \geq 0$.

ii) دسته ضرائب a_n که در آن $n \overset{2}{\equiv} 0$ است. تمامی اعضاء این دسته که در واقع همان ضرائب جملات ردیف زوج سری جواب عمومی می‌باشند، برحسب a_0 قابل محاسبه‌اند، در نتیجه با مفروض قراردادن a_0 داریم:

$$a_0 = a_0$$

$$n = 0; \quad a_2 = a_{2\times 1} = -\frac{1}{2} a_0 = \frac{(-1)^1}{2^1 (1!)} a_0$$

$$n = 2; \quad a_4 = a_{2\times 2} = -\frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{4\times 2} a_0 = \frac{(-1)^2}{2^2 2!} a_0$$

$$n = 4; \quad a_6 = a_{2\times 3} = -\frac{1}{6} a_4 = -\frac{1}{48} a_0 = \frac{(-1)^3}{2^3 3!} a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n = 2k; \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در سری جواب عمومی}} y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به ii \& i}} y = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{(-1)^k}{2^k k!} a_0) x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k} \xrightarrow{a_0 = 1} y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k}$$

مثال ۱۸. *اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، جواب معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر باشد، ضریب x^6 کدام است؟*

$$(x^2 + 1) y'' - 6y = 0 \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 1$$

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

☑ **حل.** گزینه «۴». از آنجائیکه $x_0 = 0$ ، یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل مفروض است. در اینصورت؛

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل معروض}} (x^2 + 1) y'' - 6y = x^2 y'' + y'' - 6y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n \mapsto n+2 \text{ در سری دوم}} \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) a_n - 6 a_n] x^n + \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n - 6) a_n x^n + [0 + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n^2 - n - 6) a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2}] x^n = 0 \Rightarrow (n^2 - n - 6) a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} = 0 \; ; n \geq 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - n - 6}{(n+2)(n+1)} a_n = -\frac{(n+2)(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad ; n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{n-3}{n+1} \quad ; n \geq 0 \qquad \text{(رابطه بازگشتی متناظر)}$$

با توجه به فرمول بازگشتی بدست آمده، هر دو جمله از سری جواب عمومی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، که اختلاف اندیس آنها ۲ واحد باشد برحسب یکدیگر قابل محاسبه‌اند. بنابراین ضرائب جملات ردیف زوج برحسب a_0 و ضرائب جملات ردیف فرد برحسب a_1 بدست می‌آیند. اکنون از آنجائیکه ضریب a_6 برحسب a_0 قابل محاسبه است، ابتدا با توجه به شرط اولیه $y(0) = 1$ ، به تعیین a_0 می‌پردازیم:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{x=0} y(0) = a_0 + 0 = a_0 \xrightarrow{y(0)=1} a_0 = 1$$

در اینصورت با فرض $a_0 = 1$ ضریب a_6 با توجه به رابطه بازگشتی متناظر اینگونه محاسبه می‌شود:

$$a_0 = 1$$

$$n = 0; \quad a_2 = -\frac{-3}{1} \times 1 = 3$$

$$n = 2; \quad a_4 = -\frac{-1}{3} a_2 \xrightarrow{a_2 = 3} a_4 = 1$$

$$n = 4; \quad a_6 = -\frac{1}{5} a_4 \xrightarrow{a_4 = 1} a_6 = -\frac{1}{5}$$

تذکر. همانگونه که تا کنون مشاهده شد، در تمامی مثالهایی که در این بخش مورد بررسی قرار دادیم، $x_0 = 0$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض بوده و سری جواب عمومی را نیز حول این نقطه محاسبه می‌کردیم.

در مورد تعیین جوابهای معتبر معادلهٔ دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ حول نقطه عادی غیر صفر $x = x_0$، ابتدا با تغییر متغیر $(x - x_0 = t \Rightarrow y'_x = y'_t \ \& \ y''_x = y''_t)$، معادله دیفرانسیل مفروض را به یک معادله دیفرانسیل برحسب متغیر مستقل t بر می‌گردانیم و سپس سری جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل را حول نقطه عادی $t_0 = 0$ محاسبه می‌کنیم. در اینصورت با جایگذاری $t \mapsto (x - x_0)$ در سری جواب عمومی بدست آمده، این سری بعنوان جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض نیز حول $x = x_0$ معتبر باقی خواهد ماند. لازم بذکر است، رابطه بازگشتی هر دو معادله کاملاً یکسان می‌باشد.

مثال ۱۹. اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$، جواب معادله $y'' + (1-x)y = 0$ باشد، رابطه بازگشتی مربوط به a_n کدام گزینه است؟

۱) $a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$

۲) $a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

۳) $a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

۴) $a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$

☑ **حل.** گزینه «۲». معادله دیفرانسیل $y'' + (1-x)y = 0$ حول نقطه $x_0 = 1$ مطرح است. با اعمال تغییر متغیر $(x - 1 = t \Rightarrow y'_x = y'_t \ \& \ y''_x = y''_t)$، معادله دیفرانسیل مفروض به معادله $y''_t - ty = 0$ حول نقطه عادی $t_0 = 0$ تبدیل می‌شود. از آنجائیکه رابطه‌های بازگشتی این دو معادله کاملاً یکسان می‌باشند، به محاسبه رابطه بازگشتی معادله $y''_t - ty = 0$ حول $t_0 = 0$ می‌پردازیم. در اینصورت با فرض نمایش جواب بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ داریم:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \ \& \ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} y'' - ty = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n \mapsto n+3 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-3}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n] t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ (n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} a_n \quad ; n \geq 0$$

ظاهراً فرمول بازگشتی حاصل، در هیچ‌کدام از گزینه‌ها نیست. امّا با تبدیل $n \mapsto n-1$، تساوی رابطه $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}$ بدست می‌آید، که همان گزینه (۲) است.

مثال ۲۰. هرگاه $y(1-x)y = 0$ باشد، مقدار y' برابر است با:

۱) $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x-1)^{2n}$

۲) $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x-1)^{2n+1}$

۳) $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (x-1)^{2n}$

۴) $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (x-1)^{2n+1}$

☑ **حل.** گزینه «۱». با توجه به نمایش گزینه‌ها، سری جواب حول نقطه $x_0 = 1$ مدنظر است. با اعمال تغییر متغیر $(x - 1 = t \Rightarrow y'_x = y'_t \ \& \ y''_x = y''_t)$، معادله دیفرانسیل مفروض، به معادله $y'_t + 2ty = 0$ حول نقطه عادی $t_0 = 0$ تبدیل می‌شود. در اینصورت با فرض نمایش جواب بصورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ داریم:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n \mapsto n+2 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2) a_{n+2} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2) a_{n+2} + 2a_n] t^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+2) a_{n+2} + 2a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه فرمول بازگشتی، هر دو جمله از سری جواب عمومی $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$، که اختلاف اندیس آنها ۲ واحد باشد، برحسب یکدیگر محاسبه شده‌اند. در اینصورت ضرائب سری فوق را می‌توان در پیمانه ۲ دسته‌بندی کرد:

i) دسته ضرائب a_n که در آن $n \overset{2}{\equiv} 1$ است. اعضاء این دسته برحسب a_1 بدست می‌آیند و از آنجائیکه $a_1 = 0$ است، در نتیجه تمامی ضرائب این دسته نیز برابر صفر بدست می‌آیند. بعبارت دیگر؛ $a_{2k+1} = 0 \quad ; k \geq 0$.

ii) دسته ضرائب a_n که در آن $n \overset{2}{\equiv} 0$ است. اعضاء این دسته که در واقع همان ضرائب جملات ردیف زوج سری جواب عمومی می‌باشند، با مفروض قراردادن a_0 برحسب آن محاسبه می‌شوند:

$$a_0 = a_0$$

$$n = 0; \quad a_2 = a_{2\times 1} = -\frac{2}{2} a_0 = -a_0 = \frac{(-1)^1}{1!} a_0$$

$$n = 2; \quad a_4 = a_{2\times 2} = -\frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{(-1)^2}{2!} a_0$$

$$n = 4; \quad a_6 = a_{2\times 3} = -\frac{2}{6} a_4 = -\frac{1}{6} a_0 = \frac{(-1)^3}{3!} a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n=2k;\quad a_{2k}=\frac{(-1)^k}{k!}a_0)\xrightarrow{\text{با جایگذاری در سری جواب عمومی}} y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به i \& ii}} y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^k$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'+2(x-1)y=0$ ، با تبدیل $t\mapsto x-1$ در سری $y(t)$ ، بصورت $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(x-1)^k$ بدست می‌آید.

II . حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقاط غیرعادی

تعریف II. فرض کنید توابع $a_0(x)$، $a_1(x)$ و $a_2(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ تحلیلی هستند. نقطهٔ $x=x_0$ را یک نقطه غیرعادی ـ تکین یا منفرد ـ معادله دیفرانسیل $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ می‌نامند، هرگاه $a_2(x_0)=0$ باشد. در اینصورت اگر حدود

$$\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\,P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0).\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} & \&\\ q_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2\,Q(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2.\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}\end{cases}$$

موجود و متناهی باشند، $x=x_0$ یک نقطهٔ غیرعادی منظم و اگر یکی از حدود فوق موجود و یا متناهی نباشد، نقطه مفروض را نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض، می‌خوانیم.

لازم بذکر است منظم بودن نقطه غیرعادی $x=x_0$، به مفهوم تحلیلی بودن توابع $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2Q(x)$ در نقطه مذکور می‌باشد. قضیه زیر می‌تواند راهگشای ما در استفاده از روش سریها در حالت II می‌باشد.

قضیه II . فرض کنید $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ است. در نتیجه حدود $p_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0).P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0).\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $q_0=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2.\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ موجود و متناهی هستند. اگر مقادیر r_1 و r_2 با فرض $r_1\geq r_2$ ، دو ریشه معادله شاخصی $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=0$ باشند، همواره جواب متناظر با ریشه بزرگتر یک سری فروبنوسی با نمایش ـ $y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\quad ;a_0\neq 0$ ـ است. جواب مستقل دوم، همانگونه که در حالتهای زیر دسته‌بندی کرده‌ایم، می‌تواند یک سری فروبنوسی متناظر با ریشه r_2 بوده و یا اینکه طبیعتی لگاریتمی داشته باشد:

ـ حالت اول. تفاضل ریشه‌های معادله شاخصی برابر یک عدد غیرصحیح است. بعبارت دیگر؛ $r_1-r_2\notin Z$.

در این حالت جواب مستقل دوم معادله دیفرانسیل مفروض، یک سری فروبنوسی متناظر با ریشه r_2 ، با نمایش ـ $y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\quad ;a_0\neq 0$ ـ است، که با جایگذاری در معادله مفروض و محاسبه ضرائب a_n جواب $y_2(x)$ بدست می‌آید.

ـ حالت دوم. تفاضل ریشه‌های معادله شاخصی برابر صفر است. بعبارت دیگر؛ $r_1=r_2$.

در این حالت جواب مستقل دوم معادله دیفرانسیل مفروض، دارای طبیعت لگاریتمی متناظر با تنها ریشه شاخصی و با نمایش $y_2(x)=y_1(x)\,\mathrm{Ln}|x-x_0|+(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ است.

ـ حالت سوم. تفاضل ریشه‌های معادله شاخصی برابر یک عدد صحیح غیر صفر است. بعبارت دیگر؛ $r_1-r_2\in Z-\{0\}$.

در این حالت جواب مستقل دوم معادله دیفرانسیل مفروض، هم می‌تواند یک سری فروبنوسی متناظر ریشه شاخصی r_2 باشد و یا اینکه دارای طبیعت لگاریتمی باشد:

$$y_2(x)=\alpha\,y_1(x)\,\mathrm{Ln}|x-x_0|+(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\quad ;b_0\neq 0$$

در هر کدام از حالات فوق، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض با ضابطه $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ بیان می‌شود.

تذکر.

۱ـ برای محاسبه جواب مستقل $y_2(x)$ در حالتهای دوم و سوم، می‌توان نمایشهای فوق از $y_2(x)$ را در معادله دیفرانسیل مفروض جایگذاری کرده و به محاسبه ضرائب a_n و b_n پرداخت. و یا اینکه با توجه به یکی از روشهای مرسوم اشاره شده در فصل دوم، به محاسبه جواب $y_2(x)$ از روی جواب $y_1(x)$ بپردازیم.

۲ـ همانگونه که اشاره شد، اگر $x=x_0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ باشد، آنگاه توابع $(x-x_0).P(x)=(x-x_0).\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $(x-x_0)^2.Q(x)=(x-x_0)^2.\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ حول نقطه $x=x_0$ توابعی تحلیلی هستند. در اینصورت اگر R_P و R_Q به ترتیب شعاع همگرایی سریهای متناظر توابع فوق باشند، هر سری جواب معادله دیفرانسیل مفروض در بر فاصله $0<|x-x_0|<R$ معتبر است، که $R\geq\min\{R_P,R_Q\}$ می‌باشد. و مقدار $\min\{R_P,R_Q\}$ کران پایین شعاع همگرایی جواب نامیده می‌شود.

بعنوان مثال. در معادله دیفرانسیل $x^2(x-1)(x+2)(x-3)y''+(x-1)(x-18)y'+y=0$ نوع نقاط غیرعادی، شکل جوابها، کران پایین شعاع همگرایی جوابها را حول نقاط غیرعادی منظم بدست آورید.

حل. نقاط $x_0=0,1,-2,3$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=x^2(x-1)(x+2)(x-3)$ و در نتیجه نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تعیین منظم و یا غیرمنظم بودن این نقاط حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

i) نقطه غیرعادی $x_0=0$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 0}x.\dfrac{(x-1)(x-18)}{x^2(x-1)(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-18}{x(x+2)(x-3)}\\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}x^2.\dfrac{1}{x^2(x-1)(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

از آنجائیکه یکی از حدود فوق موجود و متناهی نمی‌باشد، در نتیجه $x_0=0$ ، یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) نقطه غیرعادی $x_0=1$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1).\dfrac{(x-1)(x-18)}{x^2(x-1)(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-18)}{x^2(x+2)(x-3)}=0\\ q_0=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2.\dfrac{1}{x^2(x-1)(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2(x+2)(x-3)}=0\end{cases}$$

از آنجائیکه حدود فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_0 = 1$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. برای تعیین شکل جوابها حول نقطه مذکور، با توجه به مقادیر $p_0 = q_0 = 0$ ریشه‌های معادله شاخصی متناظر را بدست می‌آوریم:

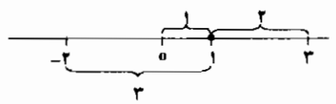
$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1 \quad \& \quad r_2 = 0$$

در اینصورت از آنجائیکه تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = 1 - 0 = 1$ یک عدد صحیح غیر صفر است، با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ - حالت سوم. نمایش جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل مفروض حول نقطه غیرعادی منظم $x_0 = 1$ بصورت زیر است:

$$y_1(x) = (x-1)^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad \& \qquad y_2(x) = \alpha\, y_1(x) \operatorname{Ln}|x-1| + (x-1)^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$$

برای محاسبه کران پایین شعاع همگرایی هر سری جواب با توجه به تذکر ۲. ابتدا به محاسبه R_P و R_Q می‌پردازیم. لازم بذکر است از آنجائیکه توابع $(x-x_0).P(x)$ و $(x-x_0)^2.Q(x)$ در این مسأله بصورت تقسیم دو چند جمله‌ای می‌باشند، در نتیجه نقاط غیرتحلیلی آنها، همان ریشه‌های مخرجشان است:

$$(x-1).P(x) = \frac{(x-1)(x-18)}{x^2(x+2)(x-3)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x+2)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad -2 \quad \& \quad 3$$



با توجه به اینکه R_P برابر فاصله نقطه $x_0 = 1$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $(x-1).P(x)$ ، یعنی نقاط $x = 0, -2, 3$ است، بنابراین $R_P = \min\{1,2,3\} = 1$ بدست می‌آید.

$$(x-1)^2.Q(x) = \frac{x-1}{x^2(x+2)(x-3)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x+2)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad -2 \quad \& \quad 3$$

مشابه حالت (۱)، مقدار $R_Q = 1$ بدست می‌آید.

در اینصورت کران پایین شعاع همگرایی جواب برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = \min\{1,1\} = 1$ محاسبه می‌شود.

iii) نقطه غیرعادی $x_0 = -2$ ؛

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x \to -2} (x+2).\dfrac{(x-1)(x-18)}{x^2(x-1)(x+2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-18}{x^2(x-3)} = \dfrac{-20}{-20} = 1 \\ q_0 = \lim\limits_{x \to -2} (x+2)^2.\dfrac{1}{x^2(x-1)(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2(x-1)(x-3)} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه حدود فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه نقطه $x_0 = -2$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. برای تعیین شکل جوابها حول نقطه مذکور، با توجه به مقادیر $p_0 = 1$ و $q_0 = 0$ ، ریشه‌های معادله شاخصی متناظر را بدست می‌آوریم:

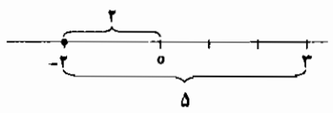
$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0, 0$$

در اینصورت از آنجائیکه معادله شاخصی متناظر دارای ریشه مضاعف $r = 0$ است، با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ - حالت دوم. نمایش جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل مفروض حول نقطه غیرعادی منظم $x_0 = -2$ بصورت زیر است:

$$y_1(x) = (x+2)^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n \qquad \& \qquad y_2(x) = y_1(x) \operatorname{Ln}|x+2| + (x+2)^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+2)^n$$

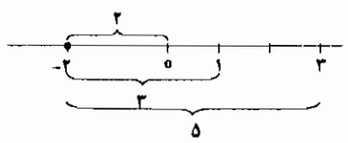
برای محاسبه کران پایین شعاع همگرایی هر سری جواب با توجه به تذکر ۲. ابتدا به محاسبه R_P و R_Q می‌پردازیم:

$$(x+2)P(x) = \frac{x-18}{x^2(x-3)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad 3$$



با توجه به اینکه R_P برابر فاصله نقطه $x_0 = -2$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $(x+2).P(x)$ ، یعنی نقاط $x = 0, 3$ می‌باشد، بنابراین $R_P = \min\{2,5\} = 2$ بدست می‌آید.

$$2)(x+2)^2.Q(x) = \frac{x+2}{x^2(x+2)(x-3)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x-1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad 1 \quad \& \quad 3$$



از آنجائیکه R_Q برابر فاصله نقطه $x_0 = -2$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $(x+2)^2.Q(x)$ ، یعنی نقاط $x = 0, 1, 3$ می‌باشد، بنابراین $R_Q = \min\{2,3,5\} = 2$ بدست می‌آید.

در اینصورت کران پایین شعاع همگرایی جواب برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = 2$ محاسبه می‌شود.

iv) نقطه غیرعادی $x_0 = 3$ ؛

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x \to 3} (x-3).\dfrac{(x-1)(x-18)}{x^2(x-1)(x+2)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-18}{x^2(x+2)} = \dfrac{-15}{45} = \dfrac{1}{3} \\ q_0 = \lim\limits_{x \to 3} (x-3)^2.\dfrac{1}{x^2(x-1)(x+2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2(x-1)(x+2)} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه حدود فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_0 = 3$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. برای تعیین شکل جوابها حول نقطه مذکور، با توجه به مقادیر $p_0 = -\frac{1}{3}$ و $q_0 = 0$ ، ریشه‌های معادله شاخصی متناظر را بدست می‌آوریم:

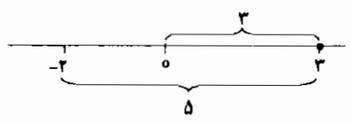
$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{4}{3}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{4}{3} \qquad \& \qquad r_2 = 0$$

در اینصورت از آنجائیکه تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$ یک عدد غیرصحیح است، با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ - حالت اول. نمایش جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل مفروض حول نقطه غیرعادی منظم $x_0 = 3$ بصورت زیر است:

$$y_1(x) = (x-3)^{\frac{4}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n \qquad \& \qquad y_2(x) = (x-3)^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-3)^n$$

برای محاسبه کران پایین شعاع همگرایی هر سری جواب با توجه به تذکر ۲. ابتدا به محاسبه R_P و R_Q می‌پردازیم:

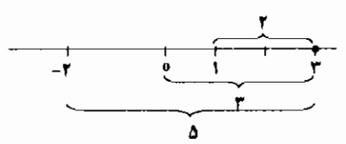
$$(x-3).P(x) = \frac{x-18}{x^2(x+2)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad -2$$



با توجه به اینکه R_P برابر فاصله نقطه $x_0 = 3$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $(x-3).P(x)$ ، یعنی نقاط $x = 0, -2$ می‌باشد، بنابراین $R_P = \min\{3,5\} = 3$ بدست می‌آید.

$$2)(x-3)^2.Q(x) = \frac{x-3}{x^2(x-1)(x+2)} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2(x-1)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad 1 \quad \& \quad -2$$

از آنجائیکه R_Q برابر فاصله نقطه $x_0 = 3$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $(x-3)^2.Q(x)$ ، یعنی نقاط $x = 0, 1, -2$ می‌باشد، بنابراین $R_Q = \min\{2,3,5\} = 2$ بدست می‌آید.



در اینصورت کران پایین شعاع همگرایی جواب برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = \min\{3,2\} = 2$ محاسبه می‌شود.

تذکر. همانند تذکر پایانی در حالت I، در مورد تعیین جوابهای معتبر معادله دیفرانسیل $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$، حول نقطهٔ غیرعادی منظم و غیر صفر $x = x_0$، کافیست ابتدا با تغییر متغیر $x - x_0 = t$، معادله دیفرانسیل مفروض را به یک معادله دیفرانسیل برحسب متغیر مستقل t تبدیل و سپس سری جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاصل را حول نقطه عادی $t_0 = 0$ بدست آوریم. در اینصورت با جایگذاری $t \mapsto (x - x_0)$ در سری جواب عمومی بدست آمده، این سری بعنوان جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض حول $x = x_0$ نیز معتبر باقی خواهد ماند.

با توجه به این تذکر، مطالعات خود را در حالت II. تنها به بررسی معادلات خطی مرتبه دوم همگن حول نقطه غیرعادی منظم $x_0 = 0$ متمرکز خواهیم کرد.

مثال ۲۱. ***معادله شاخصی معادله $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ دارای ریشه‌های زیر هستند؟***

۱) $r_1 = r_2 = 0$ ۲) $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$ ۳) $r_1 = 1$ و $r_2 = 0$ ۴) $r_1 = r_2 = 1$

☑ **حل.** گزینه «۳». از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{-x}{x^2 - x} = 0$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1}{x^2 - x} = 0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r = 0$ دارای ریشه‌های $r_2 = 0$ و $r_1 = 1$ می‌باشد.

مثال ۲۲. ***جوابهای معادله دیفرانسیل زیر به کدام یک از صورتهای زیر می‌باشد؟***

$x^2y'' + 3xy' + (1 - 2x)y = 0$ ***(حول نقطه $x_0 = 0$)***

۱) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

۲) $y_1 = x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \mathrm{Ln}x$

۳) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + y_1 \mathrm{Ln}x$

۴) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

☑ **حل.** گزینه «۳». بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 3$ و $q_0 = 1$ است. و همچنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + 2r + 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r = -1$ می‌باشد. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{\mathrm{II}}$ ـ حالت دوم. دو جواب اول معادله دیفرانسیل مفروض بصورت سری فروبینوسی متناظر با ریشه‌های مضاعف شاخصی با نمایش $y_1(x) = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و جواب دوم آن دارای طبیعت لگاریتمی با نمایش $y_2(x) = y_1(x)\mathrm{Ln}x + x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ خواهد بود.

مثال ۲۳. ***معادله شاخص معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - y = 0$ دارای ریشه‌هایی به صورت زیر است:***

۱) ۱ و ۰ ۲) ± 1 ۳) ۱- و ۲ ۴) ۱ و ۲-

☑ **حل.** گزینه «۲». از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{x}{x^2} = 1$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-1}{x^2} = -1$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - 1 = 0$ دارای ریشه‌های $r = \pm 1$ می‌باشد.

مثال ۲۴. ***نقطه $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل $x^2y'' + y'\sin x + y\cos x = 0$ چه نوع نقطه‌ای است؟***

۱) غیرعادی نامنظم ۲) غیرعادی منظم ۳) عادی ۴) عادی نامنظم

☑ **حل. گزینه «۲».** با توجه به اینکه نقطه $x_0 = 0$ ریشه تابع $a_2(x) = x^2$ است، در نتیجه نقطه مذکور، نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض است و از آنجائیکه حدود

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \\ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \end{cases}$$

موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض می‌باشد.

مثال ۲۵. ***معادله شاخصی معادله دیفرانسیل $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$ دارای جوابهایی به صورت زیر است:***

۱) ۱- و ۱ ۲) ۰ و ۱- ۳) ± 2 ۴) ۰ و ۱

☑ **حل.** گزینه «۴». از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{-x}{x^2 - x} = 0$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1}{x^2 - x} = 0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r = 0$ دارای ریشه‌های $r = 0, 1$ می‌باشد.

مثال ۲۶. ***در معادله $2(x-3)^2xy'' + 3xy' + (x-3)y = 0$***

۱) نقاط $x = 0$ و $x = 3$ هر دو نقاط انفرادی عادی (تکین منظم) هستند.

۲) نقاط $x = 0$ و $x = 3$ هر دو نقاط انفرادی عادی (تکین نامنظم) هستند.

۳) نقطه $x = 0$ نقطه انفرادی عادی (تکین منظم) و نقطه $x = 3$ انفرادی غیرعادی (تکین نامنظم) است.

۴) نقطه $x = 3$ نقطه انفرادی عادی (تکین منظم) و نقطه $x = 0$ انفرادی غیرعادی (تکین نامنظم) است.

☑ **حل.** گزینه «۴». از آنجائیکه نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 3$ ریشه‌های تابع $a_2(x) = 2(x-3)^2x$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و یا غیرمنظم بودن:

i) نقطه غیرعادی $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0}(x-0).\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \lim_{x\to 0} x.\frac{3x}{2(x-3)^2x} = 0 \\ q_0 = \lim_{x\to 0}(x-0)^2.\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{x-3}{2(x-3)^2x} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه نقطه $x_0 = 0$ ، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) نقطه غیرعادی $x_0 = 3$:

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 3}(x-3)\cdot\frac{3x}{2(x-3)^2 x} = \lim_{x\to 3}\frac{3}{2(x-3)} \\ q_0 = \lim_{x\to 3}(x-3)^2\cdot\frac{(x-3)}{2(x-3)^2 x} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{2x} = 0 \end{cases}$$

در اینصورت با توجه به اینکه مقدار p_0 موجود و متناهی نیست، در نتیجه $x_0 = 3$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

مثال۲۷. در معادله دیفرانسیل $y'' + \frac{3x-1}{x^2-x}y' + \frac{1}{x^2-x}y = 0$ هرگاه $y_1(x)$ یکی از جوابهای معادله به صورت، سری باشد، جواب مستقل دیگر به کدام صورت زیر خواهد بود؟

۱) $y_2(x) = \sqrt{x}\ y_1(x)$

۲) $y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$

۳) $y_2(x) = 3x\ y_1(x)$

۴) $y_2(x) = ax^3 + bx + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$

☑ **حل. گزینه «۲».**

$$y'' + \frac{3x-1}{x^2-x}y' + \frac{1}{x^2-x}y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-x)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

با توجه به اینکه $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$ ریشه‌های تابع $a_2(x) = x^2 - x$ می‌باشند، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

الف ـ $x_0 = 0$ ؛ می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 1$ و $q_0 = 0$ است. در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r = 0$ می‌شود. در نتیجه طبق قضیه $\overline{II}$ – حالت دوم. جواب مستقل دوم دارای طبیعت لگاریتمی با نمایش زیر خواهد بود:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^0\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

بنابراین با توجه به تساوی فوق گزینه ۲. همان گزینه مورد نظر است و دیگر نیازی به بررسی حالت $x_0 = 1$ نمی‌باشد.

مثال۲۸. یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - xy' + (1-x)y = 0$ به فرم سری فروبینوسی عبارت است از:

۱) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

۲) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۳) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۴) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

☑ **حل. گزینه «۱».** از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $-1 = \frac{-x}{x^2}$ موجود و متناهی $p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-x}{x^2} = -1$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1-x}{x^2} = 1$ می‌باشند، در نتیجه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - 2r + 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r = 1$ است. در نتیجه جواب فروبینوسی آن متناظر با $r = 1$ و با نمایش $y = x^1\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ می‌باشد:

$$\left(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n\,a_n x^{n-1}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x^2y'' - xy' + (1-x)y = x^2y'' - xy' + y - xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n\,a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n-1 \text{ در سری آخر و جمع بستن سایر سریها}} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1}] - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 a_n - a_{n-1})x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$n^2 a_n - a_{n-1} = 0 \quad ; n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n^2}a_{n-1} \quad ; n \geq 1 \qquad \text{(فرمول بازگشتی متناظر)}$$

در اینصورت با توجه به فرمول بازگشتی بدست آمده و با مفروض قرار دادن a_0، ضرائب بعدی سری جواب را اینگونه محاسبه می‌کنیم:

$$a_0 = a_0$$

$$n=1; \quad a_1 = \frac{1}{1}a_0 = \frac{1}{(1!)^2}a_0$$

$$n=2; \quad a_2 = \frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{4}a_0 = \frac{1}{(2!)^2}a_0$$

$$n=3; \quad a_3 = \frac{1}{9}a_2 = \frac{1}{9\times 4}a_0 = \frac{1}{6^2}a_0 = \frac{1}{(3!)^2}a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n=n; \quad a_n = \frac{1}{(n!)^2}a_0) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در سری جواب}} y = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}a_0 x^n$$

با فرض $a_0 = 1$ گزینه (۱) صحیح است.

مثال۲۹. نقطه $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل $x^2(2x+1)y'' + (\tan x)y' + xy = 0$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) عادی ۲) غیرعادی منظم ۳) غیرعادی نامنظم ۴) عادی نامنظم

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به اینکه $x_0 = 0$ ریشه تابع $a_2(x) = x^2(2x+1)$ است، در نتیجه یک نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض محسوب می‌شود. برای تعیین منظم یا غیرمنظم بودن؛

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\tan x}{x^2(2x+1)} \xrightarrow[(x\to 0 \Rightarrow \tan x\sim x)]{\text{هم ارزی:}} p_0 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(2x+1)} = 1 \\ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x}{x^2(2x+1)} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی می‌باشند، در نتیجه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

مثال ۳۰. *اگر معادله شاخصی متناظر معادله دیفرانسیل $x(x-1)y'' + a(2x-1)y' + y = 0$ حول نقطه $x = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد، مقدار a کدام است؟ (a عددی متناهی است.)*

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲-

☑ **حل.** گزینه «۳». از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{a(2x-1)}{x(x-1)} = a$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{1}{x(x-1)} = 0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + (a-1)r = 0$ دارای ریشه‌های $a-1$ و $r = 0$ می‌باشد. شرط مضاعف بودن ریشه‌ها برابری ریشه‌ها است. در نتیجه؛

$$a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 .$$

مثال ۳۱. *دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $x(x^2+3)y'' + 2y' + y = 0$ حول نقطه $x = 0$ کدام است؟*

۱) $y_1 = x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ & $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

۲) $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ & $y_2 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

۳) $y_1 = x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ & $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

۴) $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ & $y_2 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

☑ **حل.** گزینه «۳». می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \frac{2}{3}$ و $q_0 = 0$ است. و هم‌چنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ دارای ریشه‌های $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = 0$ می‌باشد، در نتیجه تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = \frac{1}{3}$ برابر با یک عدد غیرصحیح است. در اینصورت طبق قضیه $\overline{\text{II}}$ـ حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی هستند:

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; a_0 \neq 0 \qquad \& \qquad y_2 = x^0\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad ; b_0 \neq 0$$

مثال ۳۲. *حداقل شعاع همگرایی جواب معادله $(x^2-5x)(x^2+2)y'' + y' - e^x y = 0$ حول $x_0 = 0$ کدام است؟*

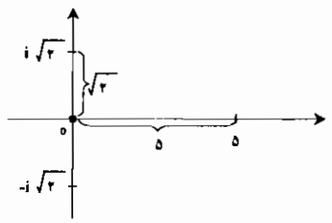
۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) صفر ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۱». برای محاسبه کران پایین شعاع همگرایی هر سری جواب، ابتدا به محاسبه R_P و R_Q می‌پردازیم:

$$1)\ (x - x_0).P(x) = x.\frac{1}{(x^2-5x)(x^2+2)} = \frac{1}{(x-5)(x^2+2)}$$

با توجه به اینکه تابع فوق بصورت تقسیم دو چند جمله‌ای می‌باشد، برای تعیین نقاط غیرتحلیلی آن کافیست ابتدا ریشه‌های مخرج را محاسبه کنیم:

$$(x-5)(x^2+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \& \quad \pm i\sqrt{2}$$



سپس از آنجائیکه R_P برابر فاصله نقطه $x_0 = 0$ از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $x.P(x)$ یعنی نقاط $x = 5 , i\sqrt{2} , -i\sqrt{2}$ و است، بنابراین $R_P = \min\{\sqrt{2}, 5\} = \sqrt{2}$ بدست می‌آید.

$$2)\ (x - x_0)^2 Q(x) = x^2.\frac{-e^x}{(x^2-5x)(x^2+2)} = -\frac{x e^x}{(x-5)(x^2+2)}$$

با توجه به اینکه xe^x تابعی تحلیلی است، برای تعیین نقاط غیرتحلیلی کسر فوق کافیست ابتدا ریشه‌های مخرج را محاسبه کنیم:

$$(x-5)(x^2+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \& \quad \pm\sqrt{2}\,i$$

که دقیقاً همان وضعیت محاسبه R_P رخ می‌دهد. در نتیجه؛ $R_Q = \sqrt{2}$.

در اینصورت کران پایین شعاع همگرایی هر جواب معادله دیفرانسیل برابر $\min\{R_P, R_Q\} = \sqrt{2}$ محاسبه می‌شود.

مثال ۳۳. *رابطه بازگشتی جواب از نوع فروبینوسی در معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + x(x+1)y' + xy = 0$ حول نقطه $x_0 = 0$ کدام است؟*

۱) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}$ ۲) $a_n = -\frac{a_{n-1}}{n^2}$ ۳) $a_n = \frac{n a_{n-1}}{n^2+1}$ ۴) $a_n = -\frac{n a_{n-1}}{n^2+1}$

☑ **حل.** گزینه «۲». می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 1$ و $q_0 = 0$ است. در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r = 0$ می‌شود. در نتیجه یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض، بصورت سری فروبینوسی، متناظر با $r = 0$ و با نمایش $y = x^0\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x^2y'' + x(x+1)y' + xy = x^2y'' + x^2y' + xy' + xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n+1} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n-1 \to n \text{ در سری دوم}} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n = [0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^n] + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n + n a_{n-1}) x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 a_n + n a_{n-1} = 0 \quad ; n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} \quad ; n \geq 0$$

مثال ۳۴. *جواب تحلیلی معادله $x^2 y'' - x(x+1)y' + y = 0$ حول نقطه منفرد کدام است؟*

۱) $x e^{-x}$ ۲) $x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ ۳) $x e^x$ ۴) $x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$

☑ **حل.** گزینه «۳». از آنجائیکه $a_۲(۰)=۰$ و حدود $p_۰=\lim_{x\to ۰} x.\frac{-x(x+۱)}{x}=-۱$ و $q_۰=\lim_{x\to ۰} x^۲.\frac{۱}{x^۲}=۱$ موجود و متناهی می‌باشند، در نتیجه $x_۰=۰$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^۲+(p_۰-۱)r+q_۰=r^۲-۲r+۱=۰$ دارای ریشه مضاعف $r=۱$ است. در نتیجه یک جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل مفروض، بصورت سری فروبینوسی، متناظر با $r=۱$ و با نمایش $y=x^{۱}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱}$ می‌باشد:

$$(y=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱} \Rightarrow y'=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^n \quad \& \quad y''=\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)n a_n x^{n-۱})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x^۲y''-x(x+۱)y'+y=x^۲y''-x^۲y'-xy'+y=۰ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)n a_n x^{n+۱}-\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۲}-\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۱}+\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^{n+۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}n^۲a_n x^{n+۱}-\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)a_n x^{n+۲}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+۱\mapsto n \text{ در سری دوم}} \sum_{n=۰}^{\infty} n^۲a_n x^{n+۱}-\sum_{n=۱}^{\infty} n a_{n-۱}x^{n+۱}=۰ \Rightarrow$$

$$[۰+\sum_{n=۱}^{\infty} n^۲a_n x^{n+۱}]-\sum_{n=۱}^{\infty} n a_{n-۱}x^{n+۱}=۰ \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}(n^۲a_n-n a_{n-۱})x^{n+۱}=۰ \Rightarrow$$

$$n^۲a_n-n a_{n-۱}=۰ \quad ;n\geq ۱ \Rightarrow a_n=\frac{۱}{n}a_{n-۱} \quad ;n\geq ۱$$

در اینصورت با توجه به فرمول بازگشتی بدست آمده و با مفروض قرار دادن $a_۰$، ضرائب بعدی سری جواب را اینگونه محاسبه می‌کنیم:

$$a_۰=a_۰$$

$$n=۱; \quad a_۱=\frac{۱}{۱}a_۰=a_۰=\frac{۱}{۱!}a_۰$$

$$n=۲; \quad a_۲=\frac{۱}{۲}a_۱=\frac{۱}{۲}a_۰=\frac{۱}{۲!}a_۰$$

$$n=۳; \quad a_۳=\frac{۱}{۳}a_۲=\frac{۱}{۶}a_۰=\frac{۱}{۳!}a_۰$$

$$n=۴; \quad a_۴=\frac{۱}{۶}a_۳=\frac{۱}{۲}a_۰=\frac{۱}{۴!}a_۰$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n=n; \quad a_n=\frac{۱}{n!}a_۰) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در سری جواب}} y=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+۱}=\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{۱}{n!}a_۰)x^{n+۱}=a_۰x\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}x^n$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به بسط مک لورن } \sum\frac{x^n}{n!}=e^x} y=a_۰xe^x \xrightarrow{a_۰=۱} y=xe^x$$

☑ **مثال ۳۵.** ***رابطه بازگشتی مربوط به جوابی از معادله دیفرانسیل $۲xy''+(۵-۲x)y'-y=۰$ حول نقطه $x_۰=۰$ که در اطراف این نقطه بی‌کران است کدام است؟***

۱) $a_{n+۱}=\frac{۲(n-۱)}{(۲n-۱)(n+۱)}a_n$

۲) $a_{n+۱}=\frac{۲(n+۱)}{(۲n-۱)(n-۱)}a_n$

۳) $a_{n+۱}=\frac{n-۱}{(۲n-۱)(n+۱)}a_n$

۴) $a_{n+۱}=\frac{n+۱}{(۲n-۱)(n-۱)}a_n$

☑ **حل.** گزینه «۱». از آنجائیکه $a_۲(۰)=۰$ و حدود $p_۰=\lim_{x\to ۰} x.\frac{۵-۲x}{۲x}=\frac{۵}{۲}$ و $q_۰=\lim_{x\to ۰} x^۲.\frac{-۱}{۲x}=۰$ موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_۰=۰$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. و هم چنین معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^۲+(p_۰-۱)r+q_۰=r^۲+\frac{۳}{۲}r=۰$ دارای ریشه‌های $r_۱=۰$ و $r_۲=-\frac{۳}{۲}$ می‌باشد، که تفاضل آنها $r_۱-r_۲=۰-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}$ یک عدد غیرصحیح است. در اینصورت طبق قضیه III – حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_۱=x^{۰}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n \quad ;a_۰\neq ۰ \qquad \& \qquad y_۲=x^{-\frac{۳}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n \quad ;b_۰\neq ۰$$

بنابراین با توجه به ضابطه جوابهای $y_۱$ و $y_۲$ داریم:

الف) $\lim_{x\to ۰} y_۱=\lim_{x\to ۰}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n=۰$

ب) $\lim_{x\to ۰} y_۲=\lim_{x\to ۰} x^{-\frac{۳}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n=\lim_{x\to ۰}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-\frac{۱}{۲}}=\lim_{x\to ۰}(b_۰x^{-\frac{۱}{۲}}+\sum_{n\geq ۱} b_n x^{n-\frac{۱}{۲}}) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to ۰} y_۲=\lim_{x\to ۰}\frac{b_۰}{x^{\frac{۱}{۲}}} \xrightarrow{b_۰\neq ۰} \lim_{x\to ۰} y_۲=\infty$$

در اینصورت جواب $y_۲$ حول نقطه $x_۰=۰$ بی‌کران و رابطه بازگشتی متناظر این جواب را بدست می‌آوریم:

$$(y_۲=\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow y_۲'=\sum_{n=۰}^{\infty}(n-\frac{۳}{۲})b_n x^{n-\frac{۵}{۲}} \quad \& \quad y_۲''=\sum_{n=۰}^{\infty}(n-\frac{۳}{۲})(n-\frac{۵}{۲})b_n x^{n-\frac{۷}{۲}})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} ۲xy_۲''+(۵-۲x)y_۲'-y_۲=۲xy_۲''+۵y_۲'-۲xy_۲'-y_۲=۰ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}۲(n-\frac{۳}{۲})(n-\frac{۵}{۲})b_n x^{n-\frac{۵}{۲}}+\sum_{n=۰}^{\infty}۵(n-\frac{۳}{۲})b_n x^{n-\frac{۵}{۲}}-\sum_{n=۰}^{\infty}۲(n-\frac{۳}{۲})b_n x^{n-\frac{۳}{۲}}-\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-\frac{۳}{۲}}=۰ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}۲n(n-\frac{۳}{۲})b_n x^{n-\frac{۵}{۲}}-\sum_{n=۰}^{\infty}۲(n-۱)b_n x^{n-\frac{۳}{۲}}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+۱\mapsto n \text{ در سری اول}} \sum_{n=-۱}^{\infty}۲(n+۱)(n-\frac{۱}{۲})b_{n+۱}x^{n-\frac{۳}{۲}}-\sum_{n=۰}^{\infty}۲(n-۱)b_n x^{n-\frac{۳}{۲}}=۰ \Rightarrow$$

$$[۰+\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۱)(۲n-۱)b_{n+۱}x^{n-\frac{۳}{۲}}]-\sum_{n=۰}^{\infty}۲(n-۱)b_n x^{n-\frac{۳}{۲}}=\sum_{n=۰}^{\infty}[(n+۱)(۲n-۱)b_{n+۱}-۲(n-۱)b_n]x^{n-\frac{۳}{۲}}=۰ \Rightarrow$$

$$(n+۱)(۲n-۱)b_{n+۱}-۲(n-۱)b_n=۰ \quad ;n\geq ۰ \Rightarrow b_{n+۱}=\frac{۲(n-۱)}{(n+۱)(۲n-۱)}b_n \quad ;n\geq ۰$$

مثال ۳۶. ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x^2y'' + x(x-1)y' + y = 0$ حول نقطه $x_0 = 0$ کدام است؟

۱) $0, 1$ ۲) $0, \frac{1}{2}$ ۳) $0, -1$ ۴) $1, 1$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$a_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x(x-1)}{x^2} = -1 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x^2} = 1\right)$$

از آنجائیکه حدود فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. در اینصورت؛

$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1, 1$$

مثال ۳۷. در معادله دیفرانسیل $x\sin x\,y'' + y' + xy = 0$ نقاط غیرعادی منظم کدامند؟

۱) صفر ۲) $k\pi \;;k \in Z$

۳) $k\pi \;;k > 0$ ۴) همه نقاط غیرعادی، منظم هستند.

☑ **حل.** گزینه «۳». مجموعه نقاط $\{x = k\pi \mid k \in Z\}$ ریشه‌های تابع $a_2(x) = x\sin x$ و در نتیجه نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض می‌باشند. برای تعیین منظم و غیرمنظم بودن؛

i) نقطه غیرعادی $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x} \\ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x}{x\sin x} \xrightarrow{\text{هم ارزی: } (x\to 0 \Rightarrow \sin x \sim x)} q_0 = \lim_{x\to 0} x = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه یکی از حدود فوق موجود و متناهی نمی‌باشد، در نتیجه $x_0 = 0$، یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) نقطه غیرعادی $-x_0 = k\pi \;;k > 0$:

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to k\pi} (x-k\pi)\cdot\frac{1}{x\sin x} = \lim_{x\to k\pi}\frac{x-k\pi}{x\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} p_0 = \lim_{x\to k\pi}\frac{1}{\sin x + x\cos x} = \frac{1}{\pm k\pi} \quad ;k > 0 \\ q_0 = \lim_{x\to k\pi} (x-k\pi)^2\cdot\frac{x}{x\sin x} = \lim_{x\to k\pi}\frac{(x-k\pi)^2}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} q_0 = \lim_{x\to k\pi}\frac{2(x-k\pi)}{\cos x} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه حدود فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه نقاط $-x_0 = k\pi \;;k > 0$ نقاط غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض هستند.

مثال ۳۸. جوابهای معادله دیفرانسیل زیر به کدامیک از صورتهای زیر می‌باشد؟

$x^2y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$ **(حول نقطه $x_0 = 0$)**

۱) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

۲) $y_1 = x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1\ln x$

۳) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k + y_1\ln x$

۴) $y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $y_2 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

☑ **حل.** گزینه «۳». می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 3$ و $q_0 = 1$ است. و هم چنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + 2r + 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف $r = -1$ است. در اینصورت طبق قضیه $\overline{II}$ – حالت دوم. یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض، سری فروبینوسی متناظر با ریشه $r = -1$ و جواب مستقل دوم آن دارای طبیعت لگاریتمی با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_1 = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \& \qquad y_2 = y_1\ln x + x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

مثال ۳۹. یکی از جوابهای معادله دیفرانسیل $(x^2-x)y'' + (8x^2-2)y' - \frac{1}{x(2x+1)}y = 0$ حول نقطه $x_0 = 1$ کدام است؟

۱) $y = \alpha y_1\ln|x-1| + (x-1)^{-5}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k$ ۲) $y = \alpha y_1\ln|x| + (x-1)^{-5}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k$

۳) $y = \alpha y_1\ln|x-1| + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k$ ۴) $y = y_1\ln|x-1| + (x-1)^{-5}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k$

☑ **حل.** گزینه «۱». می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 1$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{8x^2-2}{x^2-x} = 6$ و $q_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\cdot\frac{-1}{x(2x+1)(x^2-x)} = 0$ است. و هم‌چنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + 5r = 0$ دارای ریشه‌های $r_1 = 0$ و $r_2 = -5$ می‌باشد. در نتیجه تفاضل ریشه‌های شاخصی $5 = (-5) - 0 = r_1 - r_2$ برابر با یک عدد صحیح می‌شود. در اینصورت طبق قضیه $\overline{II}$ – حالت سوم. دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای زیر هستند:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-1)^k \quad ;a_0 \neq 0 \qquad \& \qquad y_2 = \alpha y_1\ln|x-1| + (x-1)^{-5}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-1)^k \quad ;b_0 \neq 0$$

مثال ۴۰. رابطه بازگشتی مربوط به جوابی از معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0 \;;x > 0$ حول نقطه $x_0 = 0$ که در اطراف آن کران‌دار است، کدام است؟

۱) $a_n = \frac{1}{n(n+\frac{2}{3})}a_{n-2}$ ۲) $a_1 = 0 \;\&\; a_n = -\frac{1}{n(n+\frac{2}{3})}a_{n-2}$

۳) $a_1 = 0 \;\&\; a_n = \frac{1}{n(n+\frac{2}{3})}a_{n-1}$ ۴) $a_n = \frac{1}{n(n+\frac{2}{3})}a_{n-1}$

☑ **حل.** گزینه «۲». از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x}{x^2} = 1$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x^2} = -\frac{1}{9}$ موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است. و هم چنین معادله شاخصی متناظر

$f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{9}=0$ دارای ریشه‌های $r_1=\frac{1}{3}$ و $r_2=-\frac{1}{3}$ می‌باشد، که تفاضل آنها $r_1-r_2=\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$ برابر با یک عدد غیر صحیح است. در اینصورت طبق قضیه $\overline{\text{II}}$ – حالت اول، هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_1=x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad ;a_0\neq 0 \qquad \& \qquad y_2=x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_k x^n \quad ;b_0\neq 0$$

بنابراین با توجه به ضابطه جوابهای y_1 و y_2 داریم:

الف) $\lim_{x\to 0} y_2=\lim_{x\to 0} x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n-\frac{1}{3}}=\lim_{x\to 0}(b_0 x^{-\frac{1}{3}}+\sum_{n\geq 1}^{\infty}b_n x^{n-\frac{1}{3}}) \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} y_2=\lim_{x\to 0}\frac{b_0}{x^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow{b_0\neq 0} \lim_{x\to 0} y_2=\infty$$

ب) $\lim_{x\to 0} y_1=\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} y_1=0$

در اینصورت جواب y_1 کراندار و رابطه بازگشتی متناظر با این جواب را بدست می‌آوریم:

$$(y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{3})a_n x^{n-\frac{2}{3}} \qquad \& \qquad y_1''=\sum_{n=0}^{\infty}(n-\tfrac{2}{3})(n+\tfrac{1}{3})a_n x^{n-\frac{5}{3}})$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض $\Rightarrow x^2y_1''+xy_1'+(x^2-\frac{1}{9})y_1=x^2y_1''+xy_1'+x^2y_1-\frac{1}{9}y_1=0 \quad \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-\tfrac{2}{3})(n+\tfrac{1}{3})a_n x^{n+\frac{1}{3}}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+\tfrac{1}{3})a_n x^{n+\frac{1}{3}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{7}{3}}-\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{9}a_n x^{n+\frac{1}{3}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+\tfrac{2}{3}n)a_n x^{n+\frac{1}{3}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{7}{3}}=0$$

با تبدیل $n\mapsto n-2$ در سری دوم $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}n(n+\frac{2}{3})a_n x^{n+\frac{1}{3}}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+\frac{1}{3}}=0 \quad \Rightarrow$

$$[0+\tfrac{5}{3}a_1x^{\frac{4}{3}}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n+\tfrac{2}{3})a_n x^{n+\frac{1}{3}}]+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+\frac{1}{3}}=\tfrac{5}{3}a_1x^{\frac{4}{3}}+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n+\tfrac{2}{3})a_n+a_{n-2}]x^{n+\frac{1}{3}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_1=0\\ n(n+\frac{2}{3})a_n+a_{n-2}=0 \quad ;n\geq 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1=0\\ a_n=-\dfrac{1}{n(n+\frac{2}{3})}a_{n-2} \quad ;n\geq 2\end{cases}$$

معادله دیفرانسیل لژاندر و توابع لژاندر

تعریف. معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$ که در آن λ یک عدد حقیقی ثابت است، معادله لژاندر نامیده می‌شود. همانگونه که مشخص است، توابع $a_2(x)=1-x^2$، $a_1(x)=-2x$ و $a_0(x)=\lambda$ در نقطه $x_0=0$ تحلیلی هستند و با توجه به اینکه $a_2(0)=1$ مخالف صفر است نقطه مذکور، یک نقطه عادی و در نتیجه معادله لژاندر دو جواب مستقل با نمایش $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)x^n$ دارد. با جایگذاری y در معادله لژاندر، احکام زیر قابل بررسی است:

ـ فرمول بازگشتی متناظر لژاندر بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{n+2}(\lambda)=\frac{(n+1)n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n(\lambda) \qquad ;n\geq 0 \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

ـ جواب عمومی معادله لژاندر بصورت $y=\bar{y}_1(x,\lambda)+\bar{y}_2(x,\lambda)=a_0y_1(x,\lambda)+a_1y_2(x,\lambda)$ بدست می‌آید، که در آن:

i) $\bar{y}_1(x,\lambda)$ جملات ردیف زوج سری جواب عمومی با ضابطه زیر است:

$$\bar{y}_1(x,\lambda)=a_0y_1(x,\lambda)=a_0(1+\sum_{k=0}^{\infty}\bar{a}_{2k+2}(\lambda)x^{2k+2}) \qquad \&$$

$$\bar{a}_{2k+2}(\lambda)=\frac{[(2k+1)2k-\lambda][(2(k-1)+1)2(k-1)-\lambda]\times\cdots\times(-\lambda)}{(2k+2)!}$$

ii) $\bar{y}_2(x,\lambda)$ جملات ردیف فرد سری جواب عمومی با ضابطه زیر است:

$$\bar{y}_2(x,\lambda)=a_1y_2(x,\lambda)=a_1(x+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_{2k+1}(\lambda)x^{2k+1}) \qquad \&$$

$$\bar{a}_{2k+1}(\lambda)=\frac{[2k(2k-1)-\lambda][(2(k-1)(2(k-1)-1)-\lambda]\times\cdots\times(2-\lambda)}{(2k+1)!}$$

ـ شعاع همگرایی سری جواب عمومی لژاندر حول نقطه $x_0=0$، به کمک آزمون دالامبر و با توجه به فرمول بازگشتی متناظر بدست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{فرمول بازگشتی لژاندر}} a_{n+2}(\lambda)=\frac{(n+1)n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n(\lambda) \xrightarrow{\text{آزمون دالامبر}} \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}(\lambda)}{a_n(\lambda)}\right|=\left|\frac{(n+1)n-\lambda}{(n+2)(n+1)}\right|=1$$

در نتیجه شعاع همگرایی جواب عمومی معادله لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$; $\lambda\in\mathbb{R}$، مجموعه اعداد حقیقی در فاصله $-1<x<1$ است.

توابع لژاندر و چند جمله‌ایهای لژاندر.

همانگونه که مشاهده کردیم، جواب عمومی معادله لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$; $\lambda\in\mathbb{R}$ ، بصورت $y=a_0y_1(x,\lambda)+a_1y_2(x,\lambda)$ است، که در آن $y_1(x,\lambda)=1+\sum_{\substack{n=2k\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n$ و $y_2(x,\lambda)=x+\sum_{\substack{n=2k+1\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n$ ، دو سری جواب مستقل معادله لژاندر هستند که در فاصله $|x|<1$ معتبر می‌باشند.

حالت خاصی از نمایش معادله لژاندر که در اکثر مسائل کاربردی ظاهر می‌شود بصورت $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$ است، که ν یک عدد صحیح و نامنفی می‌باشد. در اینصورت؛

الف ـ فرض کنید ν یک عدد صحیح نامنفی و زوج است؛ در این حالت تابع لژاندر $y_1(x,\lambda)=1+\sum_{\substack{n=2k\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n$ بصورت یک چندجمله‌ای از مرتبه ν با نمایش $y_1(x,\nu)=1+\sum_{\substack{n\leq\nu\\n=2k}}\bar{a}_n x^n$ مرتب می‌شود. در نتیجه اگر ν عددی زوج باشد، سری جواب عمومی معادله لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$; $\nu\in Z^+$ ، بصورت یک ترکیب خطی از چند جمله‌ای $p_\nu(x)=y_1(x,\nu)$ و تابع لژاندر $y_2(x,\nu)$ بدست می‌آید.

$$y=a_0p_\nu(x)+a_1y_2(x,\nu)=a_0(1+\bar{a}_2x^2+\bar{a}_4x^4+\cdots+\bar{a}_\nu x^\nu)+a_1(x+\sum_{\substack{n=2k+1\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n)$$

ب ـ فرض کنید ν یک عدد صحیح نامنفی و فرد است؛ در این حالت تابع لژاندر $y_2(x,\lambda)=x+\sum_{\substack{n=2k+1\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n$ بصورت چندجمله‌ای از مرتبه ν با نمایش $y_2(x,\nu)=x+\sum_{\substack{n\leq\nu\\n=2k+1}}\bar{a}_n x^n$ مرتب می‌شود. در نتیجه اگر ν عددی فرد باشد، سری جواب عمومی معادله لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$; $\nu\in Z^+$ ، بصورت یک ترکیب خطی از چندجمله‌ای $q_\nu(x)=y_2(x,\nu)$ و تابع لژاندر $y_1(x,\nu)$ بدست می‌آید:

$$y=a_0y_1(x,\nu)+a_1q_\nu(x,\nu)=a_0(1+\sum_{\substack{n=2k\\k\geq 1}}\bar{a}_n x^n)+a_1(x+\bar{a}_3x^3+\bar{a}_5x^5+\cdots+\bar{a}_\nu x^\nu)$$

تعریف. اگر a_0 و a_1 بگونه‌ای انتخاب شوند که مقدار چند جمله‌ایهای $p_\nu(x)$; $\nu=2k$ و $q_\nu(x)$; $\nu=2k+1$ به ازاء $k\geq 1$، در نقطه $x=1$ برابر $p_\nu(1)=q_\nu(1)=1$ شود، چند جمله‌ایهای مذکور، چند جمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شوند.

با فرض $\bar{a}_\nu=\frac{(2\nu)!}{2^\nu(\nu!)^2}$ چند جمله‌ایهای لژاندر بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{[\frac{\nu}{2}]}(-1)^k\frac{(2\nu-2k)!}{k!(\nu-k)!(\nu-2k)!}x^{\nu-2k}\qquad\&\qquad P_\nu(x)=\begin{cases}p_\nu(x) & ;\nu=2k\\ q_\nu(x) & ;\nu=2k+1\end{cases}$$

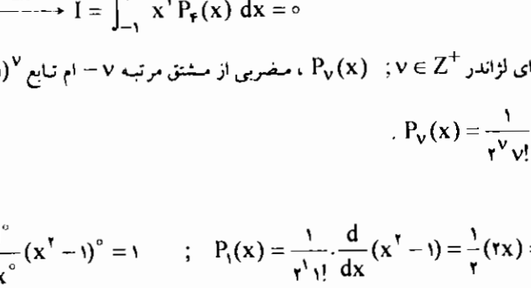
بسط فوق، بسط چند جمله‌ای لژاندر از درجه ν نامیده می‌شود.

بعنوان مثال؛

$P_0(x)=1$; $P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$; $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$; $P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$ & $\cdots$



چند گزاره و قضیه در مورد چند جمله‌ایهای لژاندر.

ـ گزاره . با توجه به بسط چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه ν، می‌توان ثابت کرد: $P_\nu(-x)=(-1)^\nu P_\nu(x)$; $\nu\in Z^+$.

گزاره فوق در واقع بیان می‌کند، چند جمله‌ای‌های لژاندرِ از مرتبه زوج توابعی زوج و چند جمله‌ایهای لژاندر از مرتبه فرد، توابعی فرد هستند.

بعنوان مثال. فرض کنید $y=y(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$ بصورت چند جمله‌ای و با فرض $y(1)=1$ باشد. در اینصورت حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1}x^3y\,dx$ را بدست آورید.

حل. با توجه به تساوی $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0=(1-x^2)y''-2xy'+(4\times 5)y$، معادله دیفرانسیل مفروض، معادله لژاندر از مرتبه $\nu=4$ و با توجه به شرط اولیه $y(1)=1$، در واقع $y(x)$ همان چند جمله‌ای لژاندر $P_4(x)$ است. در اینصورت؛

$$I=\int_{-1}^{1}x^3y\,dx=\int_{-1}^{1}x^3P_4(x)\,dx$$

با توجه به گزاره فوق چند جمله‌ای $P_4(x)$ تابعی زوج است:

تابعی فرد: $x^3P_4(x)$ $\Rightarrow$ (تابعی زوج: $P_4(x)$ & تابعی فرد: x^3)

$$\xrightarrow{(f:\text{ تابعی فرد })\Rightarrow\int_{-a}^{a}f\,dx=0} I=\int_{-1}^{1}x^3P_4(x)\,dx=0$$

ـ قضیه. (فرمول رودریگز) چند جمله‌ای لژاندر $P_\nu(x)$; $\nu\in Z^+$ ، مضربی از مشتق مرتبه ν ـ ام تابع $(x^2-1)^\nu$ است. بعبارت دیگر؛ $P_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu$.

بعنوان مثال؛

$P_0(x)=\frac{1}{2^0(0!)}\cdot\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0=1$; $P_1(x)=\frac{1}{2^1 1!}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{1}{2}(2x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)=\frac{1}{8}(12x^2-4)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ & $\cdots$

ـ قضیه (تابع مولد) چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(x)$; $\nu \in Z^+$ در واقع ضرائب t^ν در بسط مک لورن $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ در فاصله $|t|<1$ می‌باشند. بعبارت دیگر؛

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(x)\,t^\nu \quad .$$

تابع $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$; $|t|<1$ تابع مولد چند جمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شود.

به کمک قضیه تابع مولد، می‌توان نتایج و گزاره‌های زیر را بدست آورد:

الف ـ $P_\nu(1) = 1$; $\nu \in Z^+$.

ب ـ $P_\nu(-1) = (-1)^\nu$; $\nu \in Z^+$.

ج ـ $P_{2\nu}(0) = (-1)^\nu \cdot \frac{1\times 3\times\cdots\times(2\nu-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2\nu} = (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}$; $\nu \in Z^+$ & $P_{2\nu+1}(0) = 0$.

ـ قضیه (تعامد لژاندر) مجموعه چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(x)$; $\nu \in Z^+$ نسبت به تابع وزن $\phi(x)=1$ در فاصله $[-1,1]$ متعامد هستند. بعبارت دیگر؛

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x)\,P_w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ;\nu \neq w \\ \int_{-1}^{1} P_\nu^2(x)\,dx = \frac{2}{2\nu+1} & ;\nu = w \end{cases}$$

نتیجه (تعامد لژاندر) با توجه به $P_0(x)=1$ و با فرض $\nu \in Z^+ - \{0\}$ داریم:

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_0(x)\,P_\nu(x)\,dx = 0$$

بعنوان مثال. ثابت کنید؛ $\int_0^1 P_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2\nu+1}$; $\nu \in Z^+$.

اثبات. از یک طرف طبق قضیه تعامد لژاندر داریم:

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x)\,P_\nu(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_\nu^2(x) = \frac{2}{2\nu+1} \quad ; \ (1)$$

از طرف دیگر؛

$$P_\nu(x) = \begin{cases} \nu = 2k; & \text{تابعی زوج} \\ \nu = 2k+1; & \text{تابعی فرد} \end{cases} \Rightarrow (P_\nu^2(x): \quad \text{(تابعی زوج}$$

$$\xrightarrow{(f:\ \text{تابعی زوج}) \Rightarrow \int_0^a f\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f\,dx} \int_0^1 P_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_\nu^2(x) \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} \int_0^1 P_\nu^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\nu+1}\right) = \frac{1}{2\nu+1}$$

یادآوری.

i) اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، در اینصورت؛ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

ii) اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، در اینصورت؛ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

ـ قضیه (بسط لژاندر ـ فوریه) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-1,1]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، و در نقاط ناپیوستگی، مشتق چپ و راست آن موجود باشد، در اینصورت در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در فاصله $(-1,1)$، می‌توان آن را برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر بصورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$ بسط داد، که در آن ضرائب a_ν از تساوی $a_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_\nu(x)\,dx$ بدست می‌آیند.

بعنوان مثال. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 0 \\ 2x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **را برحسب توابع لژاندر بسط دهیم، ضریب جمله سوم بسط را بدست آورید.**

حل. با توجه به اینکه بسط فوریه ـ لژاندر $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + \cdots$ از $\nu = 0$ شروع می‌شود، ضریب جمله سوم، برابر مقدار a_2 است که از تساوی $a_2 = \frac{2\times 2+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_2(x)\,dx$ بدست می‌آید. در اینصورت ابتدا به محاسبه $P_2(x)$ می پردازیم:

$$\xrightarrow{\text{فرمول رودریگز}} P_2(x) = \frac{1}{2^\nu \nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu \xrightarrow{\nu=2} P_2(x) = \frac{1}{2^2\,2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

در نتیجه؛

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{0} f(x)P_2(x)\,dx + \int_0^1 f(x)P_2(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{ضابطه تابع } f} a_2 = \frac{5}{2}\left(\int_{-1}^{0} x\times\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx + \int_0^1 (2x\times\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx\right) \Rightarrow a_2 = \frac{5}{16}$$

در پایان این بحث به ذکر برخی روابط در چند جمله‌ایهای لژاندر که به روابط بازگشتی معروفند می‌پردازیم:

الف ـ $(\nu+1)P_{\nu+1}(x) = (2\nu+1)xP_\nu(x) - \nu P_{\nu-1}(x)$; $\nu \ge 1$

ب ـ $(2\nu+1)P_\nu(x) = P'_{\nu+1}(x) - P'_{\nu-1}(x)$; $\nu \ge 1$

ج ـ $(x^2-1)P'_\nu(x) = \nu xP_\nu(x) - \nu P_{\nu-1}(x)$; $\nu \ge 1$

د ـ $P'_{\nu+1}(x) = xP'_\nu(x) + (\nu+1)P_\nu(x)$; $\nu \ge 1$

و ـ $xP'_\nu(x) = \nu P_\nu(x) + P'_{\nu-1}(x)$; $\nu \ge 1$

تذکر. معادله دیفرانسیل $\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi\frac{d\psi}{d\varphi}) + \lambda(\sin\varphi)\psi = 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$ که در حل معادلات پتانسیل، گرما و موج با آن برخورد می‌کنیم، با تغییر متغیر $x = \cos\varphi$ به معادله لژاندر $(1-x^2)\psi'' - 2x\psi' + \lambda\psi = 0$ تبدیل می‌شود.

مثال ۴۱. اگر معادلات دیفرانسیل $y'' - 2xy' + 6y = 0$ ***و*** $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ***به ترتیب دارای جواب‌هایی به صورت چند جمله‌ای*** $y_1(x)$ ***و*** $y_2(x)$ ***باشند داریم:***

۱) $\int_{-1}^{1} xy_1y_2dx = 0$

۲) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = \frac{1}{3}$

۳) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = 0$

۴) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = \frac{2}{3}$

☑ **حل.** گزینه «۳». با توجه به نمایش عمومی معادله لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0 \;;\; \nu\in Z^+$، معادله دیفرانسیل اول یک معادله لژاندر مرتبه $\nu=2$ و در نتیجه $y_1(x)$ همان چند جمله‌ای لژاندر $y_1(x)=P_2(x)$ و هم‌چنین معادله دیفرانسیل دوم نیز یک معادله لژاندر مرتبه $\nu=1$ و در نتیجه $y_2(x)$ نیز چند جمله‌ای لژاندر $y_2(x)=P_1(x)$ است. در اینصورت طبق قضیه تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر داریم: $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx=\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx=0$.

مثال ۴۲. *اگر معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$، دارای جوابی به صورت چند جمله‌ای $y_1(x)$ باشد، حاصل $\int_{-1}^{1}(x^2+y_1)^2dx$ کدام است؟*

۱) $\frac{24}{35}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{35}{24}$ ۴) $\frac{20}{35}$

☑ **حل.** گزینه «۱». معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل لژاندر از مرتبه $\nu=3$ و در نتیجه چند جمله‌ای $y_1(x)$، همان چند جمله‌ای $y_1(x)=P_3(x)$ می‌باشد. در اینصورت؛

$$I=\int_{-1}^{1}(x^2+y_1)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+P_3(x))^2dx=\int_{-1}^{1}(x^4+P_3^2(x)+2x^2P_3(x))\,dx \quad\Rightarrow$$

$$I=\underbrace{\int_{-1}^{1}x^4dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}P_3^2(x)dx}_{I_2}+2\underbrace{\int_{-1}^{1}x^2P_3(x)dx}_{I_3}$$

اکنون به محاسبه انتگرالهای فوق می‌پردازیم:

$$I_1=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{5} \qquad \&$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1}P_\nu^2(x)dx=\frac{2}{2\nu+1} \xrightarrow{\nu=3} I_2=\int_{-1}^{1}P_3^2(x)dx=\frac{2}{2\times3+1}=\frac{2}{7} \qquad \&$$

$$(x^2P_3(x):\ \text{تابعی فرد}) \Leftarrow (P_3(x):\ \text{تابعی فرد} \ \&\ x^2:\ \text{تابعی زوج})$$

$$\xrightarrow{(f(x):\ \text{تابعی فرد}\ \Rightarrow \int_{-a}^{a}f\,dx=0} I_3=\int_{-1}^{1}x^2P_3(x)dx=0$$

در نتیجه؛ $I=I_1+I_2+I_3=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+0=\frac{24}{35}$

مثال ۴۳. *اگر $P_m(x)$ و $P_n(x)$ چند جمله‌ایهای لژاندر باشند، کدامیک از روابط زیر درست است؟*

۱) $\int_{0}^{\pi}(P_m(\cos t))^2\sin tdt=\frac{2}{2m+1}$ ۲) $\int_{-1}^{1}(P_m(\cos t))^2\sin tdt=\frac{2}{2m+1}$

۳) $m\neq n$ هرگاه $\int_{0}^{\pi}P_m(\cos t)P_n(\cos t)dt=0$ ۴) $m\neq n$ هرگاه $\int_{-1}^{1}P_m(\cos t)P_n(\cos t)dt=0$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\begin{cases}\cos t=x \Rightarrow -\sin t\,dt=dx\\ \begin{array}{c|cc} t & 0 & \pi\\ \hline (x=\cos t) & 1 & -1\end{array}\end{cases} \Rightarrow \int_{0}^{\pi}(P_m(\cos t))^2\sin t\,dt=\int_{1}^{-1}P_m^2(x)(-dx)=\int_{-1}^{1}P_m^2(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر: } \int_{-1}^{1}P_\nu^2(x)dx=\frac{2}{2\nu+1}} \int_{0}^{\pi}(P_m(\cos t))^2\sin t\,dt=\frac{2}{2m+1}$$

مثال ۴۴. *حاصل $\int_{0}^{1}P_{100}^2(x)\,dx$ کدام است؟*

۱) $\frac{1}{201}$ ۲) $\frac{2}{201}$ ۳) $\frac{1}{101}$ ۴) $\frac{2}{101}$

☑ **حل.** گزینه «۱». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1}P_\nu^2(x)\,dx=\frac{2}{2\nu+1} \xrightarrow{\nu=100} \int_{-1}^{1}P_{100}^2(x)\,dx=\frac{2}{201} \quad ;(1)$$

از طرف دیگر؛

$$(P_{100}(x):\ \text{تابعی زوج}) \Rightarrow (P_{100}^2(x):\ \text{تابعی زوج})$$

$$\xrightarrow{(f:\ \text{تابعی زوج})\ \Rightarrow \int_{0}^{a}f\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f\,dx} \int_{0}^{1}P_{100}^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_{100}^2(x)\,dx \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} \int_{0}^{1}P_{100}^2(x)\,dx=\frac{1}{201}$$

لازم بذکر است، در حالت کلی نیز ثابت کردیم:

$$\int_{0}^{1}P_\nu^2(x)\,dx=\frac{1}{2\nu+1} .$$

مثال ۴۵. *حاصل $\int_{-1}^{1}(x-x^3)P_{2n}(x)\,dx$ کدام است که در آن $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد؟*

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۲». می‌دانیم چند جمله‌ایهای لژاندر از مرتبه زوج، توابعی زوج هستند. در اینصورت؛

$$(x-x^3:\ \text{تابعی فرد} \ \&\ P_{2n}(x):\ \text{تابعی زوج}) \Rightarrow ((x-x^3)P_{2n}(x):\ \text{تابعی فرد})$$

$$\xrightarrow{(f:\ \text{تابعی فرد})\ \Rightarrow \int_{-a}^{a}f\,dx=0} \int_{0}^{1}(x-x^3)P_{2n}(x)\,dx=0$$

مثال ۴۶. *اگر $P_7(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشد، مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}(1+x)P_7(x)\,dx$ با شرط $n\neq 7$ کدام است؟*

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۱». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{w\neq v\ ;\ \text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} P_w(x)P_v(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{w=0\ \&\ v\neq 0} \int_{-1}^{1} P_0(x)P_v(x)\,dx = 0 \\ \xrightarrow{w=1\ \&\ v\neq 1} \int_{-1}^{1} P_1(x)P_v(x)\,dx = 0 \end{cases} ;\ (1)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرمول رودریگز، می‌توان تساویهای $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ را بدست آورد. در اینصورت؛

$$I=\int_{-1}^{1}(1+x)P_v(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(P_0(x)+P_1(x)P_v(x)\,dx=\int_{-1}^{1}P_0(x)P_v(x)\,dx+\int_{-1}^{1}P_1(x)P_v(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساویهای (۱)}\ ;\ v\neq 0,1} I=0$$

مثال ۴۷. *اگر $P_n(x)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی n یک چند جمله‌ای لژاندر باشد، آنگاه حاصل $\int_{-1}^{1}(x^2-2x^2)P_{2n+1}(x)\,dx$ کدام است؟*

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) صفر

☑ **حل.** گزینه «۴». می‌دانیم چند جمله‌ایهای لژاندر از مرتبه فرد، توابعی فرد هستند:

$$(x^4-2x^2:\ \text{تابعی زوج}\ \ \&\ \ P_{2n+1}(x):\ \text{تابعی فرد}) \Rightarrow ((x^4-2x^2)P_{2n+1}(x):\ \text{تابعی فرد})$$

$$\xrightarrow{\int_{-a}^{a} f\,dx=0\ (f:\ \text{تابعی فرد}) \Rightarrow} \int_{-1}^{1}(x^4-2x^2)P_{2n+1}(x)\,dx=0$$

مثال ۴۸. *اگر $P_v(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشد، مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1}(x^2+x)P_v(x)\,dx$ با شرط $v\neq 0,1,2$ کدام است؟*

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۳». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{w\neq v\ ;\ \text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} P_w(x)P_v(x)\,dx \quad \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{w=1\ \&\ v\neq 1} \int_{-1}^{1} P_1(x)P_v(x)\,dx = 0 \\ \xrightarrow{w=2\ \&\ v\neq 2} \int_{-1}^{1} P_2(x)P_v(x)\,dx = 0 \end{cases} ;\ (1)$$

$$\xrightarrow{v\neq 0\ ;\ \text{نتیجه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} P_v(x)\,dx = 0 \quad ;\ (2)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرمول رودریگز، می‌توان تساویهای $P_1(x)=x$ و $(P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ \Rightarrow x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{2}$، را بدست آورد. در اینصورت؛

$$I=\int_{-1}^{1}(x^2+x)P_v(x)=\int_{-1}^{1}((\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3})+P_1(x))P_v(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{2}{3}P_2(x)P_v(x)+\frac{1}{3}P_v(x)+P_1(x)P_v(x)dx) \Rightarrow$$

$$I=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_v(x)\,dx+\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}P_v(x)\,dx+\int_{-1}^{1}P_1(x)P_v(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساویهای (۱) و (۲)}\ ;\ v\neq 0,1,2} I=0$$

مثال ۴۹. *فرض کنید $f(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ بصورت یک چند جمله‌ای با شرط $f(1)=1$ باشد. در اینصورت کدام گزینه نادرست است؟*

۱) $f(0)=0$ ۲) $f(-1)=-1$ ۳) $\int_{0}^{1} f^2(x)\,dx=\frac{1}{7}$ ۴) $f''(0)=5$

☑ **حل.** گزینه «۴». با توجه به تساوی $(1-x^2)y''-2xy'+12y=(1-x^2)y''-2xy'+(3\times 4)y=0$، معادله دیفرانسیل مفروض، معادله لژاندر از مرتبه $v=3$ و با توجه به شرط اولیه $f(1)=1$، $f(x)$ در واقع چند جمله‌ای لژاندر $P_3(x)$ است. در اینصورت، طبق ویژگیهای توابع لژاندر داریم:

۱) $P_{2v+1}(0)=0 \quad ;v\in Z^+ \xrightarrow{v=1} f(0)=P_3(0)=0$

۲) $P_v(-1)=(-1)^v \quad ;v\in Z^+ \xrightarrow{v=3} f(-1)=P_3(-1)=(-1)^3=-1$

۳) $\int_{0}^{1} P_v^2(x)\,dx=\frac{1}{2v+1} \quad ;v\in Z^+ \xrightarrow{v=3} \int_{0}^{1} f^2(x)\,dx=\int_{0}^{1} P_3^2(x)\,dx=\frac{1}{2\times 3+1}=\frac{1}{7}$

بنابراین تنها گزینه (۴) می‌تواند نادرست باشد. برای بررسی کاملتر؛

$$\xrightarrow{\text{فرمول رودریگز}} P_v(x)=\frac{1}{2^v\,v!}\cdot\frac{d^v}{dx^v}(x^2-1)^v \xrightarrow{v=3} P_3(x)=\frac{1}{2^3\,3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 \Rightarrow$$

$$f(x)=P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \Rightarrow f''(0)=0\neq 5$$

مثال ۵۰. *اگر تابع $f(x)=\sin\pi x$ را برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر بصورت $f(x)=\sum_{v=0}^{\infty} a_v P_v(x)$ بسط دهیم، مجموع ضرائب دو چند جمله‌ای $P_1(x)$ و $P_2(x)$ کدام است؟*

۱) $\frac{3}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{4}{3\pi}$ ۴) صفر

☑ **حل.** گزینه «۱». طبق ضابطه بسط لژاندر ـ فوریه $f(x)=\sum_{v=0}^{\infty} a_v P_v(x)$، محاسبه a_1+a_2 مطلوب است. بنابراین با توجه به تساوی $a_v=\frac{2v+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_v(x)\,dx$ داریم:

$$\text{i)}\ a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx \xrightarrow{P_1(x)=x\ \&\ f(x)=\sin\pi x} a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \sin\pi x\times x\,dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin\pi x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du} a_1=\frac{3}{2}[(x\times-\frac{1}{\pi}\cos\pi x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx]=\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\pi x\,dx) \Rightarrow$$

$$a_1=\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\Big|_{-1}^{1})=\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}+0) \Rightarrow a_1=\frac{3}{\pi} \quad ;(1) \quad \&$$

ii) $a_۲ = \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_۲(x)\,dx \xrightarrow{f(x)=\sin \pi x} a_۲ = \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} \sin \pi x\, P_۲(x)\,dx$

در اینصورت؛

$(\sin \pi x$: تابعی فرد & $P_۲(x)$: تابعی زوج) $\Rightarrow$ $(\sin \pi x\, P_۲(x)$: تابعی فرد)

$\xrightarrow{(f:\ \text{تابعی فرد}\ \Rightarrow \int_{-a}^{a} f\,dx=۰)} a_۲ = \frac{۵}{۲}\int_{-۱}^{۱} \sin \pi x\, P_۲(x)\,dx = ۰$; (۲)

در نتیجه با توجه به تساویهای (۱) و (۲) مجموع ضرائب دو چند جمله‌ای $P_۱(x)$ و $P_۲(x)$ در بسط لژاندر ـ فوریه $f(x) = \sin \pi x$ برابر مقدار $a_۱ + a_۲ = \frac{۳}{\pi} + ۰ = \frac{۳}{\pi}$ محاسبه می‌شود.

تابع گاما

پیش از آنکه وارد بحث بعدی شویم، ابتدا به معرفی تابع گاما می‌پردازیم.

تعریف. تابع $\Gamma(\alpha) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t}\,t^{\alpha-۱}\,dt$ برای هر $\alpha > ۰$ تابع گاما نامیده می‌شود.

بعنوان مثال؛

$$\Gamma(۱) = \int_{۰}^{\infty} e^{-t}\,t^{۰}\,dt = \int_{۰}^{\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_{۰}^{T} e^{-t}\,dt = \lim_{T\to\infty}(-e^{-t})\Big|_{۰}^{T} = ۱ \quad \Rightarrow \quad \Gamma(۱) = ۱$$

چند نکته در مورد توابع گاما.

ـ به کمک روش جزء به جزء در انتگرالگیری می‌توان ثابت کرد؛ $\Gamma(\alpha+۱) = \alpha\Gamma(\alpha)$; $\alpha > ۰$.

در اینصورت اگر $\alpha = n$ یک عدد طبیعی فرض شود با استفاده متوالی از تساوی فوق داریم:

$$\Gamma(n+۱) = n\Gamma(n) = n\times(n-۱)\Gamma(n-۱) = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times ۱\Gamma(۱)$$

$\xrightarrow{\Gamma(۱)=۱}$ $\Gamma(n+۱) = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times ۱ = n!$

بعنوان مثال؛ $\Gamma(۵) = ۴! = ۲۴$ & $\Gamma(۳) = ۲! = ۲$.

از آنجائیکه به ازاء $n \in N$ تابع گاما مولد فاکتوریل است، در حالت کلی نیز آن را تابع فاکتوریل نامیده و به ازاء هر $\alpha > ۰$ تابع گاما را با تساوی $\Gamma(\alpha+۱) = \alpha!$ نمایش می‌دهند.

با استفاده از تعاریف فوق، می‌توان نتایج زیر را بدست آورد:

الف ـ $\Gamma(۱) \xrightarrow{\Gamma(۱)=۱} ۰! = ۱$.

ب ـ با توجه به تعریف تابع $\Gamma(\alpha)$ و محاسبه انتگرال مورد نظر مقدار $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ بدست می‌آید.

در اینصورت؛

۱) $\Gamma(\frac{۳}{۲}) = \Gamma(\frac{۱}{۲}+۱) \xrightarrow{\Gamma(\alpha+۱)=\alpha\Gamma(\alpha)} \Gamma(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{۳}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

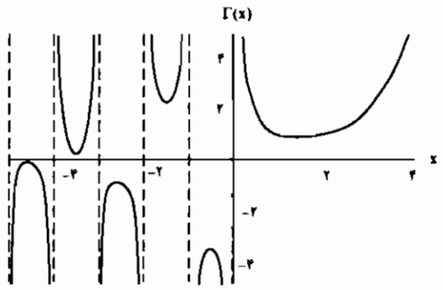
۲) $\Gamma(\frac{۵}{۲}) = \Gamma(\frac{۳}{۲}+۱) = \frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۳}{۲}) \xrightarrow{\Gamma(\frac{۳}{۲})=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}} \Gamma(\frac{۵}{۲}) = \frac{۳}{۲}\times\frac{\sqrt{\pi}}{۲} = \frac{۳\sqrt{\pi}}{۴}$

هم‌چنین برای محاسبه مقادیر منفی و غیرصحیح α می‌توان از تساوی $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\alpha}$ استفاده کرد:

۳) $\Gamma(-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\alpha}} \Gamma(-\frac{۱}{۲}) = \frac{\Gamma(-\frac{۱}{۲}+۱)}{-\frac{۱}{۲}} = \frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{-\frac{۱}{۲}} \xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}} \Gamma(-\frac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{۱}{۲}} = -۲\sqrt{\pi}$

۴) $\Gamma(-\frac{۳}{۲}) = \frac{\Gamma(-\frac{۳}{۲}+۱)}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{\Gamma(-\frac{۱}{۲})}{-\frac{۳}{۲}} \xrightarrow{\Gamma(-\frac{۱}{۲})=-۲\sqrt{\pi}} \Gamma(-\frac{۳}{۲}) = \frac{-۲\sqrt{\pi}}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\pi}$

لازم بذکر است، برای مقادیر صحیح و منفی α، قابل تعریف نیست.



ـ تابع گاما در ریاضیات کاربردهای متنوعی دارد. یک نمونه از کاربردهای مهم آن در محاسبه انتگرالها می‌باشد.

بعنوان مثال. ثابت کنید؛ $\int_{۰}^{۱} (-Lnx)^{\alpha}\,dx = \Gamma(\alpha+۱)$.

اثبات.

$$I = \int_{۰}^{۱} (-Lnx)^{\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to ۰}\int_{\varepsilon}^{۱} (-Lnx)^{\alpha}\,dx \xrightarrow{t=-Lnx} I = \lim_{T\to+\infty}\int_{T}^{۰} t^{\alpha}(-e^{-t})\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = -Lnx \ \Rightarrow\ x = e^{-t} \ \Rightarrow\ dx = -e^{-t}\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & \varepsilon\to ۰^{+} & ۱ \\ \hline t(=-Lnx) & T\to+\infty & ۰ \end{array} \end{cases}$$

$$I = -\int_{+\infty}^{۰} t^{\alpha}e^{-t}\,dt = \int_{۰}^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha}\,dt \xrightarrow{\text{تعریف تابع } \Gamma(\alpha)} I = \int_{۰}^{۱} (-Lnx)^{\alpha}\,dx = \Gamma(\alpha+۱)$$

مثال ۵۱. حاصل انتگرال $\int_{۰}^{\infty} x^{۳}e^{-x}\,dx$ ***کدام است؟***

۱) ۶ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۴) ۲۴

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$I = \int_{۰}^{\infty} x^{۳}e^{-x}\,dx = \int_{۰}^{\infty} e^{-x}x^{۴-۳}\,dx \xrightarrow{\int_{۰}^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-۱}\,dx=\Gamma(\alpha)} I = \Gamma(۴) = ۳! = ۶$$

مثال ۵۲. چنانچه $\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du$ باشد، مقدار $\dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) $2\sqrt{\pi}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل. گزینه «۴». با توجه به تساوی $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ داریم:

$$\Gamma(\tfrac{5}{2})=\Gamma(\tfrac{3}{2}+1)=\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}+1)=\tfrac{3}{2}\times\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\ \Rightarrow\ \Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{3}{4}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

در اینصورت؛

$$A=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{3}{4}\Gamma(2)\xrightarrow{\Gamma(2)=1!}A=\frac{3}{4}$$

مثال ۵۳. مطلوبست محاسبه $\int_0^\infty e^{-2x}x^n dx \quad ;\ n\in IN$.

۱) $\frac{n!}{2^n}$ ۲) $\frac{n!}{2^{n+1}}$ ۳) ۱ ۴) صفر

حل. گزینه «۲».

$$I=\int_0^\infty e^{-2x}x^n\,dx$$

$$\xrightarrow{2x=t\ \Rightarrow\ 2dx=dt} I=\int_0^\infty e^{-t}(\frac{t}{n})^n(\frac{dt}{2})=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\Gamma(\alpha)} I=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\Gamma(n+1)\xrightarrow{\Gamma(n+1)=n!}I=\frac{n!}{2^{n+1}}$$

مثال ۵۴. مطلوبست محاسبه $\int_0^1 x^k(Lnx)^n dx \quad ;\ n\in IN$.

۱) $\frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$ ۲) صفر ۳) $(-1)^n\frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$ ۴) $(-1)^{n+1}\frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$

حل. گزینه «۳».

$$I=\int_0^1 x^k(Lnx)^n dx$$

$$\xrightarrow{x=e^{-u}\ \Rightarrow\ dx=-e^u du} I=\int_{+\infty}^0 e^{-ku}(Lne^{-u})^n(-e^{-u}du)=\int_0^{+\infty}e^{-ku}(-u)^n e^{-u}du\quad\Rightarrow$$

$$I=(-1)^n\int_0^\infty e^{-(k+1)u}\,u^n\,du$$

$$\xrightarrow{(k+1)u=t\ \Rightarrow\ (k+1)du=dt} I=(-1)^n\int_0^\infty e^{-t}(\frac{t}{k+1})^n(\frac{dt}{k+1})=\frac{(-1)^n}{(k+1)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt\quad\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\Gamma(\alpha)} I=\frac{(-1)^n}{(k+1)^{n+1}}\cdot\Gamma(n+1)\quad\Rightarrow\ I=\frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$$

مثال ۵۵. مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(tagx+tag^3x)e^{-tagx}dx$.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

حل. گزینه «۲».

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(tagx+tag^3x)e^{-tagx}\,dx$$

$$\xrightarrow{t=tagx\ \Rightarrow\ dt=(1+tag^2x)dx} I=\int_0^\infty t(1+tag^2x)e^{-t}(\frac{dt}{1+tag^2x})=\int_0^\infty e^{-t}t\,dt$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\Gamma(\alpha)} I=\Gamma(2)=1!=1$$

معادله دیفرانسیل بسل و توابع بسل

تعریف. معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=0$ که در آن $\lambda\geq 0$ یک عدد حقیقی ثابت است، معادله بسل نامیده می‌شود.

همانگونه که مشخص است، توابع $a_2(x)=x^2$ و $a_1(x)=x$ و $a_0(x)=x^2-\lambda^2$ در نقطه $x_0=0$ تحلیلی هستند و از آنجائیکه $a_2(0)=0$ و حدود ۱ $p_0=\lim_{x\to 0}x.\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ و $q_0=\lim_{x\to 0}x^2.\frac{a_0(x)}{a_2(x)}=-\lambda^2$ موجود و متناهی می‌باشند، در نتیجه نقطه مذکور یک نقطه غیرعادی منظم است و معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\lambda^2=0$، دارای دو ریشه $r_1=\lambda$ و $r_2=-\lambda$ می‌باشد.

در اینصورت، طبق قضیه $\overline{II}$. یک جواب معادله بسل، یک سری فروبینوسی متناظر با ریشه بزرگتر $r_1=\lambda\geq 0$ و با نمایش $y_1(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^\infty a_n(\lambda)\ x^n$ می‌باشد. در مورد معادله بسل احکام زیر قابل بررسی است:

ـ فرمول بازگشتی متناظر معادله بسل بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0\neq 0\ ,\ a_1=0\quad\&\quad a_n(\lambda)=-\frac{1}{n(n+2\lambda)}a_{n-2}(\lambda)\qquad ;n\geq 2$$

ـ با فرض $a_0=\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)}$، جواب $y_1(x)$ که معمولاً با نماد $J_\lambda(x)$ نمایش داده می‌شود بصورت زیر بدست می‌آید:

$$J_\lambda(x)=x^\lambda\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{2^{2k+\lambda}k!\Gamma(\lambda+k+1)}x^{2k}=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\lambda+k+1)}.(\frac{x}{2})^{2k+\lambda}$$

ـ شعاع همگرایی سری جواب عمومی معادله بسل حول نقطه $x_0=0$، به کمک آزمون دالامبر و با توجه به فرمول بازگشتی متناظر بدست می‌آید:

$$\xrightarrow{\text{فرمول بازگشتی بسل}} a_n(\lambda)=-\frac{1}{n(n+2\lambda)}a_{n-2}(\lambda)\xrightarrow{\text{آزمون دالامبر}}\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(\lambda)}{a_{n-2}(\lambda)}\right|=\left|-\frac{1}{n(n+2\lambda)}\right|=0$$

در نتیجه شعاع همگرایی جواب عمومی معادله بسل $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=0 \quad ;\lambda\geq 0$، مجموعه تمام اعداد حقیقی است.

- برای محاسبه جواب مستقل دوم $y_2(x)$، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

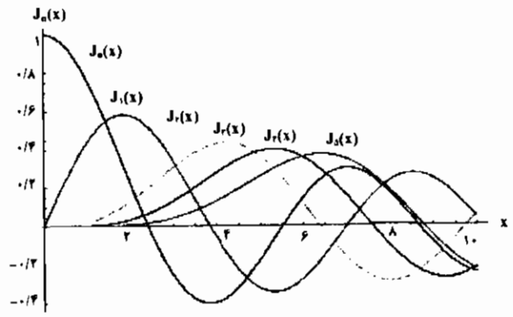
حالت اول. $\lambda \notin Z^+$ (λ مضرب فردی از $\frac{1}{2}$ نباشد.)؛ بعبارت دیگر تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = \lambda - (-\lambda) = 2\lambda$ یک عدد غیرصحیح است. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{II}$ ـ حالت اول. جواب مستقل دوم معادله بسل نیز یک سری فروبینوسی متناظر با ریشه $r_2 = -\lambda$ و با نمایش $y_2(x) = x^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)x^n$ می‌باشد. همانند جواب y_1 و با توجه به فرمول بازگشتی متناظر $a_n(\lambda) = -\frac{1}{n(n+2\lambda)}a_{n-2}(\lambda)$ و مفروض قراردادن $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$، جواب مستقل $y_2(x)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y_2(x) = x^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k-\lambda}\,k!\Gamma(k-\lambda+1)}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\lambda+1)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k-\lambda} \xrightarrow{\text{تعریف } J_\lambda(x)} y_2(x) = J_{-\lambda}(x)$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$، که در آن λ یک عدد حقیقی غیرصحیح و مثبت است با ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1J_\lambda(x) + c_2J_{-\lambda}(x) \quad .$$

تعریف. تابع $J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k+\lambda}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ که در مجموعه تمام اعداد حقیقی همگراست، تابع بسل نوع اول مرتبه λ نامیده می‌شود.



حالت دوم. $\lambda = 0$؛ در اینصورت با جایگذاری $\lambda = 0$ در ضابطه عمومی معادله بسل، معادله بسل مرتبه صفر دارای نمایش $xy'' + y' + xy = 0$ می‌شود. در نتیجه جواب اول آن بصورت $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot(\frac{x}{2})^{2k}$ بدست می‌آید. از طرف دیگر، با فرض $\lambda = 0$ ریشه‌های شاخصی برابر مقدار مضاعف $r_1 = r_2 = 0$ می‌شوند، که در اینصورت طبق قضیه $\overline{II}$ ـ حالت دوم. جواب مستقل دوم معادله بسل مرتبه صفر، دارای طبیعت لگاریتمی است و با مفروض قراردادن $a_0 = 1$ می‌توان بررسی کرد جواب $y_2(x)$ از ضابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y_2(x) = J_0(x)\,\mathrm{Ln}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\varphi(k)}{(k!)^2}\cdot(\frac{x}{2})^{2k} \qquad ;\varphi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله بسل مرتبه صفر $xy'' + y' + xy = 0$ دارای نمایشی بصورت زیر است:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1J_0(x) + c_2\left(J_0(x)\,\mathrm{Ln}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\varphi(k)}{(k!)^2}\cdot(\frac{x}{2})^{2k}\right)$$

حالت سوم. $\lambda = \nu \in Z^+ - \{0\}$؛ در اینصورت با جایگذاری $\lambda = \nu$ در ضابطه عمومی معادله بسل، معادله بسل مرتبه صحیح ومثبت ν، دارای نمایش $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu)y = 0$ می‌شود. در نتیجه جواب اول آن، با توجه به مقدار تابع گاما در اعداد صحیح مثبت، بصورت $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\cdot(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$ بدست می‌آید. از طرف دیگر، با فرض $\lambda = \nu \in Z^+ - \{0\}$، تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = 2\nu$ برابر یک عدد صحیح غیرصفر می‌شود، در اینصورت طبق قضیه $\overline{II}$. حالت سوم. و انجام یک سری محاسبات جهت ساده‌نویسی، جواب مستقل دوم معادله بسل مرتبه صحیح و مثبت ν را از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\left((\mathrm{Ln}\frac{x}{2} + \gamma)J_\nu(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-k-1)!}{k!}\cdot(\frac{x}{2})^{2k-\nu} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\varphi(k)+\varphi(k+\nu))}{k!(k+\nu)!}\cdot(\frac{x}{2})^{2k+\nu}\right)$$

که در آن مقدار $\gamma \simeq 0/5772156649$ به ثابت اویلر ـ ما چرونی معروف است.

در نتیجه جواب عمومی معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$; $\nu \in Z^+ - \{0\}$ از ضابطه زیر محاسبه می‌شود:

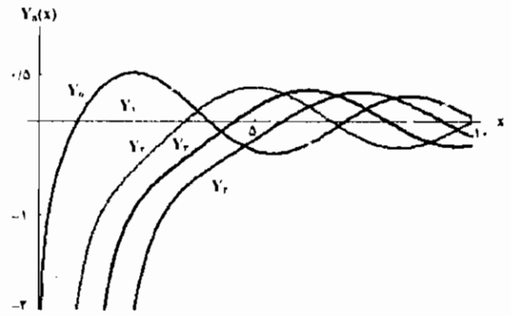
$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$$

تذکر.

۱ـ با جایگذاری $\nu = 0$ در ضابطه $Y_\nu(x)$; $\nu \in Z^+ - \{0\}$ به تابع $Y_0(x)$ می‌رسیم که می‌توان بررسی کرد نمایش دیگری از جواب مستقل دوم معادله بسل مرتبه صفر است. در نتیجه جواب عمومی معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$; $\lambda \geq 0$ را می‌توان بصورت کلی زیر ارائه داد:

$$y = \begin{cases} c_1J_\lambda(x) + c_2J_{-\lambda}(x) & ;\lambda \notin Z^+ \\ c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x) & ;\lambda = \nu \in Z^+ \end{cases}$$

تعریف. تابع $Y_\nu(x)$; $\nu \in Z^+$ که در مجموعه تمام اعداد حقیقی همگراست، تابع نیومن و یا تابع بسل نوع دوم مرتبه ν نامیده می‌شود.



۲ـ همانگونه که در تذکر ۱. نیز دیدیم، جواب دوم مستقل معادله بسل مرتبه λ، به دو صورت $J_{-\lambda}(x)$ و $Y_\nu(x)$ متفاوت بیان شده است. اکنون شکلی از جواب دوم را ارائه می‌دهیم که به ازاء همه مقادیر حقیقی λ برقرار می‌باشد:

$$\begin{cases} \text{i)}\ Y_\lambda(x) = \dfrac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi} & ;\lambda \notin Z^+ \\ \text{ii)}\ Y_\nu(x) = \lim\limits_{\lambda\to\nu} Y_\lambda(x) & ;\nu \in Z \end{cases}$$

چند قضیه و گزاره در مورد توابع بسل.

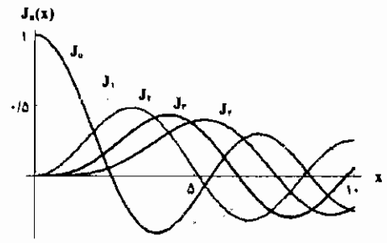
ـ **قضیه** (تعامد بسل). اگر ξ_n و ξ_m، صفرهای مثبت تابع بسل $J_\lambda(x)$ باشند، آنگاه:

$$\int_0^1 x J_\lambda(\xi_n x) J_\lambda(\xi_m x)\, dx = \begin{cases} 0 & ;n \neq m \\ \frac{1}{2} J_{\lambda+1}^2(\xi_n) & ;n = m \end{cases}$$

ـ **قضیه** (تابع مولد). توابع بسل $J_\nu(x)$; $\nu \in Z$ ، در واقع ضرائب t^ν در بسط تابع $g(x) = e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}$ است. بعبارت دیگر؛

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu(x) t^\nu .$$

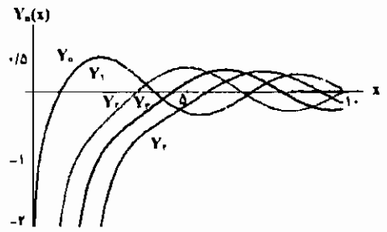
ـ با توجه به ضابطه $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \cdot (\frac{x}{2})^{2k+\nu}$; $\nu \in Z$ ، اگر ν عددی زوج باشد، آنگاه بسط مذکور، فقط شامل توانهای زوج x و در نتیجه هر تابع بسل نوع اول مرتبه زوج $J_{2\nu}(x)$، تابعی زوج است. و بهمین ترتیب هر تابع بسل نوع اول مرتبه فرد $J_{2\nu+1}(x)$، نیز تابعی فرد می‌باشد.



ـ اگر $\nu \in Z$ یک عدد صحیح باشد؛ $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

ـ توابع بسل توابعی نوسانی و میرا هستند.

ـ توابع بسل نوع اول $J_\lambda(x)$ در $x = 0$ کراندار و توابع بسل نوع دوم $Y_\nu(x)$ در $x = 0$ بی‌کران هستند.



ـ بین هر دو صفر متوالی $J_0(x)$ ، تابع $J_1(x)$ یک ریشه دارد و برعکس.
و بین هر دو صفر متوالی $Y_0(x)$ ، تابع $Y_1(x)$ یک ریشه دارد و برعکس.

ـ توابع بسل دارای بی‌نهایت ریشه هستند و فاصله بین صفرهای متوالی وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند به عدد π نزدیک می‌شود.

در پایان این بحث به ذکر برخی روابط حاکم بر توابع بسل نوع اول می‌پردازیم:

ـ روابط مشتقی؛

الف ـ $\frac{d}{dx}(x^\lambda J_\lambda(x)) = x^\lambda J_{\lambda-1}(x)$

ب ـ $\frac{d}{dx}(x^{-\lambda} J_\lambda(x)) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)$

ـ روابط انتگرالی؛

الف ـ $\int x^\lambda J_{\lambda-1}(x)dx = x^\lambda J_\lambda(x) + c$

ب ـ $\int x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)dx = -x^{-\lambda} J_\lambda(x) + c$

ج ـ $\int J_{\lambda+1}(x)dx = \int J_{\lambda-1}(x)dx - 2J_\lambda(x) + c$

ـ روابط بازگشتی؛

الف ـ $J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x) - J_{\lambda-1}(x)$

ب ـ $J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x) = J_{\lambda-1}(x) - 2J'_\lambda(x)$

ج ـ $J_{\lambda+1}(x) = \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - J'_\lambda(x)$

د ـ $J'_\lambda(x) = J_{\lambda-1}(x) - \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x)$

بعنوان مثال. مطلوبست محاسبه $\int J_3(x)dx$.

حل. از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\lambda=0;\ \text{روابط انتگرالی ـ ب}} \int J_1(x)dx = -J_0(x) + c_1 \qquad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\lambda=2;\ \text{روابط انتگرالی ـ ج}} \int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x) + c_2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (1)}} \int J_3(x)dx = -J_0(x) + c_1 - 2J_2(x) + c_2 \quad \Rightarrow$$

$$\int J_3(x)dx = -J_0(x) - 2J_2(x) + c \qquad ;(c = c_1 + c_2)$$

بعنوان مثال. تابع $J_3(x)$ **را برحسب توابع** $J_1(x)$ **و** $J_0(x)$ **بنویسید.**

حل. از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\text{روابط بازگشتی ـ الف}} \begin{cases} \xrightarrow{\lambda=2} J_3(x) = \frac{2\times 2}{x} J_2(x) - J_1(x) & ;(1) \\ \xrightarrow{\lambda=1} J_2(x) = \frac{2\times 1}{x} J_1(x) - J_0(x) & ;(2) \end{cases}$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\lambda=3;\ \text{روابط بازگشتی ـ الف}} J_4(x) = \frac{2\times 3}{x} J_3(x) - J_2(x) \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} J_4(x) = \frac{6}{x}(\frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x)) - J_2(x) \quad \Rightarrow$$

$$J_4(x) = (\frac{24}{x^2} - 1) J_2(x) - \frac{6}{x} J_1(x) \xrightarrow{\text{تساوی (2)}} J_4(x) = (\frac{24}{x^2} - 1)(\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)) - \frac{6}{x} J_1(x) \quad \Rightarrow$$

$$J_4(x) = (\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x}) J_1(x) - (\frac{24}{x^2} - 1) J_0(x)$$

بعنوان مثال. نشان دهید؛ $J'_0(x) = -J_1(x)$.

$$\xrightarrow{\lambda=0;\ \text{روابط بازگشتی ـ ج}} J_1(x) = -J'_0(x) \quad \Rightarrow \quad J'_0(x) = -J_1(x)$$

لازم بذکر است، روابطی مشابه بر تابع بسل نوع دوم نیز حاکم است.

اکنون به معرفی برخی از انواع معادلات دیفرانسیل که با اعمال تغییر متغیر به معادله بسل تبدیل می‌شوند، می‌پردازیم:

ضابطه جواب عمومی	بسل مرتبه	تغییر متغیر	معادله دیفرانسیل
$y = c_1 J_\lambda(\sqrt{x}) + c_2 Y_\lambda(\sqrt{x})$	λ	$t = \sqrt{x}$	$4x^2y'' + 4xy' + (x - \lambda^2)y = 0 \quad ;\lambda \geq 0$
$y = c_1 J_\lambda(\xi x) + c_2 Y_\lambda(\xi x)$	λ	$t = \xi x$	$x^2y'' + xy' + (\xi^2 x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad ;\lambda \geq 0$
$y = c_1 J_\lambda(x^2) + c_2 Y_\lambda(x^2)$	λ	$t = x^2$	$x^2y'' + xy' + 4(x^4 - \lambda^2)y = 0 \quad ;\lambda \geq 0$
$y = c_1 J_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}})$	$\lambda = 2\xi$	$t = 2e^{\frac{x}{2}}$	$y'' + (e^x - \xi^2)y = 0 \quad ;\xi \geq 0$
$y = x\,(c_1 J_{\lvert\xi\rvert}(x) + c_2 Y_{\lvert\xi\rvert}(x))$	$\lambda = \lvert\xi\rvert$	$y = x^{-\xi}u$	$xy'' + (1+2\xi)y' + xy = 0 \quad ;\xi \in \mathbb{R}$
$y = \sqrt{x}\,(c_1 J_{\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}}(x) + c_2 Y_{\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}}(x))$	$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \xi}$	$y = \sqrt{x}\,u$	$x^2y'' + (x^2 + \xi)y = 0 \quad ;\xi \leq \frac{1}{4}$

بعنوان مثال. معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (\xi^2x^2 - \lambda^2)y = 0 \;;\lambda \geq 0$ با اعمال تغییر متغیر $t = \xi x$ به معادله بسل مرتبه λ تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 J_\lambda(\xi x) + c_2 Y_\lambda(\xi x)$ محاسبه می‌گردد.

مثال ۵۶. *اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جواب معادله بسل $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ باشد، آنگاه مقدار r برابر است با:*

۱) $r = \pm\nu$ ۲) $r = \nu, \nu - 1$ ۳) $r = \pm\nu$ ۴) $r = \nu, \nu + 1$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{a_2(0)=0} \left(p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x} = 1 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2\right)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \nu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\nu$$

مثال ۵۷. *مقدار انتگرال $\int x^3 J_0(x)\,dx$ برحسب توابع بسل کدام است؟*

۱) $x^3J_1 - 2x^2J_2 + c$ ۲) $x^3J_1 + 2x^2J_2 + c$ ۳) $x^3J_1 - x^2J_2 + c$ ۴) $x^3J_1 + x^2J_2 + c$

☑ **حل.** گزینه «۱»، از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ الف.}} \int x^\lambda J_{\lambda-1}(x)\,dx = x^\lambda J_\lambda(x) + c \xrightarrow{\lambda=2} \int x^2 J_1(x)\,dx = x^2 J_2(x) + c$$

در اینصورت؛

$$\int x^3 J_0(x)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{x J_0(x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \int x J_0(x)\,dx \xrightarrow{\lambda=1;\ \text{روابط انتگرالی ـ الف.}} v = x J_1(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \int x^3 J_0(x)\,dx = x^2 . x J_1(x) - \int x J_1(x).2x\,dx = x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \int x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2(x^2 J_2(x) + c) \quad \Rightarrow \quad \int x^3 J_0(x)\,dx = x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C$$

مثال ۵۸. *مقدار انتگرال $\int x J_2(x)\,dx$ برحسب توابع بسل کدام است؟*

۱) $x J_1 - 2J_0 + c$ ۲) $x^2 J_1 - 2J_0 + c$ ۳) $x^2 J_1 + 2J_0 + c$ ۴) $-x J_1 - 2J_0 + c$

☑ **حل.** گزینه «۱»، از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ ب.}} \int x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x)\,dx = -x^{-\lambda} J_\lambda(x) + c \xrightarrow{\lambda=0} \int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + c$$

در اینصورت؛

$$\int x J_2(x)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{x^{-1} J_2(x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \int x^{-1} J_2(x)\,dx \xrightarrow{\lambda=1;\ \text{روابط انتگرالی ـ ب.}} v = -x^{-1} J_1(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \int x J_2(x)\,dx = x^2.(-x^{-1} J_1(x)) - \int -x^{-1} J_1(x).2x\,dx = -x J_1(x) + 2\int J_1(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} \int x J_2(x)\,dx = -x J_1(x) + 2(-J_0(x) + c) = -x J_1(x) - 2J_0(x) + C$$

مثال ۵۹. *با توجه به رابطه موجود بین توابع بسل نوع اول $J_n(r)\ (n \in Z)$ مقدار انتگرال $\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr$ چقدر است؟*

۱) $J_2(1)$ ۲) $J_0(1)$ ۳) $J_1(1) - J_2(1)$ ۴) $J_0(1) - J_1(1)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ الف.}} \int r^\lambda J_{\lambda-1}(r)dr = r^\lambda J_\lambda(r) + c \xrightarrow{\lambda=2} \int_0^1 r^2 J_1(r)dr = r^\lambda J_2(r)\Big|_0^1 = J_2(1)$$

مثال ۶۰. *انتگرال $\int x^4 J_1(x)\,dx$ برابر است با:*

۱) $x^4J_2 - 2x^3J_3 + c$ ۲) $x^4J_2 + 2x^3J_3 + c$ ۳) $x^2J_2 + 2x^4J_3 + c$ ۴) $x^4J_2 + 2x^3J_3 + c$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ الف.}} \int x^\lambda J_{\lambda-1}(x)dx = x^\lambda J_\lambda(x) \quad \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\lambda=2} \int x^2 J_1(x)dx = x^2 J_2(x) + c; & (1) \\ \xrightarrow{\lambda=3} \int x^3 J_2(x)dx = x^3 J_3(x) + c; & (2) \end{cases}$$

$$\int x^4 J_1(x)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(x^2 J_1(x))\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \int x^2 J_1(x)\,dx \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} v = x^2 J_2(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=uv-\int vdu} \int x^{۴}J_{۱}(x)dx = x^{۲}(x^{۲}J_{۲}(x)) - \int x^{۲}J_{۲}(x)(۲x\ dx) = x^{۴}J_{۲}(x) - ۲\int x^{۳}J_{۲}(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (۲)}} \int x^{۴}J_{۱}(x)dx = x^{۴}J_{۲}(x) - ۲x^{۳}J_{۳}(x) + c$$

مثال ۶۱. *با توجه به روابط موجود بین توابع بسل $J_n(x)\ (n \in Z)$، انتگرال $\int_{۰}^{۱} x(۱-x^{۲})\,J_{۰}(x)\,dx$ برابر است با:*

۱) $۲J_{۲}(۱)$ ۲) $J_{۱}(۱)$ ۳) $J_{۱}(۱) - J_{۰}(۰)$ ۴) $۲J_{۲}(۱) - J_{۱}(۱)$

☑ **حل.** گزینه «۱». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ الف}} \int x^{\lambda}J_{\lambda-۱}(x)dx = x^{\lambda}J_{\lambda}(x) + c \quad \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\lambda=۱} \int xJ_{۰}(x)dx = xJ_{۱}(x) + c & ;(۱) \\ \xrightarrow{\lambda=۲} \int x^{۲}J_{۱}(x)dx = x^{۲}J_{۲}(x) + c & ;(۲) \end{cases}$$

از طرف دیگر؛

$$I = \int_{۰}^{۱} x(۱-x^{۲})J_{۰}(x)\ dx = \underbrace{\int_{۰}^{۱} x\,J_{۰}\,dx}_{I_{۱}} - \underbrace{\int_{۰}^{۱} x^{۲}\,J_{۰}\,dx}_{I_{۲}} \quad \Rightarrow I = I_{۱} - I_{۲} \quad ;(۳)$$

در اینصورت ابتدابه محاسبه انتگرالهای $I_{۱}$ و $I_{۲}$ می‌پردازیم:

i) $\xrightarrow{\text{با توجه به تساوی (۱)}} I_{۱} = \int_{۰}^{۱} x\,J_{۰}(x)\ dx = (xJ_{۱}(x))\Big|_{۰}^{۱} = J_{۱}(۱) - ۰ + c \xrightarrow{c=۰} \boxed{I_{۱} = J_{۱}(۱)}$

برای محاسبه $I_{۲}$ نیز ابتدا $\int x^{۳}J_{۰}(x)\,dx$ را حل می‌کنیم:

ii) $\int x^{۳}J_{۰}(x)\ dx = \underbrace{\int x^{۲}}_{u}\ \underbrace{(x\,J_{۰}(x))\,dx}_{dv}$

$$\begin{cases} du = ۲xdx \\ v = \int x\,J_{۰}(x)\ dx \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} v = x\,J_{۱}(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=uv-\int vdu} \int x^{۳}J_{۰}(x)dx = x^{۲}(xJ_{۱}(x)) - \int xJ_{۱}(x)(۲x)dx = x^{۳}J_{۱}(x) - ۲\int x^{۲}J_{۱}(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساوی (۲)}} \int x^{۳}J_{۰}(x)dx = x^{۳}J_{۱}(x) - ۲x^{۲}J_{۲}(x) + c$$

در نتیجه؛

$$I_{۲} = \int_{۰}^{۱} x^{۳}J_{۰}(x) = (x^{۳}J_{۱}(x) - ۲x^{۲}J_{۲}(x) + c)\Big|_{۰}^{۱} = (J_{۱}(۱) - ۲J_{۲}(۱)) - ۰ \quad \Rightarrow \boxed{I_{۲} = J_{۱}(۱) - ۲J_{۲}(۱)}$$

در اینصورت با توجه به تساوی (۳) بدست می‌آوریم:

$$I = \int_{۰}^{۱} x(۱-x^{۲})J_{۰}(x)\ dx = I_{۱} - I_{۲} = J_{۱}(۱) - (J_{۱}(۱) - ۲J_{۲}(۱)) \quad \Rightarrow \int_{۰}^{۱} x(۱-x^{۲})J_{۰}(x)\ dx = ۲J_{۲}(۱)$$

مثال ۶۲. *برای توابع بسل نوع اول داریم $\frac{d}{dx}(x^{-k}J_{k}(x)) = -x^{-k}J_{k+۱}(x)$ در اینصورت $\frac{d}{dx}(J_{k}(x))$ برابر است با:*

۱) $J_{k}(x) + kJ_{k+۱}(x)$ ۲) $\frac{k}{x}J_{k}(x) + \frac{۱}{x}J_{k+۱}(x)$

۳) $\frac{k}{x}J_{k}(x) - J_{k+۱}(x)$ ۴) $J_{k}(x) - \frac{k}{x}J_{k+۱}(x)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{روابط مشتقی توابع بسل ـ ب}} \frac{d}{dx}(x^{-k} \times J_{k}(x)) = -x^{-k}J_{k+۱}(x)$$

$$\xrightarrow{(uv)'=u'v-uv'} -kx^{-k-۱} \times J_{k}(x) + x^{-k} \times \frac{d}{dx}J_{k}(x) = -x^{-k}J_{k+۱}(x)$$

$$\xrightarrow{x^{k}\times(\text{طرفین تساوی})} -kx^{-۱}J_{k}(x) + \frac{d}{dx}J_{k}(x) = -J_{k+۱}(x) \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}J_{k}(x) = -J_{k+۱}(x) + \frac{k}{x}J_{k}(x)$$

مثال ۶۳. *با توجه به $J_{\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cos x$، مقدار $J_{\frac{۵}{۲}}(\pi)$ برابر است با:*

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{\pi^{۲}}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{\pi}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi^{۲}}$

☑ **حل.** گزینه «۲». از یک طرف؛

$$J_{\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x \xrightarrow{x=\pi} J_{\frac{۱}{۲}}(\pi) = \sqrt{\frac{۲}{\pi^{۲}}}\sin\pi \xrightarrow{\sin\pi=۰} J_{\frac{۱}{۲}}(\pi) = ۰ \quad ;(۱) \qquad \&$$

$$J_{-\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cos x \xrightarrow{x=\pi} J_{-\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi^{۲}}}\cos\pi \xrightarrow{\cos\pi=-۱} J_{-\frac{۱}{۲}}(x) = -\frac{\sqrt{۲}}{\pi} \quad ;(۲)$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\text{روابط بازگشتی توابع بسل ـ الف}} J_{\lambda-۱}(x) + J_{\lambda+۱}(x) = \frac{۲\lambda}{x}J_{\lambda}(x) \begin{cases} \xrightarrow{\lambda=\frac{۱}{۲}} J_{-\frac{۱}{۲}}(x) + J_{\frac{۳}{۲}}(x) = \frac{۱}{x}J_{\frac{۱}{۲}}(x) \\ \xrightarrow{\lambda=\frac{۳}{۲}} J_{\frac{۱}{۲}}(x) + J_{\frac{۵}{۲}}(x) = \frac{۳}{x}J_{\frac{۳}{۲}}(x) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=\pi\ \&\ \text{تساوی (۱)}} \begin{cases} J_{\frac{۱}{۲}}(\pi) + J_{\frac{۳}{۲}}(\pi) = ۰ \\ J_{\frac{۵}{۲}}(\pi) = \frac{۳}{\pi}J_{\frac{۳}{۲}}(\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad J_{\frac{۵}{۲}}(\pi) = -\frac{۳}{\pi}J_{-\frac{۱}{۲}}(\pi) \xrightarrow{\text{تساوی (۲)}} J_{\frac{۵}{۲}}(\pi) = -\frac{۳}{\pi} \times -\frac{\sqrt{۲}}{\pi} = \frac{۳\sqrt{۲}}{\pi^{۲}}$$

مثال ۶۴. *اگر $J_{\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\cos x$ باشد، حاصل $J_{-\frac{۳}{۲}}(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟*

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$ ۲) $-\frac{۲}{\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$ ۴) $\frac{۲}{\pi}$

☑ **حل.** گزینه «۲». از یک طرف؛

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})=\sqrt{\frac{4}{\pi^2}}\cos\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{2}=0} J_{-\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})=0 \quad ;(1) \quad \&$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})=\sqrt{\frac{4}{\pi^2}}\sin\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\sin\frac{\pi}{2}=1} J_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})=\sqrt{\frac{4}{\pi^2}}=\frac{2}{\pi} \quad ;(2)$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\text{روابط بازگشتی توابع بسل ـ الف}} J_{\lambda-1}(x)+J_{\lambda+1}(x)=\frac{2\lambda}{x}J_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda=-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(x)+J_{\frac{1}{2}}(x)=-\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2} \ \& \ \text{تساوی (۱)}} J_{-\frac{3}{2}}(\frac{\pi}{2})+J_{\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{2})=0 \xrightarrow{\text{تساوی (۲)}} J_{-\frac{3}{2}}(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}$$

مثال ۶۵. *چنانچه* $xy''+y'+xy=0$ *باشد، آنگاه:*

۱) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n n!}$

۲) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{4^n(n!)^2}$

۳) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n n!}$

۴) $y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n(n!)^2}$

☑ **حل.** گزینه «۲». معادله دیفرانسیل مفروض معادله بسل مرتبه صفر است، که یک جواب آن به صورت زیر می‌باشد:

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{x}{2})^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$$

مثال ۶۶. *تابع بسل از نوع اول:*

۱) پریودیک و میرا می‌باشد.
۲) میرا و نوسانی می‌باشد.
۳) پریودیک و منفرد می‌باشد.
۴) میرا و بصورت تابعی زوج می‌باشد.

☑ **حل.** گزینه «۲». طبق نکات اشاره شده در متن، تابع بسل نوع اول $J_\lambda(x)$، پریودیک نیست، اما میرا و نوسانی می‌باشد.

مثال ۶۷. *جواب معادله* $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$ *برحسب توابع بسل عبارت است از:*

۱) $c_1J_2(x)+c_2J_{-2}(x)$
۲) $c_1J_2(\sqrt{x})+c_2Y_2(\sqrt{x})$
۳) $c_1J_2(x)+c_2Y_2(x)$
۴) $c_1J_2(\sqrt{x})+c_2J_{-2}(\sqrt{x})$

☑ **حل.** گزینه «۳». معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه $\nu=2\in Z$ است، در نتیجه جواب عمومی آن به صورت $y=c_1J_2(x)+c_2Y_2(x)$ محاسبه می‌گردد.

مثال ۶۸. *کدامیک از توابع زیر جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است؟*

$$9x^2y''+9xy'+4(9x^4-1)y=0$$

۱) $y=J_2(x^2)$
۲) $y=J_{\frac{1}{3}}(x^2)$
۳) $y=J_2(x)$
۴) $y=J_{\frac{1}{3}}(x)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$9x^2y''+9xy'+4(9x^4-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2y''+xy'+4(x^4-\frac{1}{9})y=0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $x^2y''+xy'+4(x^4-\lambda^2)y=0$; $\lambda\geq 0$ است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر $t=x^2$، معادله مفروض به معادله بسل مرتبه $\lambda=\frac{1}{3}$ و جواب عمومی آن به صورت زیر برحسب توابع بسل محاسبه می‌شود:

$$y=c_1J_\lambda(x^2)+c_2Y_\lambda(x^2)=c_1J_{\frac{1}{3}}(x^2)+c_2Y_{\frac{1}{3}}(x^2) \xrightarrow{\lambda\notin Z \Rightarrow Y_\lambda(x)=J_{-\lambda}(x)} y=c_1J_{\frac{1}{3}}(x^2)+c_2J_{-\frac{1}{3}}(x^2)$$

مثال ۶۹. *معادله دیفرانسیل* $4x^2y''+4xy'+(8x^2-1)y=0$ *مفروض است. اگر* $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\sin x$ *و* $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\cos x$ *باشند، جواب عمومی معادله کدام است؟*

۱) $y=A\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+B\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$
۲) $y=A\frac{\sin\sqrt{2}x}{x}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{x}$
۳) $y=A\frac{\sin\sqrt{x}}{x}+B\frac{\cos\sqrt{x}}{x}$
۴) $y=A\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$4x^2y''+4xy'+(8x^2-1)y=0 \quad \Rightarrow \quad x^2y''+xy'+(2x^2-\frac{1}{4})y=0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $x^2y''+xy'+(\zeta^2x^2-\lambda^2)y=0$; $\lambda\geq 0$ است، در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $t=\zeta x=\sqrt{2}x$ و با فرض $\zeta=\sqrt{2}$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ به معادله بسل مرتبه λ تبدیل و جواب عمومی آن به صورت زیر برحسب توابع بسل بدست می‌آید:

$$y=c_1J_\lambda(\xi x)+c_2Y_\lambda(\xi x) \xrightarrow{\lambda=\frac{1}{2}\notin Z \ \Rightarrow \ Y_{\frac{1}{2}}=J_{-\frac{1}{2}}} y=c_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)$$

$$\xrightarrow{\text{تساویهای آمده در صورت مسأله}} y=c_1\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\sin(\sqrt{2}x)+c_2\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}x}}\cos(\sqrt{2}x) \quad \Rightarrow$$

$$y=(c_1\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}}})\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}+(c_2\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}}})\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y=A\frac{\sin\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}+B\frac{\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{x}}$$

مثال ۷۰. *جواب عمومی معادله* $y''+(x^2+\frac{3}{16})y=0$ *با تغییر متغیر* $y=x^{\frac{1}{2}}u$ *برحسب* u *کدام است؟*

۱) $y(x)=\sqrt{x}(c_1J_{\frac{1}{4}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{4}}(x))$
۲) $y(x)=\sqrt{x}(c_1J_4(x)+c_2Y_4(x))$
۳) $y(x)=x(c_1J_{\frac{1}{4}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{4}}(x))$
۴) $y(x)=\sqrt{x}(c_1J_{\frac{1}{2}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{2}}(x))$

حل. گزینه «۱». معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $x^2y''+(x^2+\xi)y=0\ ;\ \xi\le\frac{1}{4}$، با فرض $\xi=\frac{3}{16}$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $y=\sqrt{x}\ u$ به معادله بسل مرتبه $\lambda=\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3}{16}}=\frac{1}{4}$ تبدیل و جواب عمومی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y=\sqrt{x}\,(c_1J_{\frac{1}{4}}(x)+c_2Y_{\frac{1}{4}}(x)) \xrightarrow{\lambda=\frac{1}{4}\notin Z\Rightarrow Y_{\frac{1}{4}}=J_{-\frac{1}{4}}} y=\sqrt{x}\,(c_1J_{\frac{1}{4}}(x)+c_2J_{-\frac{1}{4}}(x))$$

مثال ۷۱. *با فرض $A=\int_0^1 J_0(x)\,dx$، حاصل $\int_0^1 x^2J_2(x)\,dx$ کدام است؟*

۱) $-J_1(1)-3J_0(1)-3A$ ۲) $-J_1(1)-3J_0(1)+3A$

۳) $J_1(1)-3J_0(1)-3A$ ۴) $J_1(1)-3J_0(1)+3A$

حل. گزینه «۲».

$$\int x^2J_2(x)\,dx=\int\underbrace{x^3}_{u}\cdot\underbrace{x^{-1}J_2(x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases}du=3x^2\,dx\\ v=\int x^{-1}J_2(x)\,dx\end{cases}\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ ب. ؛ }\lambda=1} v=-x^{-1}J_1(x)$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du}\int x^2J_2(x)\,dx=x^3\times-x^{-1}J_1(x)-\int-x^{-1}J_1(x).3x^2\,dx \quad\Rightarrow$$

$$\int_0^1 x^2J_2(x)\,dx=-x^2J_2(x)\Big|_0^1+3\int_0^1 xJ_1(x)\,dx \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 x^2J_2(x)\,dx=-J_1(1)+3\int_0^1 xJ_1(x)\,dx \quad ;(1)$$

در اینصورت به محاسبه $\int_0^1 xJ_1(x)\,dx$ می‌پردازیم:

$$\int xJ_1(x)\,dx=\int\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{J_1(x)\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases}du=dx\\ v=\int J_1(x)\,dx\end{cases}\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ ب. ؛ }\lambda=0} v=-J_0(x)$$

$$\xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du}\int xJ_1(x)\,dx=x\times(-J_0(x))-\int-J_0(x)\,dx \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 xJ_1(x)\,dx=-xJ_0(x)\Big|_0^1+\int_0^1 J_0(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_0^1 J_0(x)\,dx=A}\int_0^1 xJ_1(x)\,dx=-J_0(1)+A$$

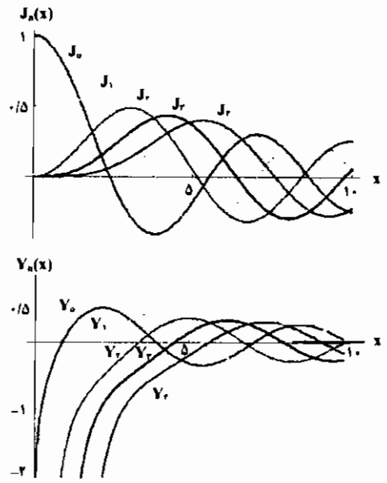
$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}}\int_0^1 x^2J_2(x)\,dx=-J_1(1)+3(-J_0(1)+A)=-J_1(1)-3J_0(1)+3A$$

مثال ۷۲. *حل معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0\quad,\ x\ge0$$

۱) یکی از جوابهای این معادله در $x=\infty$ نامحدود است. ۲) یکی از جوابهای این معادله در $x=0$ نامحدود است.

۳) هر دو جواب این معادله می‌تواند در $x=0$ محدود باشد. ۴) هیچ کدام از جوابها در $x=0$ نمی‌تواند محدود باشد.



حل. گزینه «۲». معادله دیفرانسیل مفروض، معادله بسل مرتبه n است. در نتیجه جوابهای مستقل آن توابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ می‌باشند.

با توجه به شکل توابع مذکور، هر دوی این جوابها در $x=\infty$ میرا و در نتیجه محدود هستند. در $x=0$، توابع $J_n(x)$ محدود و توابع $Y_n(x)$، توابعی نامحدود هستند.

مثال ۷۳. *جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ به صورت زیر می‌باشد، $y=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$. (A و B مقادیر ثابت هستند.) جواب معادله $y''+\frac{1}{x}y'+(4-\frac{1}{x^2})y=0$ برابر است با:*

۱) $y=AJ_1(4x)+BY_1(4x)$ ۲) $y=AJ_1(4-\frac{1}{x^2})+BY_1(4-\frac{1}{x^2})$

۳) $y=AJ_1(x)+BY_1(x)$ ۴) $y=AJ_1(2x)+BY_1(2x)$

حل. گزینه «۴».

$$y''+\frac{1}{x}y'+(4-\frac{1}{x^2})y=0 \xrightarrow{\times x^2\ (\text{طرفین})} x^2y''+xy'+(4x^2-1)y=0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $x^2y''+xy'+(\xi^2x^2-\lambda^2)y=0\ ;\ \lambda\ge0$ با فرض $\xi=2$ و $\lambda=1$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $t=\xi x$ به معادله بسل مرتبه $\lambda=1$ تبدیل و جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1J_\lambda(\xi x)+c_2Y_\lambda(\xi x)\xrightarrow{\lambda=1} y=c_1J_1(2x)+c_2Y_1(2x)$$

مثال ۷۴. *کدامیک از گزینه‌ها، یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+(e^x-\frac{25}{4})y=0$ است؟*

۱) $Y_{-5}(e^{\frac{x}{2}})$ ۲) $J_{-5}(e^{\frac{x}{2}})$ ۳) $Y_5(e^{\frac{x}{2}})$ ۴) $J_{-5}(e^x)$

☑ **حل.** گزینه «۳». معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $y'' + (e^{x} - \xi^{2})y = 0 \; ; \xi \geq 0$، با فرض $\xi = \frac{5}{2}$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $t = 2e^{\frac{x}{2}}$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = 2\xi = 5$ تبدیل و جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1 J_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}}) = c_1 J_5(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_5(2e^{\frac{x}{2}})$$

مثال ۷۵. *یک جواب معادله زیر کدام است؟*

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}} J_{-\frac{1}{2}}(x)$ ۲) $\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{x}} J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$ ۴) $\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$

☑ **حل.** گزینه «۱». معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $xy'' + (1+2\xi)y' + xy = 0 \; ; \xi \in \mathbb{R}$، با فرض $\xi = \frac{1}{2}$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $y = x^{-\xi} u$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = |\xi| = \frac{1}{2}$ تبدیل و جواب عمومی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y = x^{-\xi}(c_1 J_{|\xi|}(x) + c_2 Y_{|\xi|}(x)) \xrightarrow{\xi=\frac{1}{2}} y = x^{-\frac{1}{2}}(c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 Y_{\frac{1}{2}}(x))$$

$$\xrightarrow{\lambda=\frac{1}{2}\notin Z \;\Rightarrow\; Y_{\frac{1}{2}} = J_{-\frac{1}{2}}} y = \frac{1}{\sqrt{x}}(c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)) \quad \Rightarrow \quad y = c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

معادله بسل پیراسته

تعریف. معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - (x^2 + \lambda^2)y = 0$ که در آن $\lambda \geq 0$ یک عدد حقیقی ثابت است، معادله بسل پیراسته نامیده می‌شود.

اگر معادله بسل پیراسته را بصورت $x^2y'' + xy' + (i^2x^2 - \lambda^2)y = 0 \; ; \lambda \geq 0$ بازنویسی کنیم، که در آن $i^2 = -1$ همان مولد موهومی محض در حساب مختلط است، در اینصورت معادله بسل پیراسته با تغییر متغیر $z = ix$، به معادله بسل مرتبه $\lambda \geq 0$ تبدیل می‌شود، و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 J_\lambda(ix) + c_2 Y_\lambda(ix)$ بدست می‌آید.

در بحث معادله بسل پیراسته، نکات زیر قابل بررسی است:

- از آنجائیکه $J_\lambda(ix)$ یک جواب معادله بسل پیراسته مرتبه λ است، در اینصورت $I_\lambda(x) = i^{-\lambda} J_\lambda(ix)$ نیز جوابی از معادله دیفرانسیل مفروض می‌باشد. در نتیجه با توجه به ضابطه $J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)} \cdot (\frac{x}{2})^{2k+\lambda}$، می‌توان نمایش ساده‌تری از جواب معادله بسل پیراسته $x^2y'' + xy' - (x^2 + \lambda^2)y = 0 \; ; \lambda \geq 0$ را بصورت زیر ارائه داد:

$$I_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\lambda+1)} \cdot (\frac{x}{2})^{2k+\lambda}$$

تعریف. تابع $I_\lambda(x) \; ; \lambda \in \mathbb{R}$ که در مجموعه اعداد حقیقی همگراست، تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبه λ نامیده می‌شود.

- جواب مستقل دوم معادله بسل پیراسته مرتبه λ بصورت زیر محاسبه می‌شود که تابع بسل پیراسته نوع دوم مرتبه λ نامیده می‌شود:

$$\begin{cases} \text{i) } K_\lambda(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)}{\sin \pi\lambda} & ; \lambda \neq 0, 1, 2, \cdots \\ \text{ii) } K_\nu(x) = \lim_{\lambda \to \nu} K_\lambda(x) & ; \nu = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

در اینصورت، جواب عمومی معادله بسل پیراسته $x^2y'' + xy' - (x^2 + \lambda^2)y = 0 \; ; \lambda \geq 0$، از ضابطه عمومی $y = c_1 I_\lambda(x) + c_2 K_\lambda(x)$ بدست می‌آید.

- روابط حاکم بر توابع و معادلات بسل، با اندکی تغیر، در مورد توابع بسل پیراسته نیز معتبرند. بعنوان مثال؛

الف - رابطه بازگشتی؛

$$I_{\lambda+1}(x) = I_{\lambda-1}(x) - \frac{2\lambda}{x} I_\lambda(x)$$

ب - معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - (\xi^2x^2 + \lambda^2)y = 0 \; ; \lambda \geq 0$ با اعمال تغییر متغیر $t = \xi x$ به معادله بسل پیراسته مرتبه λ تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 I_\lambda(\xi x) + c_2 K_\lambda(\xi x)$ محاسبه می‌گردد.

مثال ۷۶. *جواب معادله دیفرانسیل* $xy'' + y' - x\lambda^2 y = 0$ *کدام است؟*

۱) $y = c_1 I_0(\lambda x) + c_2 Y_0(\lambda x)$ ۲) $y = c_1 I_0(\lambda x) + c_2 K_0(\lambda x)$

۳) $y = c_1 J_0(\lambda x) + c_2 Y_0(\lambda x)$ ۴) $y = c_1 I_0(\lambda^2 x) + c_2 K_0(\lambda^2 x)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$xy'' + y' - x\lambda^2 = 0 \xrightarrow{x \times (\text{طرفین})} x^2y'' + xy' - (\lambda^2x^2 + 0)y = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل پیراسته با نمایش عمومی $x^2y'' + xy' - (\xi^2x^2 + \lambda^2)y = 0 \; ; \lambda \geq 0$، با فرض $\xi = \lambda$ است. در نتیجه با تغییر متغیر $t = \xi x = \lambda x$ به معادله بسل پیراسته مرتبه صفر تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 I_0(\lambda x) + c_2 K_0(\lambda x)$ بدست می‌آید.

مثال ۷۷. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $9x^2y'' + 9xy' - (9x^2 + 1)y = 0$ *کدام است؟*

۱) $c_1 I_{\frac{1}{3}}(x) + c_2 K_{\frac{1}{3}}(x)$ ۲) $c_1 I_3(x) + c_2 K_3(x)$

۳) $c_1 I_{\frac{1}{3}}(x) + c_2 Y_{\frac{1}{3}}(x)$ ۴) $c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$9x^2y'' + 9xy' - (9x^2 + 1)y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y'' + xy' - (x^2 + (\frac{1}{3})^2)y = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، معادله بسل پیراسته مرتبه $\lambda = \frac{1}{3}$ است. در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 I_{\frac{1}{3}}(x) + c_2 K_{\frac{1}{3}}(x)$ بدست می‌آید.

مثال۷۸. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $x^2y''+4xy'-(x^2+1)y=0$ *کدام گزینه است؟*

۱) $c_1I_{\frac{1}{2}}(x)+c_2K_{\frac{1}{2}}(x)$

۲) $c_1I_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{2})+c_2K_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{2})$

۳) $c_1I_{\frac{1}{2}}(2x)+c_2K_{\frac{1}{2}}(x)$

۴) $c_1I_2(2x)+c_2K_2(2x)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$4xy''+4xy'-(x^2+1)y=0 \quad \Rightarrow \quad xy''+xy'-(\frac{1}{4}x^2+(\frac{1}{2})^2)y=0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادلات بسل پیراسته با نمایش عمومی $x^2y''+xy'-(\xi^2x^2+\lambda^2)y=0\ ;\lambda\geq 0$، با فرض $\xi=\lambda=\frac{1}{2}$ است. د رنتیجه با اعمال تغییر متغیر $t=\xi x$ به معادله بسل پیراسته مرتبه $\lambda=\frac{1}{2}$ تبدیل و جواب عمومی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1I_\lambda(\xi x)+c_2K_\lambda(\xi x) \xrightarrow{\lambda=\xi=\frac{1}{2}} y=c_1I_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{2})+c_2Y_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{2})$$

مثال۷۹. *مقدار* $I_0(0)$ *کدام است؟*

۱) صفر

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۳». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{J_0(x)\text{ ضابطه}} J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot(\frac{x}{2})^{2k} \xrightarrow{x=0} J_0(0)=1 \quad ;(1)$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $I_\lambda(x)=i^{-\lambda}J_\lambda(ix)$ داریم:

$$I_\lambda(x)=i^{-\lambda}J_\lambda(ix) \xrightarrow{\lambda=x=0} I_0(0)=J_0(0) \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} I_0(0)=1$$

مثال۸۰. *مقدار* $I_\lambda(0)$ *با فرض* $\lambda>0$ *برابر است با:*

۱) ∞

۲) ۱

۳) -1

۴) صفر

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{J_\lambda(x)\text{ ضابطه}} J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)}\cdot(\frac{x}{2})^{2k+\lambda} \xrightarrow{(k\geq 0\ \&\ \lambda>0)\Rightarrow 2k+\lambda>0} J_\lambda(0)=0\ ;\lambda>0 \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$I_\lambda(x)=i^{-\lambda}J_\lambda(ix) \xrightarrow{x=0} I_\lambda(0)=i^{-\lambda}J_\lambda(0) \xrightarrow{\lambda>0\ \Rightarrow\ \text{تساوی (۱)}} I_\lambda(0)=0$$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ ریشه‌های معادله شاخص معادله دیفرانسیل زیر کدامند؟ *(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)*

$$2x^2y''+(2x^2-5x)y'+(3x^2+2)y=0$$

۱) $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$ و ۴

۳) ۲ و $\frac{1}{4}$

۴) ۲ و ۴

۲ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-(x+1)y=0$ *کدامیک است؟*

(مهندسی ژئوفیزیک و هواشناسی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y=c_1x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۲) $y=c_1x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_1\ln x\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۳) $y=c_1x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۴) $y=c_1x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۳ـ در معادله دیفرانسیل $2xy''-(2x+1)y'+2y=0$ **نقاط . . . . .** *(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)*

۱) $x=0$ و $x=-1$ هر دو غیرعادی منظم هستند.

۲) $x=0$ و $x=-1$ هر دو غیرعادی نامنظم هستند.

۳) $x=0$ نقطه غیرعادی منظم و $x=-1$ نقطه غیرعادی نامنظم هستند.

۴) $x=0$ نقطه غیرعادی نامنظم و $x=-1$ نقطه غیرعادی منظم هستند.

۴ـ وضعیت نقاط تکین معادله دیفرانسیل $x^2(1-x)y''+y'-y=0$ **عبارتست از:** *(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)*

۱) $x=0$ منظم و $x=1$ نامنظم است.

۲) $x=0$ نامنظم و $x=1$ منظم است.

۳) $x=0$ و $x=1$ هر دو نامنظم‌اند.

۴) $x=0$ و $x=1$ هر دو منظم‌اند.

۵ـ اگر تابع بسل $J_n(x)$ **را یک جواب خصوصی معادله بسل زیر در نظر بگیریم:**

$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ **و** $y_n(x)=\phi(x)J_n(x)$ **جواب دیگری از معادله باشد آنگاه** $\phi(x)$ **برابر است با:**

(مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\int x^2J_n^2(x)dx$

۲) $\int xJ_n(x)dx$

۳) $\int\frac{xdx}{J_n^2(x)}$

۴) $\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}$

۶ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **جواب** $y''-xy'=0$ **باشد، آنگاه:** *(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۷۸)*

۱) $a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

۲) $a_{n+2}=\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$

۳) $a_{n+3}=\frac{-a_n}{(n+1)(n+2)}$

۴) $a_{n+3}=\frac{a_n}{(n+1)(n+3)}$

۷ـ ضریب x^3 **در سری مک لورن جواب مسأله مقدار اولیه** $y(0)=y'(0)=1$ **و** $y''+(\sin x)y'+e^xy=0$ **کدام است؟**

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۷۸)

۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $-\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{1}{2}$

۸ـ معادله $y''+y+y^{۳}=\cos x$ با شرایط $y(۰)=۰$ و $y'(۰)=۱$ مفروض است. بسط مک لورن حل معادله فوق برابر است با: (مهندسی شیمی نساجی ـ سراسری ۷۸)

۱) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots$

۲) $y=x-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}-\cdots$

۳) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}+\cdots$

۴) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۳}}{۶}+\cdots$

۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $y''(x^{۲}-۱)-xy'+۶y=۰$ به ازای: (مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $-۲<x<۰$ همگراست. ۲) $۰<x<۱$ واگراست. ۳) $-۱<x<۰$ واگراست. ۴) $۰<x<۱$ همگراست.

۱۰ـ برای نقاط $x=۰$ و $x=۱$ به ترتیب کدام گزینه صحیح است. (مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

$$(x^{۲}-x)y''+y'+\frac{۱}{x^{۲}}y=۰$$

۱) $x=۰$ و $x=۱$ نامنظم هستند.

۲) $x=۰$ منظم و $x=۱$ نا منظم.

۳) $x=۰$ نامنظم و $x=۱$ منظم.

۴) $x=۰$ و $x=۱$ منظم هستند.

۱۱ـ معادله $y''+y+y^{۳}=\cos۱۰x$ با شرایط $y(۰)=۰$ و $y'(۰)=۱$ مفروض است، بسط مک‌لورن حل معادله فوق برابر است با: (مهندسی نساجی ـ آزاد ۷۸)

۱) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots$

۲) $y=x-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots$

۳) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}+\cdots$

۴) $y=x+\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۶}x^{۳}+\cdots$

۱۲ـ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

$$x(x-۱)y''+(۳x-۱)y'+y=۰$$

۱) $y=\frac{۱}{۱+x}(۱-\mathrm{Lnx})$

۲) $y=\frac{۱}{۱-x}(۱+\mathrm{Lnx})$

۳) $y=\frac{۱}{۱+\mathrm{Lnx}}$

۴) $y=\frac{۱}{۱-\mathrm{Lnx}}$

۱۳ـ معادله شاخص معادله دیفرانسیل $y=۰$ $(x^{۲}+\frac{۵}{۳۶})y+x^{۲}y''=۰$ کدام است؟ (مهندسی پزشکی بیومکانیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $r^{۲}-r+\frac{۵}{۳۶}=۰$

۲) $r^{۲}+\frac{۵}{۳۶}r-۱=۰$

۳) $r^{۲}-\frac{۵}{۳۶}r+۱=۰$

۴) $r^{۲}+r-\frac{۵}{۳۶}=۰$

۱۴ـ مقدار انتگرال $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{-\mathrm{Lnx}}}$ چقدر است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) $\sqrt{\pi}$

۲) $\sqrt{۲\pi}$

۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

۴) $۲\sqrt{\pi}$

۱۵ـ دو جواب مستقل معادله $۳xy''+۲y'+y=۰$ به چه صورتی هستند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $y_۲=\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$ و $y_۱=x^{\frac{۱}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$

۲) $y_۲=\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$ و $y_۱=x^{-۱}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$

۳) $y_۲=x^{\frac{۱}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$ و $y_۱=x^{-۲}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$

۴) $y_۱=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $y_۲=y_۱(x)\mathrm{Lnx}+\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$

۱۶ـ در معادله دیفرانسیل زیر نوع نقاط تکین را مشخص کنید: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۹)

$$x^{۲}(x-۱)^{۳}y''+x(x-۱)^{۲}y'+y=۰$$

۱) $x=۰$ و $x=۱$ هر دو منظم‌اند.

۲) $x=۰$ و $x=۱$ هر دو نامنظم‌اند.

۳) $x=۰$ نامنظم و $x=۱$ منظم است.

۴) $x=۰$ منظم و $x=۱$ نامنظم است.

۱۷ـ اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه n باشد، مقدار انتگرال $I=\frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲}x P_n(\sin x)dx$ برابر است با: (مجموعه شیمی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۵}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۱

۴) هیچکدام

۱۸ـ اگر $\Gamma(n)=\int_{۰}^{\infty}t^{n-۱}e^{-t}\,dt$ و $\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}$، $\Gamma(\frac{۳}{۲})$ برابر چه مقدار می‌شود؟ (مهندسی عمران ـ سراسری و آزاد ۷۹)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۴}$

۳) $۲\sqrt{\pi}$

۴) $\frac{۲\sqrt{\pi}}{۲}$

۱۹ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر و فاصله تقارب آن کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ سراسری و آزاد ۷۹)

$$(۱-x)y'+y=x+۱$$

۱) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}+\cdots+\frac{(n-۲)!}{n!}x^{n}+\cdots\ ;\ -\frac{۳}{۲}\le x\le\frac{۳}{۲}$

۲) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}+\cdots+\frac{(n-۱)!}{n!}x^{n}+\cdots\ ;\ -۱\le x\le۱$

۳) $y=x+\frac{x^{۲}}{۲}+\cdots+\frac{(n-۲)!}{n!}x^{n}+\cdots\ ;\ -۱\le x\le۱$

۴) هیچکدام

۲۰ـ معادله شاخص یا اندیس معادله دیفرانسیل $۳x(۳x+۲)y''-۴y'+۴y=۰$ دارای: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) ریشه‌های صفر و $\frac{۵}{۳}$ است. ۲) ریشه‌های ۱- و $\frac{۵}{۳}$ است. ۳) ریشه‌های مضاف $\frac{۵}{۳}$ است. ۴) ریشه‌های ۱- و $\frac{۳}{۵}$ است.

۲۱ـ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل زیر به کدام صورت است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

$$x^{۲}y''+۳xy'+(۱+x)y=۰\quad ,\ x>۰$$

۱) $y_۱(x)=\frac{۱}{x}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $y_۲(x)=\frac{۱}{x}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$

۲) $y_۱(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $y_۲(x)=\frac{۱}{x}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$

۳) $y_۱(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $y_۲(x)=y_۱(x)\mathrm{Lnx}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$

۴) $y_۱(x)=\frac{۱}{x}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $y_۲(x)=y_۱(x)\mathrm{Lnx}+\frac{۱}{x}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$

۲۲ـ مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\infty}x^{n}e^{-x}dx$ کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰

۲) $n!$

۳) $\frac{۱}{n!}$

۴) ∞

۲۳ـ چنانچه $J_n(x)$ تابع بسل مرتبه n و n عدد صحیح باشد، آنگاه کدام رابطه صحیح است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) $J_n(x)=۱+J_{-n}(x)$

۲) $J_{-n}(x)=(-۱)^{n}.J_n(x)$

۳) $J_{-n}(x)=(-۱)^{n+۱}.J_n(x)$

۴) $J_{-n}(x)=(-۱)^{n}+J_n(x)$

۲۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' - y' + xy = 0$ با تغییر متغیر $y = xu$، برحسب توابع بسل کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) $y(x) = x[c_1J_1(x) + c_2Y_1(x)]$
۲) $y(x) = x^2[c_1J_1(x) + c_2Y_1(x)]$
۳) $y(x) = x[c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x)]$
۴) $y(x) = x^2[c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x)]$

۲۵ـ ریشه‌های معادله اندیسی یا شاخصی معادله $x^2y'' - 3xy' + (x+4)y = 0$ در همسایگی $x = 0$ عبارت است از: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۴ و ۰
۲) ۲ و ۰
۳) ۲ و ۲
۴) ۲ و ۲ـ

۲۶ـ اگر $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر باشد مقدار $\int_{-1}^{1}(x+1)P_0(x)dx$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۲
۲) $\frac{2}{3}$
۳) ۱
۴) $\frac{2}{5}$

۲۷ـ اگر تابع g جوابی از معادله دیفرانسیل $y'' + yy' - x^3 = 0$ با شرایط $g(-1) = 1$ و $g'(-1) = 2$ باشد مقدار $g'''(-1)$ برابر است با: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) ۳ـ
۲) ۲ـ
۳) ۲
۴) ۳

۲۸ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $e^{-x}y'' + xy' + y = 3$ با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ باشد، آنگاه $y'''(0)$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) با اطلاعات فوق نمی‌توان آنرا به دست آورد.

۲۹ـ اگر جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ برابر $c_1J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$ باشد، بطوری‌که $J_\nu(x)$ و $Y_\nu(x)$ به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم باشند، در این صورت جواب معادله $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$ به چه صورت است؟ (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $y = C_1J_2(3x) + C_2Y_2(3x)$
۲) $y = C_1J_3(2x) + C_2Y_3(2x)$
۳) $y = C_1J_2(x) + C_2Y_2(x)$
۴) $y = C_1J_3(x) + C_2Y_3(x)$

۳۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' - y' + xy = 0$ با تغییر متغیر $y = xu$، برحسب توابع بسل کدام است؟ (مهندسی شیمی و مخازن هیدروکربوری ـ سراسری ۸۰)

۱) $y(x) = x(c_1J_1(x) + c_2Y_1(x))$
۲) $y(x) = x^2(c_1J_1(x) + c_2Y_1(x))$
۳) $y(x) = x(c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x))$
۴) $y(x) = x^2(c_1J_1(x) + c_2J_{-1}(x))$

۳۱ـ هرگاه معادله $3xy'' + y' - y = 0$ به روش سری توانی حل کنیم، معادله آن دارای دو ریشه: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $r = 1$ و $r = \frac{3}{4}$ است.
۲) $r = 0$ و $r = \frac{3}{2}$ است.
۳) مضاعف $r = 0$ است.
۴) $r = 0$ و $r = \frac{2}{3}$ است.

۳۲ـ اگر به ازاء هر عدد صحیح نامنفی n، $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر درجه n را نشان دهد، آنگاه $\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x^2)P_{2k+1}(x)dx$ به ازای $k > 1$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) ۰
۲) ۱
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $-\frac{3}{4}$

۳۳ـ هرگاه $y' + 2xy = 0$ باشد مقدار y برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $y = a_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{2n}$
۲) $y = a_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)!}x^{n}$
۳) $y = a_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{n}$
۴) $y = a_0\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{2n}$

۳۴ـ معادله $y' + (\sin x)y = 0$ با شرط $y(0) = 1$ مفروض است. ضریب x^2 در بسط مک لورن y برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{1}{24}$
۳) $-\frac{1}{6}$
۴) $-\frac{1}{24}$

۳۵ـ معادله $y'' - e^xy' + (1+x^2)y = 0$ با شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ مفروض است. ضریب x^2 در بسط مک لورن y برابر است با: (مهندسی نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۰
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۱

۳۶ـ ضریب x^3 در حل معادله $y' = x^2 + y^2$ با شرط $y(0) = 1$ برابر است با: (مهندسی استخراج معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{3!}$
۲) $\frac{8}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) ۰

۳۷ـ با توجه به اینکه صفر نقطه منفرد منظم معادله $xy'' + y' + y = 0$ است. جوابهای معادله شاخص برای این نقطه کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ و ۰
۲) ۰ و ۱
۳) ۱ و ۱ـ
۴) ۱ و ۱

۳۸ـ هرگاه $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ کثیرالجمله در فاصله $[-1,1]$ باشد، در آن صورت: (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $x^4 = \frac{3}{35}P_4 + \frac{2}{7}P_2 + \frac{1}{3}P_0$
۲) $x^4 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{1}{5}P_0$
۳) $x^4 = P_4 + \frac{3}{7}P_2 + P_0$
۴) $x^4 = P_4 + P_2 + P_0$

۳۹ـ با کدام جایگذاری معادله دیفرانسیل $xy'' - y' + xy = 0$ به یک معادله بسل تبدیل می‌شود؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = \sqrt{2}$
۲) $y = xz$
۳) $y = x\sqrt{x}$
۴) $y = x\sqrt{z}$

۴۰ـ مقدار تابع $\Gamma(5)$ (تابع گاما به ازاء ۵) کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۲
۲) ۶
۳) ۲۴
۴) ۱۲۰

۴۱ـ جهت حل معادله دیفرانسیل $4x\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$ با روش فروبینوسی، جواب معادله به صورت $y = \sum_{0}^{\infty}u_nx^{n+c}$ در نظر گرفته می‌شود، با تعیین معادله اندیسی (Indicial Equation) مقدار c کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۱)

۱) ۰ و $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}\pm$ و ۰
۳) ۰ و $\frac{1}{2}$
۴) $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$

۴۲ـ کدام گزینه دو جواب مستقل خطی برای معادله زیر است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

$$۳x(x+۱)y'' + ۳(x+۱)y' + ۴y = ۰$$

۱) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n-۱}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+۱}$

۲) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-۱}$

۳) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n+\frac{۱}{۳}}$

۴) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n}$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^{n-\frac{۱}{۳}}$

۴۳ـ کدامیک از عبارات زیر در مورد تابع گاما $\Gamma(\alpha) = \int_۰^{\infty} t^{\alpha-۱}e^{-t}dt$ صحیح است؟ (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\Gamma(\alpha) = \alpha!$ ۲) $\Gamma(\alpha+۱) = \alpha\Gamma\alpha$ ۳) $\Gamma(\alpha+۱) = (\alpha-۱)\Gamma\alpha$ ۴) $\Gamma(۱) = ۰$

۴۴ـ جوابهای مستقل معادله دیفرانسیل $۴y' + ۴y - y''(۲+۳x) = ۰$ عبارتست از: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۱)

۱) $y_۱ = x^{\frac{۵}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_۲ = x\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۲) $y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_۱ = x^{\frac{۵}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۴) $y_۱ = x^{\frac{۵}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_۲ = y_۱(x)Ln(x) + x^{\frac{۵}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۴۵ـ برای معادله دیفرانسیل زیر که در آن n یک عدد ثابت است، کدام عبارت داده شده صحیح است؟

$$(۱-x^۲)y'' - ۲xy' + n(n+۱)y = ۰$$

(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۱)

۱) معادله دیفرانسیل لژاندر بوده ولی چند جمله‌ای‌های لژاندر جواب آن نمی‌باشند.

۲) معادله دیفرانسیل لژاندر بوده و از روش سری می‌توان آن را حل کرد.

۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرائب ثابت بوده و از روش جداسازی متغیرها حل می‌شود.

۴) به ازاء مقادیر خاص n دارای جواب است.

۴۶ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $(x^۲+۱)y - y'' = ۰$ با شرایط $y(۰) = -۲$ و $y'(۰) = ۲$ باشد، در بسط تابع $y(x)$ برحسب توان‌های صعودی x، ضریب $x^۳$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۱)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۷ـ یک جواب معادله دیفرانسیل $(۴x^۲+۱)y + ۸x^۲y' - ۴x^۲y'' = ۰$, $x > ۰$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ۲) $y = x^۲\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ۳) $y = x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ۴) $y = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$

۴۸ـ یک جواب معادله زیر که معادله بسل می‌باشد بصورت $y = J_p(x)$ است:

$$x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲} + x\frac{dy}{dx} + (x^۲ - p^۲)y = ۰$$

جواب دیگر معادله عبارت است از: (کلیه رشته‌ها ـ سراسری ۸۱)

۱) $J_p(x)\int\frac{dx}{xJ_p(x)}$ ۲) $J_p(x)\int\frac{dx}{x^۲J_p(x)}$ ۳) $J_p(x)\int\frac{dx}{[xJ_p(x)]^۲}$ ۴) $J_p(x)\int\frac{dx}{x[J_p(x)]^۲}$

۴۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + xy + (x^۲ - n^۲)y = ۰$ به صورت زیر می‌باشد:

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

(A و B مقادیر ثابت هستند) جواب معادله $y'' + \frac{۱}{x}y' + (۴ - \frac{۱}{x^۲})y = ۰$ برابر است با: (کلیه رشته‌ها ـ سراسری ۸۱)

۱) $y = AJ_۱(۴x) + BJ_{-۱}(۴x)$ ۲) $y = AJ_۱(۴ - \frac{۱}{x^۲}) + BJ_{-۱}(۴ - \frac{۱}{x^۲})$

۳) $y = AJ_۱(x) + BJ_۱(x)$ ۴) $y = AJ_۱(۲x) + BJ_{-۱}(۲x)$

۵۰ـ معادله دیفرانسیل لژاندر عبارت است از:

$$(۱-x^۲)\frac{d^۲y}{dx^۲} - ۲x\frac{dy}{dx} + p(p+۱)y = ۰$$

جواب‌های این معادله، چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند. چند جمله‌ای‌های لژاندر با کدام یک از توابع وزنی زیر متعامد می‌باشند؟ (صنایع رنگ ـ سراسری ۸۱)

۱) $r(x) = p(p+۱)x$ ۲) $r(x) = -۲x$ ۳) $r(x) = ۱-x^۲$ ۴) $r(x) = ۱$

۵۱ـ ریشه‌های معادله شاخصی (یا اندیسی) $۹x^۲y'' + ۹(x^۲+x)y' + (۱۲x-۱)y = ۰$ در همسایگی $x = ۰$ برابر است با:

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $r_۱ = r_۲ = \frac{۱}{۳}$ ۲) $r_۱ = \frac{۱}{۳}$, $r_۲ = -\frac{۱}{۳}$ ۳) $r_۱ = r_۲ = ۳$ ۴) $r_۱ = ۳$, $r_۲ = -۳$

۵۲ـ اگر $y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' + x^۲y = ۰$ باشد، آنگاه: (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $a_{n+۲} = \frac{a_n}{(n+۱)(n+۲)}$ ۲) $a_{n+۳} = \frac{a_{n+۱}}{(n+۳)(n+۴)}$

۳) $a_{n+۳} = -\frac{a_{n-۱}}{(n+۳)(n+۴)}$ ۴) $a_{n+۴} = -\frac{a_n}{(n+۳)(n+۴)}$

۵۳ـ نقاط $x = ۲$ و $x = ۰$ برای معادله $x^۲(x-۲)y'' - y'\sin x + y = ۰$ چه نقاطی هستند؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $x = ۰$ نقطه تکین نامنظم و $x = ۲$ نقطه تکین منظم.

۲) $x = ۰$ نقطه تکین منظم و $x = ۲$ نقطه تکین نامنظم.

۳) هر دو نقطه تکین منظم

۴) هر دو نقطه تکین نامنظم.

۵۴ـ کدام عدد جواب معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + x(x-۱)y' + y = ۰$ می‌باشد؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۵ـ مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx$ که در آن $P_2(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد، برابر است با:

(مجموعه نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{7}$

۵۶ـ با تغییر متغیر $z = 5x$، جوابهای معادله زیر برحسب توابع بسل کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۱)

$$x^2 y'' + xy' + (25x^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

۱) $y(x) = AJ_3(5x) + BJ_{-3}(5x)$ ۲) $y(x) = AJ_{\frac{5}{2}}(5x) + BJ_{-\frac{5}{2}}(5x)$

۳) $y(x) = AJ_{\frac{3}{2}}(5x) + BJ_{-\frac{3}{2}}(5x)$ ۴) $y(x) = AJ_5(5x) + BJ_{-5}(5x)$

۵۷ـ هرگاه معادله $y'' + xy = 0$ را به روش سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حل کنیم، آنگاه فرمول بازگشتی برای ضرائب برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) $a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ ۲) $a_n = \frac{n}{n+1} a_{n+1}$

۳) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ ۴) $a_{n+2} = \frac{n}{n-1} a_n$

۵۸ـ هرگاه به جستجوی جواب معادله $y'' - 2xy' + y = 0$ به صورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ بپردازیم، آنگاه:

(مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۸۱)

۱) $a_4 = -\frac{3}{4!} a_0$ ۲) $a_5 = -\frac{1}{5!} a_0$ ۳) $a_4 = -\frac{1}{4!} a_0$ ۴) $a_5 = -\frac{1}{5!} a_1$

۵۹ـ ضریب x^2 در حل معادله $y' = x^2 + y^2 + y$ با شرط اولیه $y(0) = 2$ کدام است؟ (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱۵ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱۲

۶۰ـ ضریب x^4 در حل معادله $y'' = 2e^{-x} y + y$ با شرط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{7}{24}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $-\frac{1}{24}$ ۴) $-\frac{7}{24}$

۶۱ـ کدام گزینه در مورد معادله $(x+3)y'' - 4(x+3)y' - 9xy = 0$ صحیح است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) نقطه $x = -3$ یک نقطه معمولی است.

۲) نقاط $x = 0$ و $x = -3$ منفرد منظم هستند.

۳) نقطه $x = 0$ منفرد منظم و $x = -3$ منفرد نامنظم است.

۴) نقطه $x = 0$ منفرد نامنظم و $x = -3$ منفرد منظم است.

۶۲ـ با توجه به اینکه $x = 0$ نقطه منفرد منظم معادله زیر است، ریشه‌های معادله مشخصه (شاخص) کدام است؟

$$(\sin x)y'' + y' + (\sin x)y = 0$$

(مهندسی ژئوفیزیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $r = -1, 1$ ۲) $r = 0, 0$ ۳) $r = 1, 1$ ۴) $r = 2, -2$

۶۳ـ مقدار $\int_{-1}^{1} xP_1(x)\,dx$ که در آن $P_1(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد، برابر است با:

(مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۶۴ـ اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشد، حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1} (x^3 - 1)P_2(x)\,dx$ کدام است؟

(مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۶۵ـ با تغییر متغیر $y = \frac{u}{x}$ جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + 3y' + xy = 0$ کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۲)

۱) $y(x) = c_1 x^{-1} J_1(x) + c_2 Y_1(x)$ ۲) $y(x) = c_1 x J_1(x) + c_2 x^{-1} Y_1(x)$

۳) $y(x) = c_1 x^{-1} J_1(x) + c_2 x^{-1} Y_1(x)$ ۴) $y(x) = c_1 x J_1(x) + c_2 x Y_1(x)$

۶۶ـ ریشه‌های معادله مشخصه معادله $x^2(x+1)y'' + x(x-4)y' + 6y = 0$ در همسایگی نقطه $x = 0$ کدام است؟

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) ۱ و $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ و ۵ ۳) ۴ و ۱ ۴) ۱ و $\frac{1}{5}$

۶۷ـ نقاط غیرعادی و نوع آنها برای معادله $(x-3)(\sin x)y'' + xy' + x^2 y = 0$ چیست؟ (مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۲)

۱) $x = 3$ غیرعادی منظم

۲) $x = 3$ غیرعادی نامنظم و $x = 0$ غیرعادی منظم

۳) $x = 3$ غیرعادی منظم و $x = 0$ غیرعادی نا منظم

۴) $x = 3$ غیرعادی نامنظم و $x = 0$ غیرعادی منظم

۶۸ـ دو جواب مستقل معادله زیر به صورت کدامیک از گزینه‌های زیر هستند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)

$$2x^2 y'' - xy' + (1+x)y = 0 \quad , \quad x > 0$$

۱) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ & $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۲) $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n)$ & $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n)$

۳) $y_1(x) = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n)$ & $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n)$

۴) $y_1(x) = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n)$ & $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n)$

۶۹ـ اگر $P_n(x)$ نماینده تابع لژاندر باشد و $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ باشد. حاصل انتگرال $\int_{-1}^{1} P_5^2(x)\,dx$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{2}{12}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $\frac{2}{11}$

۷۰ـ برای تابع بسل نوع اول داریم: $(x^{\alpha}J_{\alpha}(x))' = x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$ ، $\frac{d(J_{\alpha}(x))}{dx}$ کدام است؟

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $J_{\alpha}(x)+\alpha J_{\alpha-1}(x)$ ۲) $J_{\alpha-1}(x)-\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x)$

۳) $\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x)+J_{\alpha-1}(x)$ ۴) $J_{\alpha}(x)+\frac{x}{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$

۷۱ـ می‌دانیم اولین چند جمله‌ایهای لژاندر عبارت‌اند از:

$$P_0(x)=1\ ,\ P_1(x)=x\ ,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ ,\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\ ,\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

ضریب جمله $P_3(x)$ در بسط لژاندر ـ فوریه تابع $f(x)=e^x$ و $-1\le x\le 1$ ـ کدام است؟

(مهندسی فراوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۲)

۱) $a_3=\frac{7}{2}(95e^{-1}-13e)$ ۲) $a_3=\frac{7}{4}(74e^{-1}-10e)$ ۳) $a_3=\frac{7}{4}(74e-10e^{-1})$ ۴) $a_3=\frac{7}{2}(74e-10e^{-1})$

۷۲ـ معادله شاخصی معادله $(x^2-x)y''-xy'+y=0$ حول $x=0$ دارای ریشه‌های زیر است:

(مهندسی استخراج معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) $r_1=r_2=0$ ۲) $r_2=-1\ ,\ r_1=1$ ۳) $r_2=0\ ,\ r_1=1$ ۴) $r_1=r_2=1$

۷۳ـ معادله شاخصی معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ حول $x=0$ دارای: (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) ریشه مضاعف صفر است. ۲) ریشه‌های ۱ و ۱ـ است. ۳) ریشه‌های ۰ و $\frac{1}{2}$ است. ۴) ریشه‌های ۱ـ و $\frac{3}{5}$ است.

۷۴ـ اگر معادله $y''+\frac{x}{x+1}y'-y=0$ را به روش سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ حل کنیم، آنگاه حداقل شعاع همگرایی این جواب برابر است با: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ـ ۴) ۵

۷۵ـ ریشه‌های معادله شاخص معادله زیر در نزدیکی نقطه $x=0$ عبارت است از: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

$$2x(1+x)y''+(1+6x)y'+2y=0$$

۱) ۱ـ و ۰ ۲) ۰ و $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ و ۲ ۴) $\sqrt{2}$ و ۱ـ

۷۶ـ معادله $(x^2+\frac{1}{4})y=0$ با تغییر متغیر $y=ux^{\frac{1}{2}}$ برحسب u به کدام یک از معادلات زیر منجر می‌گردد؟

(مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

۱) بسل از مرتبه ۳ ۲) بسل از مرتبه صفر ۳) لژاندر ۴) خطی مرتبه اول

۷۷ـ شعاع همگرایی پاسخ سری در معادله دیفرانسیل $y''+4xy'+4x^2y=0$ در اطراف نقطه $x=-2$ عبارت است از: (مهندسی برق ـ سراسری ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۷۸ـ دو جواب مستقل معادله زیر کدامیک از گزینه‌های زیر هستند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۳)

$$2x(1+x)y''+(3+x)y'-xy=0\ ,\ x>0$$

۱) $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۲) $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۳) $y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ y_2(x)=x^{-\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۴) $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ y_2(x)=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۷۹ـ درباره معادله $(1-x^2)^2y''+x(1-x)y'+(1+x)y=0$ کدامیک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(مهندسی معدن ـ سراسری ۸۳)

۱) $x=1$ و $x=-1$ هر دو نقاط منفرد و منظم هستند. ۲) $x=1$ و $x=-1$ هر دو نقاط منفرد و نامنظم هستند.

۳) $x=1$ نقطه منفرد نامنظم و $x=-1$ نقطه منفرد منظم است. ۴) $x=1$ نقطه منفرد منظم و $x=-1$ نقطه منفرد نامنظم است.

۸۰ـ به ازاء چه مقادیری از پارامتر نامنفی λ ، معادله دیفرانسیل زیر دارای دو جواب به شکل سری فروبینوسی حول $x=0$ است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

$$x^2y''+2x^2y'+\lambda(e^x-1)y=0$$

۱) $\lambda=0$ و $\lambda=\frac{1}{4}$ ۲) $\lambda\neq 0$ و $\lambda=\frac{1}{4}$ ۳) $\lambda=0$ و $\lambda\neq\frac{1}{2}$ ۴) $\lambda\neq 0$ و $\lambda=\frac{1}{2}$

۸۱ـ چهارجمله اول سری جواب معادله $y''+y'^2=e^xy^3$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=2$ کدام است؟

(مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\cdots$ ۲) $y=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{6}x^3+\cdots$

۳) $y=1+2x-3x^2+19x^3+\cdots$ ۴) $y=1+2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{6}x^3+\cdots$

۸۲ـ در سری توانی حل $(x-1)y''+y'+3y=0$ با شرایط $y(0)=y'(0)=1$ ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۸۳ـ در حل سری توانی $(x+1)y''-y'-3y=x$ با شرایط $y'(0)=1$ و $y(0)=0$ ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی برق ـ آزاد ۸۳)

۱) $\frac{8}{75}$ ۲) $\frac{1}{75}$ ۳) $\frac{1}{25}$ ۴) $\frac{2}{25}$

۸۴ـ اگر معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ حول $x=0$ را به روش فروبینوس حل کنیم، معادله شاخص حاصل دارای: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) ریشه‌های ۱ و ۲ است. ۲) ریشه‌های ۱ـ و ۲ است. ۳) ریشه مضاعف صفر است. ۴) ریشه‌های ۰ و $\frac{1}{2}$ است.

۸۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' + y' = a^2 xy$ کدام گزینه است؟ (مجموعه مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $AI_0(ax) + BK_0(ax)$
۲) $AJ_0(ax) + BI_0(ax)$
۳) $AJ_0(\frac{x}{a}) + BY_0(\frac{x}{a})$
۴) $AY_0(ax) + BK_0(ax)$

۸۶ـ به ازای کدام مقدار مثبت a ، شعاع همگرایی پاسخ سری معادله دیفرانسیل $(a^2 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0$ در اطراف نقطه $x = -\frac{3}{2}$ برابر $R = \frac{5}{2}$ خواهد بود؟ (مجموعه مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۸۷ـ انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ برابر است با: (مجموعه مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $-\pi$
۲) صفر
۳) $\sqrt{\pi}$
۴) 2π

۸۸ـ معادله شاخص معادله دیفرانسیل $4xy'' + 2y' + y = 0$ که به روش فروبینوس حل می‌شود، دارای ریشه‌هایی به صورت زیر است: (مجموعه مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) ۱- و ۱
۲) $\frac{1}{2}$ و ۰
۳) $\frac{1}{2}$ و ۱
۴) ۱- و ۰

۸۹ـ مشخص کنید نقطه یا نقاط تکین (Singular) معادله زیر منظم (Regular) یا نامنظم است؟

$$(2x^4 - x^5)y'' + xy' + (x^4 + 1)y = 0$$ (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $x = 0$ و $x = 2$ هر دو نامنظم است.
۲) $x = 0$ نامنظم و $x = 2$ منظم است.
۳) تنها نقطه تکین $x = 0$ و آنهم نامنظم است.
۴) تنها نقطه تکین $x = 2$ و آنهم نامنظم است.

۹۰ـ در صورتی که $y(0) = c_0$ و $y'(0) = c_1$ ثابت مفروض باشند، آنگاه هشت جمله اول معادله دیفرانسیل خطی و همگن $\frac{d^2y}{dx^2} - (1 + x^2)y = 0$ عبارت است از: (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + \frac{5x^6}{6!} + \cdots) + c_1(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{3}{5!}x^5 + \frac{5x^7}{7!} + \cdots)$
۲) $c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + \frac{6}{6!}x^6 + \cdots) + c_1(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{3}{5!}x^5 + \frac{7}{7!}x^7 + \cdots)$
۳) $c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + \frac{5}{6!}x^6 + \cdots) + c_1(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{3}{5!}x^5 + \frac{6}{7!}x^7 + \cdots)$
۴) $c_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \cdots) + c_1(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + \frac{3}{560}x^7 + \cdots)$

۹۱ـ معادله $4xy'' + 4y' + y = 0$ را در نظر می‌گیریم. کدام تابع در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟ (J_0 تابع بسل از مرتبه صفر می‌باشد.) (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $J_0(2x)$
۲) $J_0(\sqrt{x})$
۳) $J_0(\frac{\sqrt{x}}{2})$
۴) $J_0(2\sqrt{x})$

۹۲ـ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $4xy'' + 3y' + 3y = 0$ و $x > 0$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
۲) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
۳) $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $y_2(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
۴) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $y_2(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۹۳ـ اگر $a_n(r) = \frac{a_{n-1}(r)}{r+n}$ مقدار $a'_n(0)$ چیست؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{(-1)^{n+1}}{n!} a_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$
۲) $\frac{-a_0}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
۳) $\frac{a_0}{n!} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
۴) $\frac{(-1)^n}{n!} a_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

۹۴ـ اگر تابع بسل نوع اول از مرتبه p برابر $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$ باشد، آنگاه جواب عبارت $\int x J_0(x) dx$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (مجموعه مهندسی پلیمر (صنایع پلیمر، علوم تکنولوژی پلیمر) ـ سراسری ۸۴)

۱) $J_1(x)$
۲) $J_2(x)$
۳) $x J_1(x)$
۴) $x^2 J_1(x)$

۹۵ـ اگر A یک ماتریس معکوس پذیر باشد، آنگاه e^{At} برابر کدام گزینه است؟ (مجموعه مهندسی پلیمر (صنایع پلیمر، علوم تکنولوژی پلیمر) ـ سراسری ۸۴)

۱) $e^{At} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$
۲) $e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$
۳) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{k+1}}{k!}$
۴) $e^{At} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(At)^{k+1}}{k!}$

۹۶ـ حداقل شعاع همگرایی سری جواب $(x^2 + 3x - 4)y'' + xy' + y = 0$ حول $x = 0$ چیست؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۴)

۱) ۴
۲) $\sqrt{7}$
۳) $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
۴) $\sqrt{8}$

۹۷ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \cos xy - \sin xy$ و $y(0) = 0$ ضریب x^3 برابر است با: (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $-\frac{1}{6}$

۹۸ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \cos(x+y) + \sin(x+y)$ با شرط $y(0) = 0$ ضریب x^4 کدام است؟ (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{4!}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{12}$
۴) $-\frac{11}{12}$

۹۹ـ در بسط مک لورن حل معادله $y'' = \sin(x^2 - y^2) - e^{xy}$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ ضریب x^3 برابر است با: (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{4!}$
۲) $-\frac{1}{4!}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $-\frac{1}{12}$

۱۰۰ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}}$ برابر است با: (که در آن Γ همان تابع گاما است.)

(مهندسی مواد (جوشکاری، خوردگی و حفاظت مواد، سرامیک، شناسایی و انتخاب مواد مهندسی) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\Gamma(\frac{1}{2})$ ۲) $\Gamma(\frac{3}{4})$ ۳) $\Gamma(2)$ ۴) $\Gamma(\sqrt{2})$

۱۰۱ـ یک فرمول بازگشتی برای حل معادله $y'' - xy = 0$ حول $x = 0$ به روش سری توانی عبارت است از:

(مهندسی مواد (جوشکاری، خوردگی و حفاظت مواد، سرامیک، شناسایی و انتخاب مواد مهندسی) ـ آزاد ۸۴)

۱) $a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} a_n$ ۲) $a_n + a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$

۳) $a_{n+2} = \frac{1}{n-1} a_n$ ۴) $a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}$

۱۰۲ـ انتگرال داده شده را محاسبه کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

$$I = \int J_3(x)\,dx$$

۱) $I = -2J_2(x) - J_0(x) + c$ ۲) $I = -J_2(x) - 2x^{-1}J_1(x) + c$

۳) $I = -J_2(x) - 2xJ_1(x) + c$ ۴) $I = -J_1(x) - 2x^{-1}J_0(x) + c$

۱۰۳ـ در بسط مک‌لورن حل معادله $y' = \cos(x+y) + \sin(x+y)$ با شرط $y(0) = 0$ ، ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۰۴ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \cos xy - e^{xy}$ با شرط $y(0) = 1$ ضریب x^3 کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۰۵ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \cos xy - e^{xy}$ با شرط $y(0) = 1$ ضریب x^4 کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{4!}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $-\frac{1}{4!}$

۱۰۶ـ هرگاه معادله $y'' - 2xy' - 2y = 0$ را حول $x = 0$ به روش سری توانی حل کنیم، آنگاه یک فرمول بازگشتی بین ضرایب سری توانی عبارت است از: (مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) $a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}$ ۲) $a_n = \frac{2}{n+1} a_{n-1}$ ۳) $a_n = \frac{2}{n+2} a_{n-2}$ ۴) $a_n = \frac{2}{n-2} a_{n-4}$

۱۰۷ـ نقطه $x = 0$ برای معادله $2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$ یک نقطه:

(مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) تکین نامنظم است. ۲) عادی است. ۳) عادی منظم است. ۴) تکین منظم است.

۱۰۸ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \sin xy + e^{xy}$ و شرط $y(0) = 0$ ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۰۹ـ در بسط مک لورن حل معادله $y'' = \sin(x^2 - y^2) - e^{xy}$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ ضریب x^2 کدام است؟

(مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۱

۱۱۰ـ در بسط مک لورن حل معادله $y'' = \sin(x^2 - y^2) - e^{xy}$ با شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) صفر

۱۱۱ـ در بسط مک لورن حل معادله $y' = \cos xy + e^{xy}$ با شرایط $y(0) = 0$ ضریب x^3 کدام است؟

(مهندسی شیمی (مخازن هیدروکربوری) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۱۲ـ دو جواب مستقل معادله زیر به صورت کدامیک از صورتهای زیراند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$2xy'' + y' + xy = 0 \quad ; \quad x > 0$$

۱) $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۲) $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۴) $y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۱۱۳ـ در جواب مستقل معادله زیر به صورت کدام یک از صورتهای زیراند؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0 \quad , \quad x > 0$$

۱) $y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۲) $y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $y_2 = x^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۴) $y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۱۱۴ـ ضریب x^3 در بسط مک لورن حل معادله $y'' + xy' - 8y = 0$ و شرایط $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{7}{6}$ ۳) $-\frac{5}{6}$ ۴) $-\frac{7}{6}$

۱۱۵ـ اگر $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ و $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ به ترتیب دارای جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشند، آنگاه: (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2 dx = 0$ ۲) $\int_{-1}^{1} xy_1 y_2 dx = 0$ ۳) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2 dx = \frac{2}{5}$ ۴) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2 dx = \frac{2}{7}$

۱۱۶ـ اگر جواب معادله دیفرانسیل $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$ را در اطراف نقطه $x = 0$ جستجو کنیم آنگاه معادله شاخص: (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) دارای ریشه‌های ± 1 است. ۲) دارای ریشه مضاعف صفر است.

۳) دارای ریشه‌های ۰ و $\frac{1}{2}$ است. ۴) دارای ریشه‌های ۱- و $\frac{3}{5}$ است.

۱۱۷ـ جواب عمومی معادله زیر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

$$xy'' + 5y' + xy = 0 \quad ; \quad y = x^{-2}u$$

۱) $y = AJ_2(x) + BY_2(x)$

۲) $y = x^2(AJ_2(x) + BY_2(x))$

۳) $y = x^{-2}(AJ_{-2}(x) + BY_2(x))$

۴) $y = x^{-2}(AJ_2(x) + BY_2(x))$

۱۱۸ـ کدام یک از توابع جواب معادله $y'' + (e^x - \frac{9}{4})y = 0$ هستند؟ (راهنمایی: از تغییر متغیر $z = 2e^{\frac{x}{2}}$ استفاده کنید.) (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

۱) $J_{\frac{3}{2}}(e^{\frac{x}{2}})$

۲) $J_2(e^{\frac{x}{2}})$

۳) $J_2(2e^{\frac{x}{2}})$

۴) $J_{\frac{3}{2}}(2e^{\frac{x}{2}})$

۱۱۹ـ ضریب x^5 در بسط مک لورن جواب مسأله زیر کدام است؟ (مهندسی مکاترونیک ـ سراسری ۸۵)

$$y'' - y' + 2y = x^2 + x - 4 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$

۱) ۰

۲) $\frac{1}{120}$

۳) $\frac{19}{120}$

۴) ۱۹

۱۲۰ـ با تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$ معادله $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ را به کدام شکل تبدیل می‌کند؟ (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $2z\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + zy = 0$

۲) $z\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + zy = 0$

۳) $3z^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + zy = 0$

۴) $z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + zy = 0$

۱۲۱ـ اگر $y'' - 2xy' + 6y = 0$ و $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ به ترتیب جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را داشته باشند، آنگاه: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $\int_{-1}^{1} -xy_1y_2dx = 0$

۲) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = 0$

۳) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = \frac{2}{3}$

۴) $\int_{-1}^{1} y_1y_2dx = \frac{2}{5}$

۱۲۲ـ اگر $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ توابع نوع اول از مرتبه (به ترتیب) ν و $-\nu$ باشند $J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^{2m+\nu} m!\,\Gamma(m+\nu+1)}$ آنگاه: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx$ و $\frac{d}{dx}[x^\nu J_{-\nu}(x)] = -x^\nu J_{\nu-1}(x)$

۲) $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -2J_{\nu-1}(x) + c$ و $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^\nu J_{\nu+1}(x)$

۳) $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_\nu(x)$ و $\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = x^{-\nu} J_{\nu-1}(x)$

۴) $\int J_{\nu+1}(x)\,dx = \int J_{\nu-1}(x)\,dx - 2J_\nu(x)$ و $\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

۱۲۳ـ اگر به ازاء هر عدد صحیح نامنفی m ، $P_m(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر درجه m را نمایش دهد، آنگاه $\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^2)P_{2m+1}(x)dx$ به ازای $m > 1$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۴ـ اگر به ازای هر عدد صحیح نامنفی n ، $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر درجه‌ی n را نمایش دهد آنگاه مقدار $\int_0^{\pi} [P_1(\cos t)]^2 \sin t\,dt$ برابر است با: (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) صفر

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) ۲

۱۲۵ـ $x = 0$ و $x = 1$ برای معادله دیفرانسیل $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$ چه نقاطی هستند؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) هر دو نقطه‌ی غیرعادی منظم هستند.

۲) هر دو نقطه‌ی غیرعادی نامنظم هستند.

۳) $x = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی نامنظم و $x = 1$ یک نقطه غیرعادی منظم است.

۴) $x = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم و $x = 1$ یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

از آنجائیکه $a_2(0)=0$ و حدود $p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2x^4-5x}{2x^2}=-\frac{5}{2}$ و $q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{3x^2+2}{2x^2}=1$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{7}{2}r+1=0$ دارای ریشه‌هایی برابر $r=\frac{\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-4}}{2}=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{33})$ می‌باشد.

۲ـ گزینه «۳» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم با $p_0=\frac{1}{2}$ و $q_0=-\frac{1}{2}$ است و همچنین $r_1=1$ و $r_2=-\frac{1}{2}$، دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$، در رابطه $r_1-r_2=\frac{3}{2}\notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ ـ حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض بصورت سری فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی و با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_1=c_1x^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \& \quad y_2=c_2x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

۳ـ گزینه «۱» از آنجائیکه نقاط $x_0=0$ و $x_0=-1$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=(x+1)x$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور، نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و یا غیرمنظم بودن:

i) $x_0=0$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-(2x+1)}{(x+1)x}=-1\\ q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{2}{(x+1)x}=0\end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0=0$، یک نقطهٔ غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0=-1$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim_{x\to -1}(x+1)\cdot\frac{-(2x+1)}{(x+1)x}=-1\\ q_0=\lim_{x\to -1}(x+1)^2\cdot\frac{2}{(x+1)x}=0\end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_0=-1$ نیز، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۴ـ گزینه «۲» از آنجائیکه نقاط $x_0=0$ و $x_0=1$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=x^2(1-x)$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور، نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و یا غیرمنظم بودن؛

i) $x_0=0$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(1-x)}\\ q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{-1}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1-x}=-1\end{cases}$$

از آنجائیکه مقدار p_0 موجود و متناهی نیست، بنابراین $x_0=0$، یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0=1$ ؛

$$\begin{cases}p_0=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{1}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x^2}=-1\\ q_0=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\cdot\frac{-1}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2}=0\end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه نقطه $x_0=1$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۵ـ گزینه «۴» از آنجائیکه $J_n(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ است، با توجه به مفهوم جواب داریم:

$$x^2J_n''+xJ_n'+(x^2-n^2)J_n=0 \qquad ;(1)$$

از طرف دیگر؛ جواب $y_n=\phi(x)J_n(x)$ نیز باید در معادله دیفرانسیل مفروض صدق کند:

$$(y_n=\phi J_n \Rightarrow \quad y_n'=\phi'J_n+\phi J_n' \quad \& \quad y''=\phi''J_n+2\phi'J_n'+\phi J_n'')$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x^2y_n''+xy_n'+(x^2-n^2)y_n=0 \Rightarrow$$

$$x^2(\phi''J_n+2\phi'J_n'+\phi J_n'')+x(\phi'J_n+\phi J_n')+(x^2-n^2)(\phi J_n)=0 \Rightarrow$$

$$x^2\phi''J_n+2x^2\phi'J_n'+x\phi'J_n+\phi(x^2J_n''+xJ_n'+(x^2-n^2)J_n)=0$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساوی (۱)}} x^2\phi''J_n+2x^2\phi'J_n'+x\phi'J_n=0 \Rightarrow x^2\phi''J_n+\phi'(2x^2J_n'+xJ_n)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\phi''}{\phi'}=-(2\frac{J_n'}{J_n}+\frac{1}{x})\xrightarrow{\int(\text{طرفین تساوی})dx}\int\frac{\phi''}{\phi'}dx=-(2\int\frac{J_n'}{J_n}dx+\int\frac{1}{x}dx) \Rightarrow \text{Ln}\phi'=-(2\text{Ln}J_n+\text{Ln}x+\text{Ln}c) \Rightarrow$$

$$\text{Ln}\phi'=-(\text{Ln}J_n^2+\text{Ln}x+\text{Ln}c)=-\text{Ln}(J_n^2cx) \Rightarrow \text{Ln}\phi'=\text{Ln}(J_n^2cx)^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{Ln تابعی ۱-۱ است}} \phi'(x)=(cxJ_n(x))^{-1} \Rightarrow \frac{d\phi(x)}{dx}=\frac{1}{cxJ_n^2(x)} \Rightarrow d\phi(x)=\frac{1}{cxJ_n^2(x)}dx$$

$$\xrightarrow{\int(\text{طرفین تساوی})}\phi(x)=\int\frac{dx}{cxJ_n^2(x)}\xrightarrow{\text{با جایگذاری }c=1}\phi(x)=\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}$$

۶ـ گزینه «۲» با توجه به اینکه $a_۲(۰)=۱$ است، در نتیجه $x_۰=۰$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است:

$$(y=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y'=\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^{n-۱} \quad \& \quad y''=\sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل } y''-xy'=۰} \sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲}+\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^n=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+۲ \text{ در سری اول}} \sum_{n=-۲}^{\infty}(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}x^n-\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^n=۰ \Rightarrow$$

$$[۰+۰+\sum_{n=۰}^{\infty}(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}x^n]-\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^n=۰ \Rightarrow \sum_{n=۰}^{\infty}[(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}-na_n]x^n=۰ \Rightarrow$$

$$(n+۲)(n+۱)a_{n+۲}-na_n=۰ \quad ;n\geq ۰ \Rightarrow a_{n+۲}=\frac{na_n}{(n+۲)(n+۱)} \quad ;n\geq ۰$$

۷ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{y^{(n)}(۰)}{n!}x^n$، ضریب $x^۳$ از ضابطه $a_۳=\frac{y'''(۰)}{۳!}$ محاسبه می‌گردد؛

$$y''+(\sin x)y'+e^xy=۰ \quad ;(I)\xrightarrow{x=۰} y''(۰)+(\sin ۰)y'(۰)+e^۰y(۰)=۰ \Rightarrow y''(۰)+y(۰)=۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۱} y''(۰)+۱=۰ \Rightarrow y''(۰)=-۱$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'''+(\sin x)y''+(\cos x)y'+e^xy'+e^xy=۰ \xrightarrow{x=۰} y'''(۰)+(\sin ۰)y''(۰)+(\cos ۰)y'(۰)+e^۰y'(۰)+e^۰y(۰)=۰ \Rightarrow$$

$$y'''(۰)+y'(۰)+y'(۰)+y(۰)=۰ \xrightarrow{y(۰)=y'(۰)=۱} y'''(۰)+۳=۰ \Rightarrow y'''(۰)=-۳ \Rightarrow a_۳=\frac{y'''(۰)}{۳!}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

۸ـ گزینه «۴»

$$y''+y+y^۳=\cos x \quad ;(I)\xrightarrow{x=۰} y''(۰)+y(۰)+(y(۰))^۳=\cos ۰ \xrightarrow{y(۰)=۰} y''(۰)=۱$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'''+y'+۳y'y^۲=-\sin x \xrightarrow{x=۰} y'''(۰)+y'(۰)+۳y'(۰)(y(۰))^۲=-\sin ۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۰ \ \& \ y'(۰)=۱} y'''(۰)+۱+۳(۱)(۰)=۰ \Rightarrow y'''(۰)=-۱$$

در نتیجه بسط مک لورن $y(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$y(x)=y(۰)+y'(۰)x+\frac{y''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{y'''(۰)}{۳!}x^۳+\cdots=۰+x+\frac{۱}{۲!}x^۲+\frac{-۱}{۳!}x^۳+\cdots \Rightarrow y(x)=x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۶}+\cdots$$

۹ـ گزینه «۴» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله دیفرانسیل لژاندر است. و معادله دیفرانسیل لژاندر نیز در فاصله $-۱<x<۱$ همگراست.

۱۰ـ گزینه «۳» از آنجائیکه نقاط $x_۰=۰$ و $x_۰=۱$ ریشه‌های تابع $a_۲(x)=x^۲-x$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و غیرمنظم بودن؛

i) $x_۰=۰$ ؛

$$\begin{cases} p_۰=\lim_{x\to ۰}x\cdot\frac{۱}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x-۱}=-۱ \\ q_۰=\lim_{x\to ۰}x^۲\cdot\frac{\frac{۱}{x^۲}}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲-x}=۰ \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به اینکه مقدار $q_۰$ موجود متناهی نیست، $x_۰=۰$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_۰=۱$ ؛

$$\begin{cases} p_۰=\lim_{x\to ۱}(x-۱)\cdot\frac{۱}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{x}=۱ \\ q_۰=\lim_{x\to ۱}(x-۱)^۲\cdot\frac{\frac{۱}{x^۲}}{x^۲-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x^۳}=۰ \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_۰=۱$، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۱۱ـ گزینه «۴»

$$y''+y+y^۳=\cos ۱۰x \quad ;(I)\xrightarrow{x=۰} y''(۰)+y(۰)+y^۳(۰)=\cos ۰ \xrightarrow{y(۰)=۰} y''(۰)+۰+۰=۱ \Rightarrow y''(۰)=۱$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'''+y'+۳y'y^۲=-۱۰\sin ۱۰x \xrightarrow{x=۰} y'''(۰)+y'(۰)+۳y'(۰)y^۲(۰)=-۱۰\sin ۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۰ \ \& \ y'(۰)=۱} y'''(۰)+۱\neq ۰+۰ \Rightarrow y'''(۰)=-۱$$

$$\xrightarrow{y=\sum\frac{y^{(n)}(۰)}{n!}x^n \text{ با توجه به بسط}} y=y(۰)+\frac{y'(۰)}{۱!}x+\frac{y''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{y'''(۰)}{۳!}x^۳+\cdots \Rightarrow y=۰+x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۶}+\cdots$$

۱۲ـ گزینه «۲» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_۰=۰$ یک نقطهٔ غیرعادی منظم است. با جایگذاری $p_۰=\lim_{x\to ۰}x\cdot\frac{۳x-۱}{x(x-۱)}=۱$ و $q_۰=\lim_{x\to ۰}x^۲\cdot\frac{۱}{x(x-۱)}=۰$ در معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^۲+(p_۰-۱)r+q_۰=r^۲=۰$، ریشه‌های شاخصی بصورت مضاعف و برابر $r=۰$ بدست می‌آیند. در نتیجه طبق قضیه II. یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض بصورت سری فروبنوسی $y_۱=x^۰\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ است:

$$(y_۱=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow y_۱'=\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^{n-۱} \quad \& \quad y_۱''=\sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۲})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x(x-۱)y''+(۳x-۱)y'+y=x^۲y''-xy''+۳xy'-y'+y=۰ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^n-\sum_{n=۰}^{\infty}n(n-۱)a_nx^{n-۱}+\sum_{n=۰}^{\infty}۳na_nx^n-\sum_{n=۰}^{\infty}na_nx^{n-۱}+\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n=۰ \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}3na_n x^n - \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^2 a_n - (n+1)^2 a_{n+1}]x^n = 0 \Rightarrow (n+1)^2 a_n - (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \;;\; n \geq 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = a_n \;\; ; n \geq 0 \Rightarrow a_n = a_0 \;\; ; n \geq 0$$

$$\xrightarrow{y=\sum a_n x^n \text{ با جایگذاری در}} y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{\sum x^n = \frac{1}{1-x} \text{ با فرض } a_0=1 \text{ و با توجه به بسط}} y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

که با توجه به فرمول (۲ـ۲۲) در فصل دوم، جواب دوم مستقل این معادله بصورت مضربی تابعی با نمایش $y_2 = uy_1 = \frac{1}{1-x}u$ می‌باشد،

که با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

۱۳ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x^2} a_2(0) = 0 \Rightarrow \left(p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{0}{x^2} = 0 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{x^2 + \frac{5}{36}}{x^2} = \frac{5}{36}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r + \frac{5}{36} = 0$$

۱۴ـ گزینه «۱»

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}} \xrightarrow{-Lnx=t \text{ با تغییر متغیر}} \begin{cases} \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & x\to 0^+ & 1 \\ \hline t=-Lnx & t\to -\infty & 0 \end{array} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}} = \int_{+\infty}^{0} \frac{-e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}dt \xrightarrow{\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt=\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-Lnx}} = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

۱۵ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم با $p_0 = \frac{2}{3}$ و $q_0 = 0$ است و هم چنین $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = 0$ ، ریشه‌های معادله شاخصی متناظر $r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ ، در رابطه $r_1 - r_2 = \frac{1}{3} \notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{II}$ ـ حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض بصورت سری فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی و با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_1 = c_1 x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \& \quad y_2 = c_2 x^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۱۶ـ گزینه «۴» از آنجائیکه نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$ ریشه‌های تابع $a_2(x) = x^2(x-1)^3$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و غیرمنظم بودن؛

i) $x_0 = 0$ ؛

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x(x-1)^2}{x^2(x-1)^3} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{(x-1)} = -1 \\ q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)^3} = -1 \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0 = 0$ ، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0 = 1$ ؛

$$\begin{cases} p_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{x(x-1)^2}{x^2(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1 \\ q_0 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2\cdot\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2(x-1)} \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به اینکه مقدار q_0 موجود و متناهی نیست، $x_0 = 1$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۱۷ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\sin x = t} \begin{cases} \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \hline t=\sin x & -1 & 1 \end{array} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x P_n(\sin x)dx = \int_{-1}^{1} t\,P_n(t)dt$$

$$\xrightarrow{t=P_1(t) \text{ با توجه به تساوی}} I = \int_{-1}^{1} P_1(t)P_n(t)dt \xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} I = 0$$

یادآوری. ۱ـ با توجه به فرمول رودریگرز داریم:

$$P_\nu(t) = \frac{1}{2^\nu \nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dt^\nu}(t^2-1)^\nu \;\; ; \nu \in Z^+ \xrightarrow{\nu=1} P_1(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(t^2-1) \Rightarrow P_1(t) = t$$

۲ـ (قضیه تعامد لژاندر) مجموعه چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(t)$; $\nu \geq 0$ در فاصله $[-1,1]$ متعامد هستند:

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(t)\,P_w(t)\,dt = \begin{cases} 0 & ; \nu \neq w \\ \frac{2}{2\nu+1} & ; \nu = w \end{cases}$$

۱۸ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)} \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \Gamma(\tfrac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۹ـ گزینه «۳»

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} (1-x)y' + y = x + 1 \Rightarrow$$

$$y' - xy' + y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + 1 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+1\mapsto n \text{ در سری اول}} \sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = x+1 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n]x^n = x+1 \quad \Rightarrow \quad (n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n = 0 \quad ;n\geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n = 0 \quad ;n\geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$(a_1+a_0)x^0 + (2a_2)x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n]x^n = x+1 \qquad ;n\geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1+a_0 = 1 \\ 2a_2 = 1 \ \Rightarrow \ a_2 = \frac{1}{2} & \text{(دستگاه بازگشتی متناظر)} \\ (n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n = 0 \qquad ;n\geq 2 \end{cases}$$

اکنون با توجه به نمایش $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و تساوی $y(0)=0$ بدست می‌آوریم:

$$y(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n \ \Rightarrow \ y(0)=a_0+0 \xrightarrow{y(0)=0} a_0=0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در دستگاه بازگشتی متناظر}} (a_1=1-a_0=1 \quad \& \quad a_2=\frac{1}{2} \quad \& \quad a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n \quad ;n\geq 2) \ \Rightarrow$$

$$n=2; \quad a_{2+1}=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3!} \qquad a_3=\frac{(3-2)!}{3!}$$

$$n=3; \quad a_{3+1}=\frac{2}{4}a_3=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3!}=\frac{2}{4!} \quad \Rightarrow \quad a_4=\frac{(4-2)!}{4!}$$

$$n=4; \quad a_{4+1}=\frac{3}{5}a_4=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4!}=\frac{3\times 2}{5!} \qquad a_5=\frac{(5-2)!}{5!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n=\frac{(n-2)!}{n!} \qquad ;n\geq 2$$

$$\xrightarrow{y=\sum a_nx^n \text{ با جایگذاری در}} y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=0+x+\frac{1}{2}x^n+\cdots+\frac{(n-2)!}{n!}x^n+\cdots$$

برای تعیین شعاع همگرایی، با توجه به رابطه بازگشتی متناظر و آزمون دالامبر داریم:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n+1}\right|=1 \ \Rightarrow \ R=1 \qquad \text{(شعاع همگرایی)}$$

لازم بذکر است، معادله دیفرانسیل مفروض را می‌توان با روش معادلات خطی مرتبه اول نیز حل کرد.

۲۰ـ گزینه «۱» از آنجائیکه $a_2(0)=0$ و حدود $p_0=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{-4}{3x(3x+2)}=-\frac{2}{3}$ و $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{4}{3x(3x+2)}=0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخص متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{5}{3}r=0$ دارای ریشه‌هایی برابر $r_1=\frac{5}{3}$ و $r_2=0$ می‌باشد.

۲۱ـ گزینه «۴» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم با $p_0=3$ و $q_0=1$ است و هم‌چنین معادله شاخص متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2+2r+1=0$ دارای ریشه مضاعف $r=-1$ می‌باشد. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ ـ حالت دوم، جواب اول معادله دیفرانسیل مفروض بصورت سری فروبنوسی متناظر ریشه مضاعف شاخصی و با نمایش $y_1(x)=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و جواب آن دارای طبیعت لگاریتمی با نمایش $y_2(x)=y_1(x)\text{Ln}x+x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ خواهد بود.

۲۲ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تعریف تابع گاما}} \int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\Gamma(\alpha) \xrightarrow{\alpha=n+1} \int_0^{\infty}e^{-x}x^ndx=\Gamma(n+1)=n!$$

۲۳ـ گزینه «۲» طبق خواص توابع بسل نوع اول.

۲۴ـ گزینه «۱»

$$(y=xu \ \Rightarrow \quad y'=u+xu' \quad \& \quad y''=2u'+xu'')$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} xy''-y'+xy=x(xu''+2u')-(u+xu')+x(xu)=0 \ \Rightarrow$$

$$x^2u''+xu'+(x^2-1)u=0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، یک معادله دیفرانسیل بسل مرتبه ۱ نسبت به u است، در نتیجه جواب عمومی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$u=c_1J_1(x)+c_2Y_1(x) \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} y=x(c_1J_1(x)+c_2Y_1(x))$$

۲۵ـ گزینه «۳» از آنجائیکه $a_2(0)=0$ و حدود $p_0=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{-3x}{x^2}=-3$ و $q_0=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{x+4}{x^2}=4$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخص متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)+q_0=r^2-4r+4=0$ دارای ریشه مضاعف $r=2$ می‌باشد.

۲۶ـ گزینه «۱»

$$I=\int_{-1}^{1}(x+1)P_0(x)\,dx \xrightarrow{P_0(x)=1} I=\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=2-0=2$$

یادآوری. با توجه به فرمول رودریگرز داریم:

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu \qquad ;\nu\in Z^+ \xrightarrow{\nu=0} P_0(x)=1$$

۲۷ـ گزینه «۳» با توجه به اینکه g یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض است در نتیجه طبق مفهوم جواب تساوی $g''+gg'-x^3=0$ برقرار است. در اینصورت؛

$$g''+gg'-x^3=0 \quad ;(1) \xrightarrow{x=-1} g''(-1)+g(-1)g'(-1)-(-1)^3=0 \ \Rightarrow g''(-1)+g(-1)g'(-1)=-1$$

$$\xrightarrow{g(-1)=1 \ \& \ g'(-1)=2} g''(-1)+(1)(2)=-1 \ \Rightarrow \ g''(-1)=-3$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} g''' + gg'' + g'^{2} - 3x^{2} = 0 \xrightarrow{x=-1} g'''(-1) + g(-1)g''(-1) + (g'(-1))^{2} - 3(-1)^{2} = 0 \Rightarrow$$

$$g'''(-1) + g(-1)g''(-1) + +(g'(-1))^{2} = 3$$

$$\xrightarrow{g(-1)=1 \ \& \ g'(-1)=2 \ \& \ g''(-1)=-3} g'''(-1) + (1)(-3) + (2)^{2} = 3 \Rightarrow g'''(-1) = 2$$

۲۸ـ گزینه «۱»

$$e^{-x}y'' + xy' + y = 3 \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} e^{0}y''(0) + (0)y'(0) + y(0) = 3 \Rightarrow y''(0) + y(0) = 3$$

$$\xrightarrow{y(0)=0} y''(0) + 0 = 3 \Rightarrow y''(0) = 3$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} e^{-x}y''' - e^{-x}y'' + xy'' + 2y' = 0 \xrightarrow{x=0} e^{0}y'''(0) - e^{0}y''(0) + (0)y''(0) + 2y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{y'(0)=1 \ \& \ y''(0)=3} y'''(0) - 3 + 2(1) = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1$$

۲۹ـ گزینه «۱» یادآوری. با اعمال تغییر متغیر $t = \zeta x$ ، معادله دیفرانسیل $x^{2}y'' + xy' + (\zeta^{2}x^{2} - \lambda^{2})y = 0 \quad ; \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ به معادله دیفرانسیل بسل مرتبه λ و از آنجا جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 J_\lambda(\zeta x) + c_2 Y_\lambda(\zeta x)$ بدست می‌آید.

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^{2}y'' + xy' + (9x^{2} - 4)y = 0$ ، با فرض $\zeta = 3$ و $\lambda = 2$، به صورت $y = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$ محاسبه می‌گردد.

۳۰ـ گزینه «۱» حل اول:

معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $xy'' + (1 + 2\xi)y' + xy = 0 \quad ; \xi \in \mathbb{R}$ ، با فرض $\xi = -1$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $y = x^{-\xi}u = xu$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = |\xi| = 1$ تبدیل و جواب عمومی آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y = x^{-\xi}(c_1 J_{|\xi|}(x) + c_2 Y_{|\xi|}(x) \xrightarrow{\xi=-1} y = x(c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x))$$

حل دوم:

$$(y = xu \Rightarrow y' = xu' \quad \& \quad y'' = xu'' + 2u')$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} xy'' - y' + xy = x(xu'' + 2u') - (xu' + u) + x(xu) = x^{2}u'' + xu' + (x^{2} - 1)u = 0$$

معادله حاصل، معادله دیفرانسیل بسل مرتبه ۱ است و در نتیجه جواب عمومی آن به صورت زیر برحسب توابع بسل نوشته می‌شود:

$$u = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x) \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} y = x(c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x))$$

۳۱ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{a_2(x)=3x} a_2(0) = 0 \Rightarrow (p_0 = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^{2} \cdot \frac{-1}{3x} = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^{2} + (p_0 - 1)r + q_0 = r^{2} - \frac{2}{3}r = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{2}{3}, \ r_2 = 0$$

۳۲ـ گزینه «۱» یادآوری. چند جمله‌ایهای لژاندر مرتبه فرد، توابعی فرد هستند. در نتیجه؛

$$(P_{2k+1}(x): \text{تابعی فرد} \quad \& \quad x^{4} - 2x^{2}: \text{تابعی زوج}) \Rightarrow ((x^{4} - x^{2})P_{2k+1}(x): \text{تابعی فرد})$$

$$\xrightarrow{(f: \text{تابع فرد}) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f dx = 0} \int_{-1}^{1} (x^{4} - x^{2})P_{2k+1}(x)dx = 0$$

۳۳ـ گزینه «۴» حل اول:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} y' + 2xy = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow [0 + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1}] + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} + 2a_n]x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)a_{n+2} + 2a_n]x^{n+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n \quad ; n \geq 0$$

در اینصورت؛

$$\text{i) } a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad ; k \geq 0 \quad \&$$

$$\text{ii) } a_0 = a_0 \qquad a_{2\times 0} = \frac{(-1)^{0}}{0!}a_0$$

$$n = 0; \quad a_2 = -\frac{2}{2}a_0 = -a_0 \qquad a_{2\times 1} = \frac{(-1)^{1}}{1!}a_0$$

$$n = 2; \quad a_4 = -\frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}a_0 \Rightarrow a_{2\times 2} = \frac{(-1)^{2}}{2!}a_0$$

$$n = 4; \quad a_6 = -\frac{2}{6}a_4 = -\frac{1}{6}a_0 \qquad a_{2\times 3} = \frac{(-1)^{3}}{3!}a_0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k}}{k!}a_0 \quad ; k \geq 0$$

در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} = \sum_{n=2k} a_n x^{n} + \sum_{n=2k+1} a_n x^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساویهای (i) ، (ii)}} y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k!}x^{2k} + 0$$

حل دوم: از طرفی با توجه به بسط مک لورن $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ می‌توان بدست آورد:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{x \mapsto -x^2} e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^k}{k!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شونده}} \int \frac{dy}{y} = \int -2xdx \Rightarrow Lny = e^{-x^2} + c \Rightarrow$$

$$y = e^{-x^2+c} = e^{-x^2} e^c = a_0 e^{-x^2} \quad ; (e^c = a_0) \xrightarrow{\text{با توجه به تساوی (۱)}} y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$$

۳۴ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ، ضریب x^4 از ضابطه $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!}$ بدست می‌آید:

$$y' + (\sin x)y = 0 \; ; (I) \xrightarrow{x=0} y'(0) + (\sin 0)y(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0 \; ; (II) \xrightarrow{x=0} y''(0) + (\sin 0)y'(0) + (\cos 0)y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} y''(0) + (1)(1) + 0 = 0 \Rightarrow y''(0) = -1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y''' + (\sin x)y'' + 2(\cos x)y' - (\sin x)y = 0 \; ; (III) \xrightarrow{x=0} y'''(0) + (\sin 0)y''(0) + 2(\cos 0)y'(0) - (\sin 0)y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(III)} y^{(4)} + (\sin x)y''' + 3(\cos x)y'' - 3(\sin x)y' - (\cos x)y = 0$$

$$\xrightarrow{x=0} y^{(4)}(0) + (\sin 0)y'''(0) + 3(\cos 0)y''(0) - 3(\sin 0)y'(0) - (\cos 0)y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y''(0)=-1 \;\&\; y(0)=1} y^{(4)}(0) + 0 + 3(1)(-1) - 0 - (1)(1) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{4}{4!} = \frac{1}{6}$$

۳۵ـ گزینه «۲» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ، ضریب x^2 با ضابطه $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ محاسبه می‌گردد؛

$$(x^2+1)y'' - e^x y' + y = 0 \xrightarrow{x=0} y''(0) - y'(0) + y(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \;\&\; y'(0)=1} y''(0) - 1 + 1 = 0 \Rightarrow y''(0) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2} = 0$$

۳۶ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y' = x^2 + y^2 \; ; (I) \xrightarrow{x=0} y'(0) = 0 + y^2(0) \Rightarrow y'(0) = y^2(0) \xrightarrow{y(0)=1} y'(0) = 1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' = 2x + 2yy' \; ; (II) \xrightarrow{x=0} y''(0) = 2(0) + 2y(0)y'(0) \Rightarrow y''(0) = 2y(0)y'(0) \xrightarrow{y(0)=1 \;\&\; y'(0)=1} y''(0) = 2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y''' = 2 + 2yy'' + 2y'^2 \xrightarrow{x=0} y'''(0) = 2 + 2y(0)y''(0) + 2(y'(0))^2$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \;\&\; y'(0)=1 \;\&\; y''(0)=2} y''(0) = 2 + 2(1)(2) + 2(1)^2 = 8 \Rightarrow y'''(0) = 8 \Rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۳۷ـ گزینه «۱» بـا جایـگذاری مقادیـر $p_0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1$ و $q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$ ، در معـادله شاخـصی متنـاظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1) + q_0 = r^2 = 0$ ، ریشه‌های شاخص بصورت مضاعف و برابر $r = 0$ بدست می‌آیند.

۳۸ـ گزینه «۲»

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \xrightarrow{n=4} P_4(x) = \frac{1}{2^4 4!} \cdot \frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^4 = \frac{1}{16 \times 24} \cdot \frac{d^4}{dx^4}(x^8 - 4x^6 + 6x^2 + 1) \Rightarrow$$

$$P_4(x) = \frac{1}{16 \times 24} \cdot (8 \times 7 \times 6 \times 5x^4 - 4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3x^2 + 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 = P_4(x) + \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{8} \Rightarrow x^4 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{8}{35} \times \frac{15}{4}x^2 - \frac{8}{35} \times \frac{3}{8}$$

با توجه به ضریب P_4 تنها گزینه صحیح (۲) است.

۳۹ـ گزینه «۲» معادلـه دیفرانـسیل مفـروض، از دسـته معـادلات قابـل تبـدیل بـه معادلـه بـسل بـا نمـایش عمـومی $y = x^{-\xi}z = xz$ به معادله بسل مرتبه $xy'' + (1+2\xi)y' + xy = 0$ ؛ $\xi \in IR$ ، با فرض $\xi = -1$ است. در نتیجه با اعمال تغیر متغیر $\lambda = |\xi| = 1$ تبدیل می‌شود.

۴۰ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\Gamma(n)=(n-1)! \;;n \in IN} \Gamma(5) = 4! = 24$$

۴۱ـ گزینه «۱» از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حـدود $p_0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{6}{4x} = \frac{3}{2}$ و $q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{1}{4x} = 0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 + \frac{1}{2}r = 0$ دارای ریشه‌های $r = 0, \frac{-1}{2}$ می‌باشد.

۴۲ـ گزینه «۳» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانـیل مفروض با $p_0 = \frac{2}{3}$ و $q_0 = 0$ است. و هـمچنین $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = 0$ ، دو ریـشه معـادله شاخـصی متنـاظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ ، در رابطـه $r_1 - r_2 = \frac{1}{3} \notin Z$ صـدق مـی‌کننـد. در اینـصورت طبـق قـضیه II ـ حالـت اول. هـر دو جـواب مـستقل معادلـه دیفرانـسیل $3x(x+1)y'' + 2(x+1)y' + 4y = 0$ ، بصورت سری فروبنوسی و متناظر با ریشه‌های شاخصی با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_1 = c_1 x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \& \quad y_2 = c_2 x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۴۳ـ گزینه «۲» با توجه به خواص تابع گاما.

۴۴ـ گزینه «۳» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = -\frac{2}{3}$ و $q_0 = 0$ است. و همچنین $r_1 = \frac{5}{3}$ و $r_2 = 0$ ، دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{5}{3}r = 0$ ، در رابطه $r_1 - r_2 = \frac{5}{3} \notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$ ـ حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $3x(2+3x)y'' - 4y' + 4y = 0$ ، بصورت سری فروبینوسی و متناظر با ریشه‌های شاخصی با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_1 = c_1 x^{\frac{5}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = c_2 x^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۴۵ـ گزینه «۲»

۴۶ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطهٔ $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد؛

$$y'' - (x^2+1)y = 0 \ ;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0) - (0+1)y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) - y(0) = 0 \xrightarrow{y(0)=-2} y''(0) + 2 = 0 \Rightarrow y''(0) = -2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' - (x^2+1)y' - 2xy = 0 \xrightarrow{x=0} y'''(0) - (0+1)y'(0) - 2(0)y(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) - y'(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y'(0)=2} y'''(0) - 2 = 0 \Rightarrow y'''(0) = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۴۷ـ گزینه «۴» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 0$ و $q_0 = \frac{1}{4}$ است.

در اینصورت، طبق قضیه $\overline{\text{II}}$، یک جواب معادله دیفرانسیل مفروض به صورت سری فروبینوسی با نمایش $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است، که در آن r ریشه بزرگتر معادله شاخصی متناظر است:

$$f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در } y = x^r \sum a_n x^n} y = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

۴۸ـ گزینه «۴» معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله خطی همگن مرتبه دوم است، که $y = J_P(x)$ یک جواب آن می‌باشد. با توجه به فرمول (۲ـ۲۲) که در فصل دوم اشاره گردید، جواب دوم مستقل این معادله دیفرانسیل بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx = J_P(x) \int \frac{1}{J_p^2(x)} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx = J_P(x) \int \frac{1}{J_P^2(x)} e^{-Lnx} dx \Rightarrow$$

$$y_2 = J_P(x) \int \frac{1}{J_P^2(x)} \times \frac{1}{x} dx \Rightarrow y_2 = J_P(x) \int \frac{dx}{x J_P^2(x)}$$

۴۹ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (4 - \frac{1}{x^2})y = 0 \xrightarrow{x^2 \times (\text{معادله})} x^2y'' + xy' + (4x^2 - 1)y = 0$$

یادآوری. با اعمال تغییر متغیر $t = \zeta x$ ، معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (\zeta^2x^2 - \lambda^2)y = 0 \ ; \lambda \geq 0$ به معادله دیفرانسیل بسل مرتبه λ و از آنجا جواب عمومی آن از ضابطه $y = c_1 J_\lambda(\zeta x) + c_2 Y_\lambda(\zeta x)$ بدست می‌آید.

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + (4x^2 - 1)y = 0$ ، با فرض $\zeta = 2$ و $\lambda = 1$ ، بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$y = c_1 J_1(2x) + c_2 Y_1(2x)$$

تذکر. این تست غلط است و دلیل آن این است که توابع بسل $J_n(x)$ و $J_{-n}(x) \ ; n \in \mathbb{N}$ مستقل خطی نیستند و در نتیجه نمی‌توانند جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل مرتبه n را تشکیل دهند. در حالت $n \in \mathbb{N}$ ، معادله دیفرانسیل مرتبه n ، $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ دارای جواب عمومی بصورت $y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$ می‌باشد.

۵۰ـ گزینه «۴» با توجه به قضیه تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر.

۵۱ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=9x^2} a_2(0) = 0 \Rightarrow (p_0 = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{9(x^2+x)}{9x^2} = 1 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{12x-1}{9x^2} = -\frac{1}{9})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0 - 1) + q_0 = r^2 - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$$

۵۲ـ گزینه «۴» با توجه به اینکه $a_2(0) = 1$ است، بنابراین نقطهٔ $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است:

$$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل } y''+x^2y=0} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+4 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-4}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+4}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$[0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+4}x^{n+2}] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4)(n+3)a_{n+4} + a_n]x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ (n+4)(n+3)a_{n+4} + a_n = 0 \quad ; n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_{n+4} = \frac{-a_n}{(n+4)(n+3)} \quad ; n \geq 0$$

۵۳ـ گزینه «۳» از آنجائیکه نقاط $x=0$ و $x=2$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=(x-2)x^2$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و غیرمنظم بودن؛

i) $x_0=0$ ؛

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\dfrac{-\sin x}{(x-2)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{(x-2)x}=\dfrac{1}{2} \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\dfrac{1}{(x-2)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0=0$، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0=2$ ؛

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\dfrac{-\sin x}{(x-2)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{x^2}=\dfrac{-\sin 2}{4} \\ q_0=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\cdot\dfrac{1}{(x-2)x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2}=0 \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0=2$ نیز، یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۵۴ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{a_2(x)=2x^2} a_2(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \left(p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x(x-1)}{2x^2}=-\frac{1}{2} \quad\&\quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=1\ ,\ r_2=\frac{1}{2}$$

۵۵ـ گزینه «۳» یادآوری. چند جمله‌ایهای لژاندر مرتبه زوج $P_{2k}(x)$ ، توابعی زوج هستند. در نتیجه؛

$$(P_2(x):\ \text{تابعی زوج} \quad\&\quad x^3:\ \text{تابع فرد}) \Rightarrow (x^3P_2(x):\ \text{تابعی فرد})$$

$$\xrightarrow{(f:\ \text{تابعی فرد})\ \Rightarrow \int_{-a}^{a} f\,dx=0} \int_{-1}^{1} x^3P_2(x)\,dx=0$$

۵۶ـ گزینه «۳» یادآوری. با اعمال تغییر متغیر $z=\zeta x$ ، معادله دیفرانسیل با نمایش عمومی $x^2y''+xy'+(\zeta^2x^2-\lambda^2)y=0\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}^+$ به معادله دیفرانسیل بسل مرتبه λ و از آنجا جواب عمومی آن از ضابطه $y=c_1J_\lambda(\zeta x)+c_2Y_\lambda(\zeta x)$ بدست می‌آید.

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(25x^2-\frac{9}{4})y=0$، با فرض $\zeta=5$ و $\lambda=\frac{3}{2}$ ، بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$y=AJ_{\frac{3}{2}}(5x)+BY_{\frac{3}{2}}(5x) \xrightarrow{\lambda\notin Z\ \Rightarrow\ Y_\lambda=J_{-\lambda}} y=AJ_{\frac{3}{2}}(5x)+BJ_{-\frac{3}{2}}(5x)$$

۵۷ـ گزینه «۱» با توجه به اینکه $a_2(0)=1$ است، بنابراین نقطهٔ $x_0=0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض است:

$$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad\Rightarrow\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad\&\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل } y''+xy=0} \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+3 \text{ در سری اول}} \sum_{n=-3}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$[0+0+2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}]+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+3)(n+2)a_{n+3}+a_n]x^{n+1}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2=0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3}+a_n=0 \quad ;n\geq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad a_{n+3}=-\frac{a_n}{(n+3)(n+2)} \quad ;n\geq 0$$

ظاهراً رابطه بازگشتی متناظر بدست آمده، در هیچ گزینه‌ای مطرح نشده است امّا با تبدیل $n\mapsto n-1$ رابطه بازگشتی $a_{n+2}=-\dfrac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ بدست می‌آید که همان گزینه (۱) می‌باشد.

۵۸ـ گزینه «۱»

$$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad\Rightarrow\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad\&\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} y''-2xy'+y=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{n\mapsto n+2 \text{ با تبدیل}} \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n-1)a_n]x^n=0 \quad\Rightarrow\quad a_{n+2}=\frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n \quad ;n\geq 0 \quad\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{n=0} a_2=-\frac{a_0}{2} \quad ;\xrightarrow{n=1} a_3=\frac{a_1}{6} \quad\&$$

$$\xrightarrow{n=2} a_4=\frac{3}{12}a_2=-\frac{3}{4!}a_0 \quad ;\xrightarrow{n=3} a_5=\frac{1}{4!}a_1$$

۵۹ـ گزینه «۲» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^2 با ضابطه $a_2=\dfrac{y''(0)}{2!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'=x^2+y^2+y \quad ;(I) \quad\xrightarrow{x=0}\quad y'(0)=0+y(0)^2+y(0) \xrightarrow{y(0)=2} y'(0)=4+2=6$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''=2x+2y'y+y' \xrightarrow{x=0} y''(0)=0+2y'(0)y(0)+y'(0) \xrightarrow{y(0)=2\ \&\ y'(0)=6} y''(0)=2(6)(2)+6=30 \Rightarrow$$

$$a_2=\frac{y''(0)}{2!}=\frac{30}{2}=15$$

۶۰ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب x^4 از ضابطه $a_4=\frac{y^{(4)}(0)}{4!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y''=2e^{-x}y+y \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0)=2e^0y(0)+y(0) \Rightarrow y''(0)=3y(0) \xrightarrow{y(0)=1} y''(0)=3$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'''=2e^{-x}y'-2e^{-x}y+y' \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y'''(0)=2e^0y'(0)-2e^0y(0)+y'(0) \Rightarrow y'''(0)=3y'(0)-2y(0)$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=1} y'''(0)=3-2 \Rightarrow y'''(0)=1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y^{(4)}=2e^{-x}y''+y''-4e^{-x}y'+2e^{-x}y \xrightarrow{x=0} y^{(4)}(0)=2e^0y''(0)+y''(0)-4e^0y'(0)+2e^0y(0) \Rightarrow$$

$$y^{(4)}(0)=3y''(0)-4y'(0)+2y(0) \xrightarrow{y(0)=y'(0)=1 \ \&\ y''(0)=3} y^{(4)}(0)=3(3)-4(1)+2(1) \Rightarrow y^{(4)}(0)=7 \Rightarrow$$

$$a_4=\frac{y^{(4)}(0)}{4!}=\frac{7}{24}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۱ـ گزینه «۴» از آنجائیکه نقاط $x_0=0$ و $x_0=-3$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=x^2(x+3)$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و غیرمنظم بودن؛

i) $x_0=0$ ؛

$$\begin{cases} p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-4(x+3)}{x^2(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{x} \\ q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{-9x}{x^2(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-9x}{x+3}=0 \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به اینکه مقدار مقدار p_0 موجود و متناهی نیست، $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0=-3$ ؛

$$\begin{cases} p_0=\lim_{x\to -3}(x+3)\cdot\frac{-4(x+3)}{x^2(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{-4(x+3)}{x^2}=0 \\ q_0=\lim_{x\to -3}(x+3)^2\cdot\frac{-9x}{x^2(x+3)}=\lim_{x\to -3}-9x(x+3)=0 \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین نقطه $x_0=-3$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

◆ ◆ ◆ ◆

۶۲ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=\sin x} a_2(0)=0 \Rightarrow (p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{\sin x}=1 \quad \& \quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{-\sin x}{\sin x}=0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2=0 \Rightarrow r=0,0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۳ـ گزینه «۱» از یک طرف طبق قضیه رودریگز داریم:

$$P_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\nu!}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}(x^2-1)^\nu \quad ;\nu\in Z^+ \xrightarrow{\nu=1} P_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1) \Rightarrow P_1(x)=x$$

در اینصورت؛

$$I=\int_{-1}^{1} x\,P_1(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x\times x\,dx=\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3}) \Rightarrow I=\frac{2}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۴ـ گزینه «۱»

$$I=\int_{-1}^{1}(x^3-1)P_2(x)dx=\underbrace{\int_{-1}^{1}x^3P_2(x)dx}_{I_1}-\underbrace{\int_{-1}^{1}P_2(x)dx}_{I_2}$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرالهای فوق می‌پردازیم.

i) $(x^3:$ تابعی فرد $\&\quad P_2(x):$ تابعی زوج $) \Rightarrow (x^3P_2(x):$ تابعی فرد $)$

$$\xrightarrow{(f:\text{ تابعی فرد }) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f dx=0} I_1=\int_{-1}^{1}x^3P_2(x)dx=0 \quad \&$$

ii) $\xrightarrow{\nu\neq 0\ ;\ \text{نتیجه تعامد لژاندر}} I_2=\int_{-1}^{1}P_2(x)dx=0$

در نتیجه؛

$$I=I_1+I_2=0+0=0$$

یادآوری. (نتیجه تعامد لژاندر) اگر $P_\nu(x)$ چند جمله‌ای لژاندر با $\nu\neq 0$ باشد، در اینصورت؛

$$\int_{-1}^{1}P_\nu(x)\,dx=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۵ـ گزینه «۳» معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $xy''+(1+2\xi)y'+xy=0\ ;\xi\in IR$، با فرض $\xi=1$ است. در نتیجه با اعمال تغییر متغیر $y=x^{-\xi}u=\frac{u}{x}$ به معادله بسل مرتبه $\lambda=|\xi|=1$ تبدیل و جواب عمومی از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=x^{-\xi}(c_1J_{|\xi|}(x)+c_2Y_{|\xi|}(x)) \xrightarrow{\xi=1} y=x^{-1}(c_1J_1(x)+c_2Y_1(x))$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۶ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x^2(x+1)} a_2(0)=0 \Rightarrow (p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{x(x-4)}{x^2(x+1)}=-4 \quad \& \quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{4}{x^2(x+1)}=4)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-5r+4=0 \Rightarrow r=1,4$$

◆ ◆ ◆ ◆

۶۷ـ گزینه «۱»

$$(x-3)(\sin x)y''+xy'+x^2y=0 \quad \Rightarrow \quad y''+\frac{x}{(x-3)\sin x}y'+\frac{x^2}{(x-3)\sin x}y=0$$

نقاط $x_0=0$ و $x_0=k\pi$ ریشه‌های مخرج توابع $P(x)=\frac{x}{(x-3)\sin x}$ و $Q(x)=\frac{x^2}{(x-3)\sin x}$ هستند. با توجه به گزینه‌های مطرح شده، فقط بررسی نقاط $x_0=0$ و $x_0=3$ مدنظر است.

ـ از آنجائیکه توابع $\sin x$ و x، در نقطه $x_0=0$ هم ارزند، در نتیجه توابع $P(x)$ و $Q(x)$ در این نقطه تحلیلی می‌باشند و $x_0=0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل مفروض محسوب می‌شود.

ـ نقطه $x_0=3$، یک نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض است. برای تعیین منظم و یا غیر منظم بودن نقطه مفروض، حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{3}{\sin 3} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)^2 Q(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2(x-3)}{\sin x} = 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه هر دو حد فوق موجود و متناهی می‌باشند، در نتیجه نقطه $x_0 = 3$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

۶۸ـ گزینه «۳» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = -\frac{1}{2}$ و $q_0 = \frac{1}{2}$ است. و هم چنین $r_1 = 1$ و $r_2 = \frac{1}{2}$ دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0$ دارای، در رابطه $r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$. حالت اول. هر دو جواب معادله دیفرانسیل مفروض، دارای نمایش فروبینوسی $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_1 = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{a_0=1} y_1 = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) \quad \& \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \xrightarrow{b_0=1} y_2 = x^{\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n)$$

۶۹ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} P_\nu^2(x)\,dx = \frac{2}{2\nu+1} \xrightarrow{\nu=5} \int_{-1}^{1} P_5^2(x)\,dx = \frac{2}{11}$$

۷۰ـ گزینه «۲»

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha x^{\alpha-1} J_\alpha(x) + x^\alpha \frac{d}{dx}(J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

$$\xrightarrow{x^{-(\alpha-1)}\times(\text{طرفین})} \alpha J_\alpha(x) + x\frac{d}{dx}(J_\alpha(x)) = x J_{\alpha-1}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(J_\alpha(x)) = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

۷۱ـ گزینه «۱» قضیه. (بسط لژاندر ـ فوریه) اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[-1,1]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، در هر نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ در فاصله $(-1,1)$ ، می‌توان آن را برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر بصورت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ بسط داد، که در آن از ضابطه $a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx$ محاسبه می‌گردد.

در اینصورت از آنجائیکه تابع $f(x) = e^x$ در فاصله $[-1,1]$ پیوسته است، در نتیجه با توجه به قضیه فوق، ضریب $P_3(x)$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} e^x P_3(x)\,dx \xrightarrow{P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)} a_3 = \frac{7}{4}\int_{-1}^{1} (5x^3 - 3x^2)e^x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{7}{4}((5x^3-3x) - (15x^2-3x) + (30x-30)e^x\Big|_{-1}^{1} = \frac{7}{4}(5x^3 - 15x^2 + 27x - 27)e^x\Big|_{-1}^{1} \quad \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{7}{4}(-10e + 74e^{-1})$$

یادآوری. اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه k باشد، به کمک قاعده جزء به جزء می‌توان بدست آورد:

$$\int P(x)e^x\,dx = (P(x) - P'(x) + P''(x) - \cdots + (-1)^k P^{(k)}(x))e^x$$

۷۲ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x^2-x} a_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-x}{x^2-x} = 0 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x^2-x} = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0-1)r + q_0 = r^2 - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$$

۷۳ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x(x-1)} a_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3x-1}{x(x-1)} = 1 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x(x-1)} = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0-1)r + q_0 = r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,0$$

۷۴ـ گزینه «۱» می‌دانیم، شعاع همگرایی سری جواب عمومی، حداقل برابر R_P و R_Q است:

i) برای محاسبه R_P، کافیست می‌نیمم فاصله ریشه‌های مخرج $P(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)(x+1)}$، از نقطه $x_0 = 0$، که سری جواب حول آن مدنظر است، محاسبه گردد. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $(x^2-4)(x+1) = 0$ برابر مقادیر $x_1 = -2$، $x_2 = 2$ و $x_3 = -1$ است، در نتیجه فاصله این نقاط از $x_0 = 0$ برابر اعداد $r_1 = 2$، $r_2 = +2$ و $r_3 = +1$ می‌باشد. به عبارت دیگر؛

$$R_P = \min\{+1, 2\} = 1$$

ii) برای محاسبه R_Q کافیست می‌نیمم فاصله ریشه‌های مخرج $Q(x) = -\dfrac{1}{x^2-4}$، از نقطه $x_0 = 0$ محاسبه گردد. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $x^2 - 4 = 0$ برابر مقادیر $x_1 = 2$ و $x_2 = -2$ است، در نتیجه فاصله این نقاط از $x_0 = 0$، عدد یکسان $r = 2$ خواهد بود. به عبارت دیگر $R_Q = 2$.

در اینصورت حداقل شعاع همگرایی سری جواب عمومی برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = \min\{1,2\} = 1$ بدست می‌آید.

۷۵ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=2x(1+x)} a_2(0) = 0 \Rightarrow (p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1+6x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2} \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{2}{2x(1+x)} = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0-1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{2}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0, \frac{1}{2}$$

۷۶ـ گزینه «۲» حل اول:

$$(y = \sqrt{x}u \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times u + \sqrt{x}\times u' \quad \& \quad y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\times u + \frac{1}{\sqrt{x}}\times u' + \sqrt{x}u'')$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = x^2(\sqrt{x}u'' + \frac{1}{\sqrt{x}}u' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}u) + (x^2 + \frac{1}{4})(\sqrt{x}u) = 0 \quad \Rightarrow$$

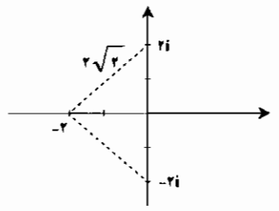
$$x^2\sqrt{x}u'' + x\sqrt{x}u' - \frac{1}{4}\sqrt{x}u + (x^2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\sqrt{x})u = x^2u'' + xu' + x^2u = 0$$

در اینصورت، معادله حاصل معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر است.

حل دوم: با اعمال تغییر متغیر $y = \sqrt{x}\,u$ ، معادله دیفرانسیل $x^2y'' + (x^2 + \zeta)y = 0$; $\zeta \le \frac{1}{4}$ به معادله دیفرانسیل بسل مرتبه $\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta}$ و از آنجا جواب عمومی آن از ضابطه $y = \sqrt{x}\,(c_1 J_{\sqrt{\frac{1}{4}-\zeta}}(x) + c_2 Y_{\sqrt{\frac{1}{4}-\zeta}}(x))$ بدست می‌آید. معادله دیفرانسیل $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$ از دسته فوق با فرض $\zeta = \frac{1}{4}$ است. در نتیجه با تغییر متغیر $y = \sqrt{x}u$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 0$ تبدیل می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۷ـ گزینه «۳» می‌دانیم، شعاع همگرای سری جواب عمومی حداقل برابر R_P و R_Q است. برای محاسبه R_P و R_Q با توجه به ضابطه‌های $P(x) = \frac{4x}{4+x^2}$ و $Q(x) = \frac{4x^2}{4+x^2}$ و اینکه سری جواب حول نقطه $x_0 = 2$ مدنظر است، کافیست می‌نیمم فاصله ریشه‌های مخرج توابع $P(x)$ و $Q(x)$ از نقطه $x_0 = -2$ بدست آید.



در اینصورت، از آنجائیکه فاصله نقاط $x_1 = 2i$ و $x_2 = -2i$، ریشه‌های معادله $x^2 + 4 = 0$، از نقطه $x_0 = -2$، برابر $r = 2\sqrt{2}$ می‌باشد، در نتیجه $R_P = R_Q = 2\sqrt{2}$ و از آنجا حداقل شعاع همگرایی برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = 2\sqrt{2}$ بدست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۷۸ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \frac{3}{2}$ و $q_0 = 0$ است.

و هم چنین $r_1 = 0$ و $r_2 = -\frac{1}{2}$، دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + \frac{1}{2}r = 0$ ، در رابطه $r_1 - r_2 = \frac{1}{2} \notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت، با توجه به قضیه $\overline{II}$. حالت اول. هر دو جواب معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایش فروبنوسی $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_1 = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷۹ـ گزینه «۴» نقاط $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ ریشه‌های تابع $a_2(x) = (1-x^2)^2$ و در نتیجه نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$ هستند. برای تعیین منظم و یا غیر منظم بودن این نقاط حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

i) $x_0 = 1$;

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)\dfrac{x(1-x)}{(1-x^2)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{4} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 \dfrac{1+x}{(1-x^2)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به اینکه هر دو حد فوق موجود و متناهی می‌باشند، نقطه $x_0 = 1$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_0 = 1$;

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 1} (x+1)\dfrac{x(1-x)}{(1-x^2)^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{(1-x)(1+x)} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to -1} (x+1)^2 \dfrac{(1+x)}{(1-x^2)^2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{(1-x)^2} = 0 \end{cases}$$

از آنجائیکه p_0 موجود و متناهی نیست، در نتیجه نقطه $x_0 = -1$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۰ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x^3} a_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_0 = \lim_{x\to 0} x.\frac{2x^2}{x^3} = 2 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{\lambda(e^x - 1)}{x^3} = \lambda)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + r + \lambda = 0$$

می‌دانیم، اگر اختلاف ریشه‌های معادله شاخصی، برابر یک عدد صحیح نباشد، معادله دیفرانسیل متناظر دارای دو جواب مستقل بصورت سری فروبنوسی است. در نتیجه؛

$$|r_1 - r_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{1} \quad \Rightarrow \quad |r_1 - r_2| = \sqrt{1-4\lambda} \quad \Rightarrow \quad 1-4\lambda \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \le \frac{1}{4}$$

و از آنجائیکه $\lambda \ge 0$ نیز است، با جایگذاری گزینه‌ها،تنها گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

یادآوری. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، همواره داریم $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۱ـ گزینه «۴» با توجه به شرایط اولیه داده شده، بسط جواب حول نقطه $x_0 = 0$ مدنظر است. $x_0 = 0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y'' + y' = e^x y^3$ است، در نتیجه اگر سری جواب بصورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در نظر گرفته شود، مقدار a_n از ضابطه $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ محاسبه می‌گردد:

$$a_0 = \frac{y(0)}{0!} \xrightarrow{y(0)=1} a_0 = 1 \ ;$$

$$a_1 = \frac{y'(0)}{1!} \xrightarrow{y'(0)=2} a_1 = 2 \ ;$$

هم‌چنین با توجه به ضابطه معادله دیفرانسیل بدست می‌آوریم:

$$y'' + y' = e^x y^3 \ ;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0) + y'(0) = (y(0))^3 \xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=2} y''(0) = -3 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = -\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' + 2y'y'' = e^x(y^3 + 3y^2y') \xrightarrow{x=0} y'''(0) + 2y'(0)y''(0) = (y(0))^3 + 3(y(0))^2(y'(0))$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=2 \ \& \ y''(0)=-3} y'''(0) = 19 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{19}{6}$$

در اینصورت سری جواب بصورت $y = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \cdots$ بدست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۸۲ـ گزینه «۲» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$2(x-1)y''+y'+3y=x \;;\; (I) \xrightarrow{x=0} -2y''(0)+y'(0)+3y(0)=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=1} -2y''(0)+4=0 \Rightarrow y''(0)=2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} 2y''+2(x-1)y'''+y''+3y'=1 \Rightarrow 2(x-1)y'''+3y''+3y'=1 \xrightarrow{x=0} -2y'''(0)+3y''(0)+3y'(0)=1$$

$$\xrightarrow{y'(0)=1\ \&\ y''(0)=2} -2y'''(0)+6+3=1 \Rightarrow -2y'''(0)=-8 \Rightarrow y'''(0)=4 \Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

۸۳ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$5(x+1)y''-y'-3y=0 \;;(I) \xrightarrow{x=0} 5y''(0)-y'(0)-3y(0)=0 \xrightarrow{y(0)=0\ \&\ y'(0)=1} y''(0)=\frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} 5y''+5(x+1)y'''-y''-3y'=1 \Rightarrow 5(x+1)y'''+4y''-3y'=1 \xrightarrow{x=0} 5y'''(0)+4y''(0)-3y'(0)=1$$

$$\xrightarrow{y'(0)=1\ \&\ y''(0)=\frac{1}{5}} 5y'''(0)+4\times\frac{1}{5}-3=1 \Rightarrow 5y'''(0)=\frac{16}{5} \Rightarrow y'''(0)=\frac{16}{25} \Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{\frac{16}{25}}{6}=\frac{8}{75}$$

۸۴ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x(1-x)} a_2(0)=0 \Rightarrow \left(p_0=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{3x-1}{x(x-1)}=1 \ \&\ q_0=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{1}{x(x-1)}=0\right)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2+0=0 \Rightarrow r=0,0$$

۸۵ـ گزینه «۱»

$$xy''+y'=a^2xy \Rightarrow x^2y''+xy'-a^2x^2y=0 \Rightarrow x^2y''+xy'-(a^2x^2+0)y=0 \quad ;(1)$$

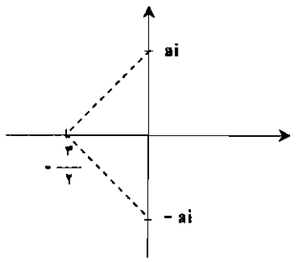
یادآوری. با اعمال تغییر متغیر $z=\xi x$، معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-(\xi^2x^2+\lambda^2)y=0$، به معادله دیفرانسیل بسل پیراسته مرتبه λ تبدیل و جواب عمومی آن از ضابطه $y=c_1I_\lambda(\xi x)+c_2K_\lambda(\xi x)$ بدست می‌آید.

در اینصورت، معادله دیفرانسیل مفروض (۱)، یک معادله از دسته فوق، با فرض $\lambda=0$ و $\xi=a$ می‌باشد، که با اعمال تغییر متغیر $z=\xi x=ax$، به معادله دیفرانسیل بسل پیراسته مرتبه صفر تبدیل و جواب عمومی آن نیز بصورت $y=c_1I_0(ax)+c_2K_0(ax)$ محاسبه می‌شود.

۸۶ـ گزینه «۳»

$$(a^2+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0 \Rightarrow y''+\frac{2x}{a^2+x^2}y'+\frac{4x^2}{a^2+x^2}y=0$$

می‌دانیم، شعاع همگرایی سری جواب عمومی، حداقل برابر R_P و R_Q است. برای محاسبه R_P و R_Q، با توجه به ضابطه‌های $P(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ و $Q(x)=\frac{4x^2}{a^2+x^2}$ و اینکه سری جواب حول نقطه $x_0=-\frac{3}{2}$ مدنظر است، کافیست می‌نیم ریشه‌های مخرج توابع P و Q از نقطه مذکور بدست آید. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $a^2+x^2=0$ برابر مقادیر $\pm ai$ است، بنابراین فاصله این نقاط تا نقطه $x_0=-\frac{3}{2}$ برابر است با:



$$R_P=R_Q=\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+a^2}\ .$$

و از آنجا $R=\min\{R_P,R_Q\}=\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}$.

از طرف دیگر طبق فرض مسأله $R=\frac{5}{2}$ می‌باشد. در نتیجه؛

$$\sqrt{a^2+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2} \Rightarrow a=2$$

۸۷ـ گزینه «۳»

$$I=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx=\Gamma(\alpha+1)} I=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

۸۸ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=4x} a_2(0)=0 \Rightarrow \left(p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{2}{4x}=\frac{1}{2} \quad \&\quad q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{1}{4x}=0\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r^2)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r=0,\frac{1}{2}$$

۸۹ـ گزینه «۲» از آنجائیکه نقاط $x_0=0$ و $x_0=2$ ریشه‌های تابع $a_2(x)=2x^4-x^5$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل $(2x^4-x^5)y''+xy'+(x^2+1)y=0$ هستند. برای تشخیص منظم و یا غیرمنظم بودن کافیست حدود زیر را محاسبه کنیم:

i) نقطه غیرعادی $x_0=0$:

$$\begin{cases} p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{x}{2x^4-x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2(2-x)} \\ q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{x^2+1}{2x^4-x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2(2-x)} \end{cases}$$

در اینصورت با توجه به اینکه حدود فوق موجود و متناهی نیستند، بنابراین $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی نامنظم است.

ii) نقطه غیرعادی ۲ = x_0 :

$$\begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\dfrac{x}{2x^4-x^5} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^3} = -\dfrac{1}{8} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\dfrac{x^2+1}{2x^4-x^5} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)(x^2+1)}{x^4} = 0 \end{cases}$$

در اینصورت با توجه به اینکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین ۲ = x_0 یک نقطه غیرعادی منظم است.

۹۰ـ گزینه «۴» از آنجائیکه ۰ = x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y''-(1+x^2)y=0$ است، بنابراین جواب عمومی آن دارای نمایشی بصورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است. در اینصورت؛

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow{x=0} y(0)=a_0 \xrightarrow{y(0)=c_0} a_0=c_0 \quad ;(1) \qquad \&$$

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \xrightarrow{x=0} y'(0)=a_1 \xrightarrow{y'(0)=c_1} a_1=c_1 \quad ;(2)$$

از طرف دیگر؛

$$\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad\Rightarrow\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\right)$$

$$\xrightarrow{y''-(1+x^2)=0 \text{ با جایگذاری در}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}=0$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n+2\mapsto n \text{ در سری اول و } n-2\mapsto n \text{ در سری سوم}} \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$[0+0+2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n]-[a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n]+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$(2a_2-a_0)+(6a_3-a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n-a_{n-2}]x^n=0 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_2-a_0=0 \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} a_2=\dfrac{c_0}{2} \\ 6a_3-a_1=0 \xrightarrow{\text{تساوی (۲)}} a_3=\dfrac{c_1}{6} \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n-a_{n-2}=0 \quad ;n\ge 2 \quad\Rightarrow\quad a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

در اینصورت؛

$$n=2;\quad a_4=\frac{a_2+a_0}{3\times 4} \xrightarrow{a_0=c_0 \ \&\ a_2=\frac{1}{2}c_0} a_4=\frac{1}{8}c_0$$

$$n=3;\quad a_5=\frac{a_3+a_1}{4\times 5} \xrightarrow{a_1=c_1 \ \&\ a_3=\frac{1}{6}c_1} a_5=\frac{7}{120}c_1$$

$$n=4;\quad a_6=\frac{a_4+a_2}{5\times 6} \xrightarrow{a_2=\frac{1}{2}c_0 \ \&\ a_4=\frac{1}{8}c_0} a_6=\frac{1}{48}c_0$$

$$n=5;\quad a_7=\frac{a_5+a_3}{6\times 7} \xrightarrow{a_3=\frac{1}{6}c_1 \ \&\ a_5=\frac{7}{120}c_1} a_7=\frac{3}{560}c_1$$

در نتیجه؛

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+\cdots)+(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\cdots) \quad\Rightarrow$$

$$y=c_0(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{48}x^6+\cdots)+c_1(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{7}{120}x^5+\frac{3}{560}x^7+\cdots)$$

لازم بذکر است، با استفاده از روش مشتق متوالی نیز می‌توان جواب مورد نظر را بدست آورد.

۹۱ـ گزینه «۲»

$$4xy''+4y'+y=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2y''+4xy'+xy=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2y''+4xy'+(x-0)y=0 \quad ;(I)$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $\lambda\ge 0$; $4x^2y''+4xy'+(x-\lambda^2)y=0$، با فرض $\lambda=0$ است، که با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ به معادله بسل مرتبه λ تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1J_\lambda(\sqrt{x})+c_2Y_\lambda(\sqrt{x}) \xrightarrow{\lambda=0} y=c_1J_0(\sqrt{x})+c_2Y_0(\sqrt{x})$$

۹۲ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{a_2(x)=4x} a_2(0)=0 \quad\Rightarrow\quad \left(p_0=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{3}{4x}=\frac{3}{4} \qquad \& \qquad q_0=\lim_{x\to 0}x^2\cdot\frac{3}{4x}=0\right)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{4}r=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{1}{4} \quad \& \quad r_2=0$$

در اینصورت با توجه به اینکه تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1-r_2=\frac{1}{4}$ ، عددی غیر صحیح است، در نتیجه با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$. حالت اول هر دو سری جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض، بصورت سری فروبینوسی با نمایش $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و متناظر با ریشه‌های شاخصی بدست می‌آید:

$$y_1=x^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2=x^0\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۹۳ـ گزینه «۲» با توجه به رابطه بازگشتی و با مفروض قرار دادن $a_0(r) = a_0$ بدست می‌آوریم:

$$a_0(r) = a_0$$

$$n=1;\quad a_1(r) = \frac{1}{r+1}\,a_0(r) = \frac{a_0}{r+1}$$

$$n=2;\quad a_2(r) = \frac{1}{r+2}\,a_1(r) = \frac{a_0}{(r+2)(r+1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n=n;\quad a_n(r) = \frac{a_0}{(r+n)\cdots(r+2)(r+1)} \quad ;(1)$$

اکنون می‌توانیم $a_n'(r)$ را با روش مشتقگیری لگاریتمی محاسبه کنیم:

$$\ln a_n(r) = \ln\frac{a_0}{(r+n)\cdots(r+2)(r+1)} = \ln a_0 - \ln(r+n) - \cdots - \ln(r+2) - \ln(r+1)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dr}\ \text{(طرفین)}} \frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = -\frac{1}{r+n} - \cdots - \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+1} \xrightarrow{r=0} \frac{a_n'(0)}{a_n(0)} = -\frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{1}$$

$$\xrightarrow{r=0\ \text{در تساوی (1)}} a_n(0) = \frac{a_0}{n\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{a_0}{n!} \longrightarrow a_n'(0) = \frac{a_0}{n!}\times -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{-a_0}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۴ـ گزینه «۳» حل اول:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \xrightarrow{p=0} J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{x\times\ \text{(طرفین)}} x\,J_0(x) = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{2k}} \quad \Rightarrow \quad xJ_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\,x^{2k+1}$$

$$\xrightarrow{\int\ \text{(طرفین)}} \int x\,J_0(x)\,dx = \int\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\,x^{2k+1}\right)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\cdot\int x^{2k+1}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int x\,J_0(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2\,2^{2k}}\cdot\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,k!\,2^{2k}}\cdot\frac{x^{2k+1}\times x}{2(k+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\int x\,J_0(x)\,dx = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$\xrightarrow{\text{با فرض } p=1 \text{ در تساوی } J_p} \int x\,J_0(x)\,dx = x\,J_1(x)$$

حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{روابط انتگرالی توابع بسل ـ الف}} \int x^{\lambda}\,J_{\lambda-1}(x)\,dx = x^{\lambda}\,J_{\lambda}(x) + c \xrightarrow{\lambda=1} \int x\,J_0(x)\,dx = x\,J_1(x) + c$$

که با فرض $c = 0$ ، جواب مطلوب بدست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۹۵ـ گزینه «۲» اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، ماتریس نمایی e^A بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

در اینصورت؛

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۶ـ گزینه «۱» برای محاسبه‌کردن پایین شعاع همگرایی هر سری جواب، ابتدا به محاسبه R_P و R_Q می‌پردازیم. لازم بذکر است، از آنجائیکه توابع $(x-x_0).P(x)$ و $(x-x_0)^2.Q(x)$ در این مسأله بصورت تقسیم دو چند جمله‌ای می‌باشند، در نتیجه نقاط غیرتحلیلی آنها، همان ریشه‌های مخرجشان است:

$$1)\ (x-0).P(x) = x.\frac{1}{x^2+3x-4} \xrightarrow{\text{محاسبه نقاط غیرتحلیلی}} x^2+3x-4=0 \ \Rightarrow\ x=-4\ \&\ 1$$

با توجه به اینکه R_P برابر فاصله نقطه $x_0 = 0$ ، از نزدیکترین نقطه غیرتحلیلی مجاور آن در تابع $x.P(x)$ یعنی نقاط $x=-4,1$ است، بنابراین $R_P = \min\{1,4\} = 1$.

مشابه حالت (۱) ، شعاع همگرایی $R_Q = 1$ بدست می‌آید.

در اینصورت کران پایین شعاع همگرایی جواب برابر مقدار $\min\{R_P, R_Q\} = \min\{1,1\} = 1$ محاسبه می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۹۷ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3 = \frac{y(0)}{3!}$ بدست می‌آید:

$$y' = \cos xy - \sin xy \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y'(0) = 1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' = -(y+xy')(\sin xy + \cos xy) \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y''(0) = -y(0) \xrightarrow{y(0)=0} y''(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y''' = -(2y'+xy')(\sin xy+\cos xy) - (y+xy')^2(\cos xy - \sin xy) \xrightarrow{x=0} y'''(0) = -2y'(0) - (y(0))^2$$

$$\xrightarrow{y(0)=0\ \&\ y'(0)=1} y'''(0) = -2 \ \Rightarrow\ a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{-2}{3!} \ \Rightarrow\ a_3 = -\frac{1}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۸ـ گزینه «۴» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^4 از ضابطه $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!}$ بدست می‌آید:

$$y' = \cos(x+y) + \sin(x+y) \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y'(0) = \cos y(0) + \sin y(0) \xrightarrow{y(0)=0} y'(0) = 1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' = (1+y')(-\sin(x+y) + \cos(x+y)) \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y''(0) = (1+y'(0))(-\sin y(0) + \cos y(0))$$

$$\xrightarrow{y(0)=0\ \&\ y'(0)=1} y''(0) = 2$$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y''' = y''(-\sin(x+y)+\cos(x+y)) + (1+y')^2(-\cos(x+y)-\sin(x+y)) \quad ;(III)$

$\xrightarrow{x=0} y'''(0) = y''(0)(-\sin y(0)+\cos y(0)) + (1+y'(0))^2(-\cos y(0)-\sin y(0))$

$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1 \ \& \ y''(0)=2} y'''(0) = 2\times 1 + 2^2\times(-1) \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -2$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(III)} y^{(4)} = y'''(-\sin(x+y)+\cos(x+y)) + (1+y')y''(-\cos(x+y)-\sin(x+y))$

$+2y''(1+y')(-\cos(x+y)-\sin(x+y)+(1+y')^2(\sin(x+y)-\cos(x+y))$

$\xrightarrow{x=0} y^{(4)}(0) = y'''(0)(-\sin y(0)+\cos y(0)) + (1+y'(0))y''(0)(-\cos y(0)-\sin y(0))$

$+2y''(0)(1+y'(0))(-\cos y(0)-\sin y(0)) + (1+y'(0))^2(\sin y(0)-\cos y(0))$

$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1 \ \& \ y''(0)=2 \ \& \ y'''(0)=-2} y^{(4)}(0) = -2+2\times 2\times 2\times -1+2\times 2\times 2\times -1+8\times -1 = -22 \quad \Rightarrow$

$a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{22}{24} \quad \Rightarrow \quad a_4 = -\frac{11}{12}$

◆ ◆ ◆ ◆

۹۹ـ گزینه «۴» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب x^4 از ضابطه $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!}$ بدست می‌آید:

$y'' = \sin(x^2-y^2) - e^{xy} \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0) = \sin(-(y(0))^2) - 1 \xrightarrow{y(0)=0} y''(0) = -1$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' = (2x-2yy')\cos(x^2-y^2) - (y+xy')e^{xy} \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y'''(0) = -2y(0)y'(0)\cos(-(y(0))^2) - y(0)$

$\xrightarrow{y(0)=0} y'''(0) = 0$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y^{(4)} = (2-2y'^2-2yy'')\cos(x^2-y^2) - (2x-2yy')^2\sin(x^2-y^2) - (2y'+xy'')e^{xy} - (y+xy')^2e^{xy}$

$\xrightarrow{x=0} y^{(4)}(0) = (2-2(y'(0))^2-2y(0)y''(0))\cos(-(y(0))^2) + 2(y(0)y'(0))^2\sin(-(y(0))^2) - 2y'(0) - (y(0))^2$

$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1 \ \& \ y''(0)=-1 \ \& \ y'''(0)=0} y^{(4)}(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-2}{24} \quad \Rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{12}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۰ـ گزینه «۱»

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

$\xrightarrow{t=-\ln x(\Rightarrow x=e^{-t})} \begin{cases} dt = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = -x\,dt \\ \begin{array}{c|cc} x & \varepsilon\to 0^+ & 1 \\ \hline t & T\to+\infty & 0 \end{array} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I = \lim_{T\to+\infty}\int_T^0 \frac{-e^{-t}\,dt}{\sqrt{t}}dt \quad \Rightarrow$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx = \Gamma(\alpha+1)} I = \Gamma(-\frac{1}{2}+1) = \Gamma(\frac{1}{2})$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۱ـ گزینه «۴» از آنجائیکه $x = 0$ ، یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y'' - xy = 0$ است، در نتیجه دارای جوابی بصورت سری توانی، با نمایش $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد:

$(y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2})$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} y'' - xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$

$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+2 \text{ در سری اول و } n\mapsto n-1 \text{ در سری دوم}} \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$

$\xrightarrow{\text{با بیرون کشیدن جملات به ازاء } n=-2,-1,0 \text{ از سری اول}} [0+0+2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n] - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \Rightarrow$

$2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_2 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \quad ;n \ge 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$ (فرمول بازگشتی متناظر)

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۲ـ گزینه «۱» با توجه به روابط انتگرالی توابع بسل داریم:

$\xrightarrow{\int x^{-\lambda}J_{\lambda+1}dx = -x^{-\lambda}J_\lambda + c \ ;\lambda=0} \int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + c_1 \quad ;(1)$

از طرف دیگر؛

$\xrightarrow{\int J_{\lambda+1}dx = \int J_{\lambda-1}dx - 2J_\lambda + c \ ;\lambda=2} \int J_3(x)\,dx = \int J_1(x)\,dx - 2J_2(x) + c_2$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (1)}} \int J_3(x)\,dx = -J_0(x) - 2J_2(x) + c \quad ;(c_1 + c_2 = c)$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۳ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب x^3 از ضابطه $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$y' = \cos(x+y) + \sin(x+y) \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y'(0) = \cos(y(0)) + \sin(y(0)) \xrightarrow{y(0)=0} y'(0) = 1$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'' = (1+y')(-\sin(x+y)+\cos(x+y)) \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y''(0) = (1+y'(0))(-\sin(y(0))+\cos(y(0)))$

$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1} y''(0) = 2$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y''' = y''(-\sin(x+y)+\cos(x+y)) + (1+y')^2(-\cos(x+y)-\sin(x+y))$

$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=1} y'''(0) = 2 + (-4) = -2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{-2}{6} \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۴ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'=\cos xy-e^{xy}\ ;(I)\xrightarrow{x=0}y'(0)=1-1=0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)}y''=(y+xy')(-\sin xy-e^{xy})\ ;(II)\xrightarrow{x=0}y''(0)=y(0)\times-1\xrightarrow{y(0)=1}y''(0)=-1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)}y'''=(2y'+xy'')(-\sin xy-e^{xy})+(y+xy')^2(-\cos xy-e^{xy})\ ;(III)$$

$$\xrightarrow{x=0}y'''(0)=2y'(0)\times-1+y(0)(-1-1)\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=0}y'''(0)=-2\Rightarrow$$

$$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{-2}{3!}\Rightarrow a_3=-\frac{1}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۵ـ گزینه «۲» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ ، ضریب x^4 از ضابطه $a_4=\frac{y^{(4)}(0)}{4!}$ محاسبه می‌گردد. بنابراین کافیست در تست قبلی، از عبارت y''' یکبار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(III)}y^{(4)}(x)=(3y''+xy'')(-\sin xy-e^{xy})+(2y'+xy'')(y+xy')(-\cos xy-e^{xy})$$
$$+2(2y'+xy'')(y+xy')(-\cos xy-e^{xy})+(y+xy')^3(\sin xy-e^{xy})$$

$$\xrightarrow{x=0}y^{(4)}(0)=3y''(0)\times-1+2y'(0)\times y(0)\times-2+(y(0))^3\times-1$$

$$\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=0\ \&\ y''(0)=-1}y^{(4)}(0)=3-1=2\Rightarrow a_4=\frac{y^{(4)}(0)}{4!}=\frac{2}{24}\Rightarrow a_4=\frac{1}{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۶ـ گزینه «۱» از آنجائیکه $x=0$ یک نقطه معادله دیفرانسیل $y''-2xy'-2y=0$ است، بنابراین معادله دیفرانسیل مفروض دارای جوابی بصورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ می‌باشد:

$$(y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\Rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}n a_n x^{n-1}\ \&\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}}\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-2x\sum_{n=0}^{\infty}n a_{n-1}x^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{با تبدیل } n\mapsto n+2 \text{ در سری اول}}\sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n=0$$

$$[0+0+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n]-\sum_{n=0}^{\infty}2n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n=0\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n]x^n=0\Rightarrow$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n=0\ ;n\geq 0\Rightarrow a_{n+2}=\frac{2}{n+2}a_n\ ;n\geq 0$$

که با تبدیل $n\mapsto n-2$ ، تساوی $a_n=\frac{2}{n}a_{n-2}$ بدست می‌آید.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۷ـ گزینه «۴» نقطه $x_0=0$ ریشه عبارت $a_2(x)=2x^3$ ، و در نتیجه نقطه غیرعادی معادله دیفرانسیل $2x^2y''+7x(x+1)y'-3y=0$ است. برای تعیین منظم و یا غیرمنظم بودن حدود زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\lim_{x\to 0}x\frac{7x(x+1)}{2x^2}=7\\ q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\cdot\frac{a_0(x)}{a_2(x)}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{-3}{2x^2}=-3\end{cases}$$

با توجه به اینکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، بنابراین $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۸ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'=\sin xy+e^{xy}\ ;(I)\xrightarrow{x=0}y'(0)=1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)}y''=(y+xy')(\cos xy+e^{xy})\ ;(II)\xrightarrow{x=0}y''(0)=y(0)\times 2\xrightarrow{y(0)=0}y''(0)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)}y'''=(2y'+xy'')(\cos xy+e^{xy})+(y+xy')^2(-\sin xy+e^{xy})\xrightarrow{x=0}y'''(0)=2y'(0)\times 2+(y(0))^2\times 1$$

$$\xrightarrow{y(0)=0\ \&\ y'(0)=1}y'''(0)=2\times 2=4\Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{4}{6}\Rightarrow a_3=\frac{2}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۰۹ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ، ضریب x^2 از ضابطه $a_2=\frac{y''(0)}{2!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y''=\sin(x^2-y^2)-e^{xy}\ ;(I)\xrightarrow{x=0}y''(0)=\sin(-(y(0))^2)-1\xrightarrow{y(0)=0}y''(0)=-1\Rightarrow a_2=\frac{y''(0)}{2!}=-\frac{1}{2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۰ـ گزینه «۴» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد. بنابراین کافیست در تست قبلی، از عبارت y'' یکبار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم:

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)}y'''=(2x-2y'y)\cos(x^2-y^2)-(y+xy')e^{xy}\xrightarrow{x=0}y'''(0)=-2y'(0)y(0)\cos(-y(0)^2)-y(0)\times 1$$

$$\xrightarrow{y(0)=0\ \&\ y'(0)=0}y'''(0)=0\Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۱ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'=\cos xy+e^{xy}\ ;(I)\xrightarrow{x=0}y'(0)=1+1=2$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)}y''=(y+xy')(-\sin xy+e^{xy})\ ;(II)\xrightarrow{x=0}y''(0)=y(0)\times 1\xrightarrow{y(0)=0}y''(0)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)}y'''=(2y'+xy'')(-\sin xy+e^{xy})+(y+xy')^2(-\cos xy+e^{xy})\xrightarrow{x=0}y'''(0)=2y'(0)\times 1+(y(0))^2\times 0$$

$$\xrightarrow{y'(0)=2}y'''(0)=2\times 2=4\Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=\frac{4}{6}\Rightarrow a_3=\frac{2}{3}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۲ـ گزینه «۱» می‌توان بررسی کرد، نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \frac{1}{2}$ و $q_0 = 0$ است. و هم‌چنین تفاضل مقادیر $r_1 = \frac{1}{2}$ و $r_2 = 0$ ، ریشه‌های معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{2}r = 0$ ، یک عدد غیرصحیح است، در اینصورت طبق قضیه $\overline{\text{II}}$. حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض، دو سری فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی با نمایش‌های زیر هستند:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = x^{0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۱۱۳ـ گزینه «۲» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = 1$ و $q_0 = -\frac{1}{9}$ است. و هم چنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{9} = 0$ دارای ریشه‌های $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = -\frac{1}{3}$ می‌باشد. در اینصورت از آنجائیکه $r_1 - r_2 = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ یک عدد غیرصحیح است، با توجه به قضیه $\overline{\text{II}}$. حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایش فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = x^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

لازم بذکر است، معادله دیفرانسیل مفروض، معادله بسل از مرتبه $\lambda = \frac{1}{3}$ است.

۱۱۴ـ گزینه «۲» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ، ضریب x^3 از ضابطه $a_3 = \frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' + xy' - 8y = 0 \;;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0) + 0 - 8y(0) = 0 \xrightarrow{y(0)=0} y''(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' + y' + xy'' - 8y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y''' + xy'' - 7y' = 0 \xrightarrow{x=0} y'''(0) + 0 - 7y'(0) = 0$$

$$\xrightarrow{y'(0)=1} y'''(0) = 7 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{7}{6}$$

۱۱۵ـ گزینه «۱» مطابق تساویهای $(1-x^2)y'' - 2xy' + (3\times 4)y = (1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$ و $(1-x^2)y'' - 2xy' + (2\times 3)y = (1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ و با توجه به نمایش عمومی معادله لژاندر مرتبه ν ، $(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0$، معادلات دیفرانسیل مفروض از دسته معادلات لژاندر و از مراتب $\nu = 3$ و $\nu = 2$ می‌باشند. در نتیجه جوابهای y_1 و y_2 به ترتیب توابع لژاندر $P_3(x)$ و $P_2(x)$ می‌باشند. در اینصورت؛

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = \int_{-1}^{1} P_3(x) P_2(x) \, dx \xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = 0$$

یادآوری. (قضیه تعامد لژاندر) مجموعه چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(x)$ نسبت به تابع وزن $\phi(x) = 1$ در فاصله $[-1,1]$; $\nu \in Z^+$ متعامد هستند. به عبارت دیگر؛

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x) P_w(x) \, dx = \begin{cases} 0 & ;\nu \neq w \\ \frac{2}{2\nu+1} & ;\nu = w \end{cases}$$

۱۱۶ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x(x-1)} a_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{3x-1}{x(x-1)} = 1 \quad \& \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x(x-1)} = 0)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,0$$

۱۱۷ـ گزینه «۴» حل اول:

$$(y = x^{-2}u \quad \Rightarrow \quad y' = x^{-2}u' - 2x^{-3}u \quad \& \quad y'' = x^{-2}u'' - 4x^{-3}u' + 6x^{-4}u)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مفروض}} xy'' + 5y' + xy = x(x^{-2}u'' - 4x^{-3}u' + 6x^{-4}u) + 5(x^{-2}u' - 2x^{-3}u) + x(x^{-2}u) = 0 \Rightarrow$$

$$x^{-1}u'' - 4x^{-2}u' + 6x^{-3}u + 5x^{-2}u' - 10x^{-3}u' + x^{-1}u = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{-1}u'' + x^{-2}u' - 4x^{-3}u + x^{-1}u = 0$$

$$\xrightarrow{x^3\times(\text{معادله})} x^2u'' + xu' - 4u + x^2u = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2u'' + xu' + (x^2 - 4)u = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، معادله بسل مرتبه ۲ است. در اینصورت؛

$$u = c_1J_2(x) + c_2Y_2(x) \xrightarrow{y=x^{-2}u \Rightarrow u=x^2y} x^2y = c_1J_2(x) + c_2Y_2(x) \quad \Rightarrow \quad y = x^{-2}(c_1J_2(x) + c_2Y_2(x))$$

حل دوم: معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $y = x^{-\lambda}u = x^{-2}u$ ، معادله $xy'' + (1+2\lambda)y' + xy = 0$; $\lambda \in \mathbb{R}^+$ با فرض $\lambda = 2$ است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر دیفرانسیل $xy'' + 5y' + y = 0$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = 2$ تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = x^{-\lambda}(c_1J_\lambda(x) + c_2Y_\lambda(x)) \xrightarrow{\lambda=2} y = x^{-2}(c_1J_2(x) + c_2Y_2(x))$$

۱۱۸ـ گزینه «۳» حل اول: از یک طرف؛

$$z = 2e^{\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = e^{\frac{x}{2}} \xrightarrow{z=2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = \frac{z}{2}} \frac{dz}{dx} = \frac{z}{2} & ;(1) \quad \& \\ e^{\frac{x}{2}} = \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad (e^{\frac{x}{2}})^2 = \frac{z^2}{4} \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{z^2}{4} & ;(2) \end{cases}$$

در نتیجه؛

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx} \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{2}\cdot\frac{dy}{dz} \quad ;(3) \quad \&$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{تساوی (2)}} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{z}{2}\cdot\frac{dy}{dz}) = \frac{dz}{dx}(\frac{z}{2}\times\frac{dy}{dz}) \xrightarrow{\text{تساوی (1)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z}{2}\cdot(\frac{1}{2}\times\frac{dy}{dz} + \frac{z}{2}\times\frac{d^2y}{dz^2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z}{4}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} \quad ;(4)$$

در اینصورت؛

$$y'' + (e^x - \frac{9}{4})y = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری تساویهای (2) و (3) و (4)}} \frac{z^2}{4}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{z}{4}\cdot\frac{dy}{dz} + (\frac{z^2}{4} - \frac{9}{4})y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - 9)y = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، معادله بسل مرتبه ۳ و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1 J_3(z) + c_2 Y_3(z) \xrightarrow{z=2e^{\frac{x}{2}}} y = c_1 J_3(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_3(2e^{\frac{x}{2}})$$

حل دوم: معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $\xi \in \mathbb{R}^+$; $y'' + (e^x - \xi^2)y = 0$، و با فرض $\xi = \frac{3}{2}$ است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر $z = 2e^{\frac{x}{2}}$، معادله دیفرانسیل $y'' + (e^x - \frac{9}{4})y = 0$ به معادله بسل مرتبه $\lambda = 2\xi = 3$ تبدیل و در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1 J_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_{2\xi}(2e^{\frac{x}{2}}) \xrightarrow{2\xi=3} y = c_1 J_3(2e^{\frac{x}{2}}) + c_2 Y_3(2e^{\frac{x}{2}})$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۹ـ گزینه «۳» با توجه به بسط مک لورن $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$، ضریب x^5 از ضابطه $a_5 = \frac{y^{(5)}(0)}{5!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y'' - y' + 2y = x^2 + x - 4 \quad ;(I) \xrightarrow{x=0} y''(0) - y'(0) + 2y(0) = -4 \xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=1} y''(0) = -6$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y''' - y'' + 2y' = 2x + 1 \quad ;(II) \xrightarrow{x=0} y'''(0) - y''(0) + 2y'(0) = 1 \xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y''(0)=-6} y'''(0) = -5$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(II)} y^{(4)} - y''' + 2y'' = 2 \quad ;(III) \xrightarrow{x=0} y^{(4)}(0) - y'''(0) + 2y''(0) = 2 \xrightarrow{y''(0)=-6 \ \& \ y'''(0)=-5} y^{(4)}(0) = 9$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(III)} y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' = 0 \xrightarrow{x=0} y^{(5)}(0) - y^{(4)}(0) + 2y'''(0) = 0 \xrightarrow{y'''(0)=-5 \ \& \ y^{(4)}(0)=9} y^{(5)}(0) = 19 \Rightarrow$$

$$a_5 = \frac{y^{(5)}(0)}{5!} = \frac{19}{20}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۰ـ گزینه «۴» حل اول:

$$z = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{z=\sqrt{x}} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} & ;(1) \quad \& \\ x = z^2 & ;(2) \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} y' = \frac{1}{2z} \cdot \frac{dy}{dz} \quad ;(3) \quad \&$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{تساوی (۳)}} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2z} \cdot \frac{dy}{dz}) = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d}{dz}(\frac{1}{2z} \times \frac{dy}{dz}) \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2z} \cdot (-\frac{1}{2z^2} \times \frac{dy}{dz} + \frac{1}{2z} \times \frac{d^2y}{dz^2}) \Rightarrow y'' = \frac{1}{4z^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \cdot \frac{dy}{dz} \quad ;(4)$$

$$xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری تساویهای (۲) و (۳) و (۴)}} z^2(\frac{1}{4z^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \cdot \frac{dy}{dz}) + \frac{1}{2z} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}y = 0$$

$$\xrightarrow{4z\times \text{(معادله)}} z\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + 2\frac{dy}{dz} + zy = 0 \Rightarrow z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + zy = 0$$

حل دوم:

$$xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \xrightarrow{4x\times \text{(معادله)}} 4x^2y'' + 4xy' + xy = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $\lambda \in \mathbb{R}^+$; $4x^2y'' + 4xy' + (x - \lambda^2)y = 0$ با فرض $\lambda = 0$ است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$، معادله دیفرانسیل $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$ به معادله بسل مرتبه صفر با متغیر مستقل z و با نمایش $z\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + zy = 0$ تبدیل می‌شود.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۱ـ گزینه «۲» معادلات بسل تساویهای $(1-x^2)y'' - 2xy' + (2\times 3)y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ و $(1-x^2)y'' - 2xy' + (1\times 2)y = 0 \Rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ و با توجه به نمایش عمومی معادله لژاندر مرتبه ۷، $(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0$، معادلات دیفرانسیل مفروض به ترتیب معادلات لژاندر از مراتب $\nu = 2$ و $\nu = 7$ و در نتیجه جوابهای y_1 و y_2 به ترتیب توابع لژاندر $P_2(x)$ و $P_7(x)$ می‌باشند. در اینصورت؛

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = \int_{-1}^{1} P_2(x)P_7(x) \, dx \xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} \int_{-1}^{1} y_1 y_2 \, dx = 0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۲ـ گزینه «۴» با توجه به روابط انتگرالی و مشتقی توابع بسل تنها گزینه (۴) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۳ـ گزینه «۱» می‌دانیم چند جمله‌ایهای لژاندر از مرتبه فرد، توابعی فرد هستند. در اینصورت؛

$$(x^4 - 2x^2 : \text{تابعی زوج} \quad \& \quad P_{2m+1}(x) : \text{تابعی فرد}) \Rightarrow ((x^4 - 2x^2)P_{2m+1}(x) : \text{تابعی فرد})$$

$$\xrightarrow{(f: \text{تابعی فرد}) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f \, dx = 0} \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2)P_{2m+1}(x) \, dx = 0$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۴ـ گزینه «۳»

$$I = \int_0^{\pi} [P_1(\cos t)]^2 \sin t \, dt$$

$$\xrightarrow{\cos t = x} \begin{cases} d(\cos t) = dx \Rightarrow \sin t \, dt = -dx \\ \begin{array}{c|cc} t & 0 & \pi \\ \hline x = \cos t & 1 & -1 \end{array} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I = \int_1^{-1} P_1^2(x)(-dx) = \int_{-1}^{1} P_1^2(x) \, dx \xrightarrow{\text{قضیه تعامد لژاندر}} I = \int_0^{\pi} [P_1^2(\cos t)]\sin t \, dt = \frac{2}{2\times 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

یادآوری. مجموعه چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(x)$; $\nu \in Z^+$ نسبت به تابع وزن $\phi(x) = 1$ متعامد هستند. بعبارت دیگر؛

$$\int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_w(x) \, dx = \begin{cases} 0 & ;\nu \neq w \\ \int_{-1}^{1} P_\nu^2(x) \, dx = \frac{2}{2\nu + 1} & ;\nu = w \end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۵ـ گزینه «۳» از آنجائیکه نقاط $x = ۰$ و $x = ۱$ ریشه‌های تابع $a_۲(x) = x^۲(۱-x)$ می‌باشند، در نتیجه نقاط مذکور نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل مفروض هستند. برای تشخیص منظم و غیرمنظم بودن؛

i) $x_۰ = ۰$ ؛

$$\begin{cases} p_۰ = \lim\limits_{x\to ۰} x\cdot\dfrac{-(۱+x)}{x^۲(۱-x)} = \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{-(۱+x)}{x(۱-x)} \\ q_۰ = \lim\limits_{x\to ۰} x^۲\cdot\dfrac{۲x}{x^۲(۱-x)} = \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲x}{(۱-x)} = ۰ \end{cases}$$

از آنجائیکه مقدار $p_۰$ موجود و متناهی نیست، در نتیجه $x_۰ = ۰$ یک نقطه غیرعادی نامنظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

ii) $x_۰ = ۱$ ؛

$$\begin{cases} p_۰ = \lim\limits_{x\to ۱} (x-۱)\cdot\dfrac{-(۱+x)}{x^۲(۱-x)} = \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱+x}{x^۲} = ۲ \\ q_۰ = \lim\limits_{x\to ۱} (x-۱)^۲\cdot\dfrac{۲x}{x^۲(۱-x)} = \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲(۱-x)}{x} = ۰ \end{cases}$$

از آنجائیکه هر دو حد فوق موجود و متناهی هستند، در نتیجه $x_۰ = ۱$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض است.

◆ ◆ ◆ ◆

تست‌های تکمیلی فصل سوم

۱ـ مقدار انتگرال $\int_۰^{\pi} P_n^۲(\cos x)\sin x\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۲n+۱}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۲n+۱}$

۲ـ حاصل $(۱+\frac{n}{۳})\cdots(۱+\frac{۲}{۳})(۱+\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲\times ۳^{n+۱}}\Gamma(۳+n)$ ۲) $\frac{۱}{۳^n}\Gamma(۲+n)$ ۳) $\frac{۱}{۲\times ۳^{n+۱}}\Gamma(۲+n)$ ۴) $\frac{۱}{۲\times ۳^{n+۱}}\Gamma(۴+n)$

۳ـ شعاع همگرایی جواب از نوع سری توانی برای معادله دیفرانسیل $y'' + xy' - ۳y = ۰$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۴ـ معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \frac{۱}{۴})y = ۰$ با تغییر متغیر $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) $u'' + ۴u = ۰$ ۲) $u'' + u = ۰$ ۳) $u'' - \frac{۱}{۴}u = ۰$ ۴) $u'' - u = ۰$

۵ـ در حل معادله $y'' + ۲xy' + ۵y = ۰$ به روش سری توانی، شعاع همگرایی برابر است با:

۱) ۰ ۲) ∞ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

۶ـ اگر معادله دیفرانسیل $۲xy'' + (x+۱)y' + ۳y = ۰$ را به روش سری فروبینوسی حل کنیم آنگاه یک جواب برابر است با:

۱) $y = ۱ + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots$ ۲) $y = ۱ + ۳x + ۲x^۲ + \cdots$ ۳) $y = ۱ - ۳x + ۲x^۲ + \cdots$ ۴) $y = ۱ - ۳x^۲ + ۴x^۳ + \cdots$

۷ـ می‌دانیم برای تابع بسل مرتبه n ام $J_n(x)$ داریم:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-۱}\ ,\ J_{-n}(x) = (-۱)^n J_n(x)$$

در اینصورت $\frac{d}{dx}J_n(x)$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $xJ_{n-۱}(x) - nJ_n(x)$ ۲) $\frac{۲n}{x}J_n(x) - J_{n-۱}(x)$ ۳) $\frac{۱}{۲}J_{n-۱}(x) - \frac{۱}{۲}J_{n+۱}(x)$ ۴) $xJ_n(x) - nJ_{n+۱}(x)$

۸ـ با تغییر متغیر $y = x^{-۴}u$ معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + ۹y' + xy = ۰$ تبدیل به کدام معادله می‌شود؟

۱) $x^۲u'' - xu' + (۴ - x^۲)y = ۰$ ۲) $x^۲u'' + xu' + (x^۲ - ۴)y = ۰$

۳) $۴x^۲y'' + xy' + (x^۲ - ۴)y = ۰$ ۴) $u'' + xu' + (x+۴)y = ۰$

۹ـ در معادله $(\sin\frac{۱}{x})y'' + ۴xy' = ۰$ نقاط $x = ۰$ و $x = -\frac{۱}{۴}$ چه نوع نقاطی هستند؟

۱) $x = ۰$ نقطهٔ غیرعادی نامنظم و $x = ۱$ نقطه غیرعادی منظم ۲) $x = ۰$ نقطهٔ غیرعادی منظم ولی $x = -\frac{۱}{۲}$ نقطه عادی

۳) هر دو نقطه غیرعادی منظم هستند. ۴) هر دو نقطه غیرعادی نامنظم هستند.

۱۰ـ کدامیک از توابع زیر یک جواب معادله دیفرانسیل $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ است؟

۱) $y=1-x^2-\frac{1}{3}x^4+\cdots$
۲) $y=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\cdots$
۳) $y=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\cdots$
۴) $y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^4+\cdots$

۱۱ـ ضریب x^9 در حل معادله دیفرانسیل $y''+x^2y=0$ به روش سری توانی برابر است با:

۱) $-\frac{1}{42}a_1$
۲) $-\frac{1}{30}a_0$
۳) $\frac{1}{24}a_1$
۴) $\frac{1}{2}a_0$

۱۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+4(x^4-9)y=0$ کدام است؟

۱) $y=c_1J_3(2x)+c_2Y_3(2x)$
۲) $y=c_1J_3(\sqrt{x})+c_2Y_3(\sqrt{x})$
۳) $y=c_1J_3(4x)+c_2Y_3(4x)$
۴) $y=c_1y_3+c_2Y_3(x^2)$

۱۳ـ نقاط $x=0$ و $x=1$ برای معادله دیفرانسیل $x^2(1-x)y''+(\sin x)y'+xy=0$ چه نوع نقاطی هستند؟

۱) $x=0$ نقطهٔ منفرد نامنظم ولی $x=1$ نقطهٔ منفرد منظم است.
۲) $x=0$ نقطهٔ منفرد منظم ولی $x=1$ نقطهٔ منفرد نامنظم است.
۳) هر دو نقطه منفرد منظم هستند.
۴) هر دو نقطه منفرد نامنظم هستند.

۱۴ـ شعاع همگرایی جواب از نوع سری توانی برای معادله دیفرانسیل $y''+(3x-4)y'+y=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) ∞

۱۵ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب معادله $y''+x^2y=0$ باشد، آنگاه:

۱) $a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$
۲) $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+4)}$
۳) $a_{n+3}=\frac{-a_{n-1}}{(n+3)(n+4)}$
۴) $a_{n+4}=\frac{-a_n}{(n+3)(n+4)}$

۱۶ـ ضریب x^3 در حل معادله $y''+y\cos x=0$ به روش سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ با شرط $y(0)=-2$ و $y'(0)=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$
۲) $-\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{2}{3}$

۱۷ـ اگر معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ را به روش سری فروبینوس حول $x=0$ حل کنیم، رابطه بازگشتی عبارتست از:

۱) $a_n=\frac{a_{n-1}}{n+1}$
۲) $a_{n+1}=a_n$
۳) $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$
۴) $a_{n+1}=2a_n$

۱۸ـ هرگاه معادله دیفرانسیل $2x^2y''+x(2x-1)y'+y=0$ دارای جوابی از نوع سری فروبینوس باشد آنگاه دو جواب مستقل خطی عبارتست از:

۱) $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، $y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$
۲) $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، $y_2=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$
۳) $y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، $y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$
۴) $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، $y_2=y_1\operatorname{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۱۹ـ اگر معادله دیفرانسیل $y''-2xy'+y=0$ را به روش سری $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ حل کنیم. آنگاه رابطه بازگشتی عبارتست از:

۱) $a_{n+2}=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}a_n$
۲) $a_{n+2}=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}a_{n+1}$
۳) $a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)(n+2)}a_n$
۴) $a_{n+1}=a_n$

۲۰ـ نقاط $x=1$ و $x=2$ برای معادله دیفرانسیل $(x-1)^3(-x)y''+(x-1)y'+y=0$ ترتیب چه نوع نقاطی هستند؟

۱) منفرد منظم ـ منفرد نامنظم
۲) منفرد نامنظم ـ منفرد منظم
۳) منفرد منظم ـ منفرد منظم
۴) منفرد نامنظم ـ منفرد نامنظم

۲۱ـ به ازای چه مقدار از a معادله مشخصه $x^2y''+a(x^2-x)y'+y=0$ دارای ریشه مضاعف است؟

۱) ۳-
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۲

۲۲ـ کدامیک از نقاط زیر برای معادله $(\sin x)y''+e^xy'-\frac{1}{x-2}y=0$ نقطه عادی هستند؟

۱) ۱-
۲) ۰
۳) ۲
۴) π

۲۳ـ نقطهٔ $x=0$ برای کدامیک از معادلات داده شده، نقطهٔ عادی است؟

۱) $y''+e^xy'-\frac{1}{x}y=0$
۲) $x^2y''+x^2y'+(e^x-1)y=0$
۳) $xy''+\sin xy'+x^2y=0$
۴) برای هر سه گزینه نقطهٔ غیرعادی است.

۲۴ـ حداقل شعاع همگرایی برای جواب معادله $y''+(\tan^{-1}x)y=0$ با شرایط $y'(0)=0$ و $y(0)=2$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $+\infty$

۲۵ـ جواب معادله $(2x^2-3x+1)y''-x^2y'-y=0$ به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ در نظر گرفته می‌شود حداقل شعاع همگرایی جواب چقدر است؟

۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۳

۲۶ـ جواب مسأله مقدار اولیه $(x^2+1)y''+y=0$ و $y(1)=2=y'(1)$ حداقل بر کدامیک از بازه‌های زیر معتبر است؟

۱) $(-1,1)$
۲) $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$
۳) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
۴) $(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$

۲۷ـ حداقل بازه اعتبار جواب برای مسأله مقدار اولیه زیر، کدام است؟

$$y''+e^xy'+(\operatorname{Ln}x)y=0\ ;\ y(1)=y'(1)=1$$

۱) $(0,2)$
۲) $(-1,1)$
۳) R
۴) $(1-e,1+e)$

۲۸ـ رابطه بازگشتی برای محاسبه a_n ، هرگاه $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ جواب معادله $4y''+xy'+y=0$ باشد، عبارت است از:

۱) $a_{n+2}=-\frac{1}{4(n+1)}a_n$
۲) $a_{n+2}=-\frac{n}{4(n+1)(n+2)}a_n$
۳) $a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$
۴) $a_{n+2}=-\frac{1}{4(n+2)}a_n$

۲۹ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ در معادله $y''+x^2y'+2xy=0$ صدق کند، a_n از کدام رابطه قابل محاسبه است؟

۱) $a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{1}{n+2}a_n$ ۳) $a_{n+3}=-\frac{1}{n+3}a_n$ ۴) $a_{n+3}=-\frac{1}{n+1}a_n$

۳۰ـ رابطه بازگشتی برای محاسبه ضرایب a_n، وقتی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ جواب معادله $y''-2y=0$ باشد، عبارت است از:

۱) $a_{n+2}=-\frac{n-2}{n+1}a_n$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+1}a_n$ ۳) $a_{n+2}=-\frac{n-2}{n+2}a_n$ ۴) $a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}a_n$

۳۱ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ جواب معادله $y''+xy'-4y=0$ باشد، رابطه بازگشتی عبارت است از:

۱) $a_{n+2}=-\frac{n-2}{n+1}a_n$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{n-2}{n+2}a_n$ ۳) $a_{n+2}=\frac{n-2}{n+1}a_n$ ۴) $a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+2}a_n$

۳۲ـ اگر $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ پاسخ معادله $(1-x^2)y''+2xy'-\lambda(\lambda+1)y=0$ باشد، a_k در کدام یک از روابط زیر صدق می‌کند؟

۱) $a_{k+2}=\frac{k+\lambda+1}{k+2}a_k$ ۲) $a_{k+2}=\frac{(k-\lambda-1)(k+\lambda)}{(k+1)(k+2)}a_k$

۳) $a_{k+2}=\frac{k(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$ ۴) $a_{k+2}=\frac{(k-\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$

۳۳ـ رابطه بازگشتی برای حل معادله $y''-(1+x)y'+xy=0$ توسط سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ عبارت است از:

۱) $a_{n+3}=\frac{(n+1)a_{n+1}-a_n}{(n+2)(n+3)}$ ۲) $a_{n+3}=\frac{(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}-a_n}{(n+2)(n+3)}$

۳) $a_{n+3}=\frac{(n+2)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+a_n}{(n+2)(n+3)}$ ۴) $a_{n+3}=\frac{(n+2)a_n-a_{n+1}}{n+3}$

۳۴ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ جواب معادله $y''+(1-x)y=0$ باشد، a_n از کدام رابطه بدست می‌آید؟

۱) $a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$

۳) $a_{n+2}=-\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$ ۴) $a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

۳۵ـ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ جواب معادله $y''+xy'+y=0$ باشد، رابطه بازگشتی a_n عبارتست از:

۱) $a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}$ ۲) $a_{n+2}=-\frac{a_n+a_{n+1}}{n+2}$

۳) $a_{n+2}=-\frac{a_n+a_{n+1}}{n+1}$ ۴) $a_{n+2}=-\frac{a_n+a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}$

۳۶ـ در مسأله مقدار اولیه $y''+x^2y'+2xy=0$ و $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ ضریب x^{3000} کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3^{666}(666!)}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{3^{666}(666!)}$ ۴) نمی‌توان محاسبه کرد.

۳۷ـ ضریب x^7 در جواب معادله $(1+x^2)y''+2xy'-18y=0$ به صورت سری توانی حول $x=0$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۰ ۴) باید α_1 مشخص باشد.

۳۸ـ در مسأله مقدار اولیه $(1+x^2)y''-6y=0$ و $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ به صورت سری توانی، ضریب x^{10} چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{33}$ ۲) $-\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{1}{21}$ ۴) $\frac{1}{33}$

۳۹ـ در مسأله مقدار اولیه $y''+y\ln x=0$ و $y(1)=1$ و $y'(1)=-1$ ضریب $(x-1)^3$ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) -3 ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۳

۴۰ـ نقاط تکین منظم برای معادله $(x\sin x)y''+(8x^2-3)y'-\frac{1}{x(2x+1)^3}y=0$ حول نقطهٔ $x=1$ عبارتست از:

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi$ ۳) $\frac{k\pi}{2}$ ، $k\neq 0$ ۴) $k\pi$ ، $k\neq 0$

۴۱ـ در معادله $(x\sin x)y''+3y'+xy=0$ نقاط تکین نامنظم عبارت‌اند از: $(k\in z)$

۱) ۰ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi$ ، $k\neq 0$ ۴) هم نقاط تکین، منظم هستند.

۴۲ـ یکی از جوابهای معادله $(x\sin x)y''+(8x^2-3)y'-\frac{1}{x(2x+1)^3}y=0$ حول نقطهٔ $x=1$ عبارتست از:

۱) $y=a\,y_1\ln(x-1)+(x-1)^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ ۲) $y=a\,y_1\ln(x-1)+(x-1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n$

۳) $y=a\,y_1\ln(x-1)+(x-1)^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n$ ۴) $y=a\,y_1\ln(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n$

۴۳ـ اگر معادله $4xy''+3y'-3y=0$ حول $x_0=0$ حل شود، تعداد جوابهای فروبنیوسی آن که مستقل خطی هستند، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۴ـ تعداد جوابهای تحلیلی و مستقل خطی معادله $x^2y''+3xy'+(4x^2+1)y=0$ حول $x_0=0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۵ـ معادله $2x(x+1)y''+(6x+3)y'+2y=0$ حول $x_0=0$ دارای ..... است.

۱) یک جواب فروبنیوسی ۲) دو جواب تحلیلی ۳) یک جواب لگاریتمی ۴) یک جواب تحلیلی

۴۶ـ رابطه بازگشتی برای محاسبه جواب فروبنیوسی معادله $y''+3xy'+(1-4x^2)y=0$ حول $x=0$ عبارت است از:

۱) $a_{n+2}=\frac{4}{(n+2)^2}a_{n+1}$ ۲) $a_{n+2}=\frac{4}{(n+2)^2}a_n$

۳) $a_{n+1}=\frac{4}{n^2}a_n$ ۴) $a_{n+2}=\frac{4}{(n+1)^2}a_n$

۴۷ـ معادله بازگشتی متناظر با جواب تحلیلی معادله $4xy''+3y'-2y=0$ حول $x_0=0$ کدام است؟

۱) $a_{n+1}=\frac{2}{(n+\frac{3}{4})(4n-1)}a_n$ ۲) $a_{n+1}=\frac{2}{(4n+5)(n+1)}a_n$

۳) $a_{n+1}=\frac{2}{(4n+3)(n+1)}a_n$ ۴) معادله فاقد جواب تحلیلی می‌باشد.

۴۸ـ معادله بازگشتی مربوط به جوابی از معادله $y=0$ $(x^2-\frac{1}{9})y+xy'+x^2y''$ (برای $x>0$) که در اطراف $x=0$ کران‌دار است، عبارت است از:

۱) $a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-\frac{2}{3})}$ ۲) $a_n=-\frac{a_{n-1}}{n(n-\frac{2}{3})}$ ۳) $a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+\frac{2}{3})}$ ۴) $a_n=-\frac{a_{n-1}}{n(n+\frac{2}{3})}$

۴۹ـ رابطه بازگشتی مربوط به جوابی از معادله $y-y'(2x-5)+2xy''=0$ حول $x=0$ که در اطراف این نقطه بی‌کران باشد، عبارت است از:

۱) $a_{n+1}=\frac{n-1}{(2n-1)(n+1)}a_n$ ۲) $a_{n+1}=\frac{2n+1}{(n+1)(2n+5)}a_n$

۳) $a_{n+1}=\frac{2n-2}{(2n-1)(n+1)}a_n$ ۴) $a_{n+1}=\frac{2n-4}{(2n-1)(n+1)}a_n$

۵۰ـ جواب تحلیلی معادله $y+y'(x+1)x-y''x^2=0$ حول نقطهٔ تکین کدام است؟

۱) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ ۲) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$ ۳) xe^x ۴) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۵۱ـ حداقل شعاع همگرایی جواب برای معادله $y=0$ $e^xy+y'-y''(x^2+2)(x^2-5x)$ حول $x_0=0$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) ∞

۵۲ـ حداقل شعاع همگرایی جواب $y=0$ $\frac{1}{x(2x+1)^3}y'-(8x^2-3)y''+(x^2-x)$ حول $x_0=1$ کدامست؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۳ـ کران پایین شعاع همگرایی جواب برای معادله $y=0$ $\frac{1}{x^2}y-4xy'+y''(1-x^4)x$ حول $x=-1$ عبارت است از:

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۴ـ حاصل $\int_0^1 P_{10}^2(x)dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{2}{21}$

۵۵ـ $f(x)$ جواب چند جمله‌ای از معادله $y-12y+2xy'+y''(1-x^2)=0$ است که $f(1)=1$ کدام رابطه نادرست است؟

۱) $f(0)=0$ ۲) $f(-1)=-1$ ۳) $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{7}$ ۴) $f'''(0)=\frac{5}{2}$

۵۶ـ $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌هایی هستند که از نقطه $(1,1)$ عبور می‌کنند و به ترتیب در معادلات $y-12y-3xy'+y''(1-x^2)=0$ و $y-30y+3xy'-y''(1-x^2)=0$ صدق می‌کنند. حاصل $\int_{-1}^{1}(f(x)+g(x)+x^2)^2dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{36}{77}$ ۳) $\frac{334}{385}$ ۴) هیچ کدام

۵۷ـ اگر $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشد و $n\neq 1,2$ مقدار انتگرال برابر است با:

$\int_{-1}^{1}(x^2+x)P_n(x)dx$

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}$ ۴) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$

۵۸ـ اگر تابع $f(x)=\sin(\pi x)$ را برحسب چند جمله‌ایهای لژاندر به صورت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x)$ بسط دهیم، مجموع ضرایب دو چند جمله‌ای $P_1(x)$ و $P_4(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{4}{3\pi}$ ۲) $\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{\pi^2}$ ۴) ۰

۵۹ـ می‌دانیم $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ مقدار $J_{\frac{5}{2}}(\pi)$ عبارت است از:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{\pi^2}$

۶۰ـ با توجه به مقادیر $J_{\frac{1}{2}}(x)$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ در تست قبل، حاصل $J_{-\frac{5}{2}}(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{\pi^2}$ ۲) $\frac{12}{\pi^3}-\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{6}{\pi^2}$ ۴) $\frac{24}{\pi^3}-\frac{2}{\pi}$

۶۱ـ اگر $A=\int_0^1 J_0(x)dx$، حاصل $\int_0^1 x^2J_2(x)dx$ برابر است با:

۱) $-J_1(1)+3J_0(1)+3A$ ۲) $J_1(1)-3J_0(1)+3A$ ۳) $-J_1(1)-3J_0(1)+3A$ ۴) $J_1(1)+3J_0(1)+3A$

۶۲ـ اگر $A=\int_0^2 J_0(x)dx$، حاصل $\int_0^2 x^2J_0(x)dx$ برابر است با:

۱) $4J_1(2)-2J_0(2)+A$ ۲) $4J_1(2)+2J_0(2)-A$ ۳) $4J_1(2)+2J_0(2)+A$ ۴) $4J_1(2)-2J_0(2)-A$

۶۳ـ جواب معادله $y=0$ $(x-\frac{1}{9})y+4xy'+4x^2y''$ عبارت است از:

۱) $J_{\frac{1}{3}}(\frac{\pi}{2})$ ۲) $J_{\frac{1}{6}}(\sqrt{x})$ ۳) $J_{\frac{1}{6}}(x)$ ۴) $J_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x})$

۶۴ـ کدامیک از توابع زیر جواب معادله $y=0$ $(e^x-\frac{9}{4})y+y''$ هستند؟

۱) $J_{\frac{3}{2}}(e^{\frac{x}{2}})$ ۲) $J_{\frac{3}{2}}(2e^{\frac{x}{2}})$ ۳) $J_{\frac{3}{2}}(e^{\frac{x}{4}})$ ۴) $J_{\frac{3}{2}}(2e^{\frac{x}{4}})$

۶۵ـ جواب معادله $xy''+2y'+xy=0$ کدامیک از توابع زیر است؟

۱) $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ۲) $\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(x)$ ۳) $\sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(x)$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{x}}J_{-\frac{1}{2}}(x)$

۶۶ـ مقدار $J_0(0)$ برابر است با:

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ∞

۶۷ـ مقدار $I_1(0)$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) i ۴) $-i$

۶۸ـ کدام تابع جواب معادله $y=0$ $(1+x^4)y-4xy'+x^2y''$ می‌باشد؟

۱) $J_1(x^2)$ ۲) $K_1(\sqrt{x})$ ۳) $I_1(2x^2)$ ۴) $I_1(x^2)$

۶۹ـ جواب عمومی معادله $x^2y'' + 4xy' - (4x^2+1)y = 0$ عبارت است از:

۱) $C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)$
۲) $C_1 I_1(x) + C_2 K_1(x)$
۳) $C_1 I_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 K_{\frac{1}{2}}(x)$
۴) $C_1 I_1(2x) + C_2 K_1(2x)$

۷۰ـ کدام یک از توابع زیر جواب معادله $xy'' + y' - xy = 0$ هستند؟

۱) $J_0(x)$
۲) $J_0(\sqrt{x})$
۳) $k_0(x^2)$
۴) $k_0(x)$

۷۱ـ جواب عمومی معادله $9x^2y'' + 9xy' - (x^2+1)y = 0$ عبارت است از:

۱) $C_1 I_1(3x) + C_2 K_1(3x)$
۲) $C_1 I_{\frac{1}{3}}(3x) + C_2 K_{\frac{1}{3}}(3x)$
۳) $C_1 I_1(\frac{x}{3}) + C_2 K_1(\frac{x}{3})$
۴) $C_1 I_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3}) + C_2 K_{\frac{1}{3}}(\frac{x}{3})$

۷۲ـ کدامیک از نقاط زیر برای معادله $y'' + xy' + y = 0$ تکین منظم هستند؟

۱) ۰
۲) -۲
۳) ۱
۴) معادله نقطه تکین منظم ندارد.

۷۳ـ جواب معادله $x^2y'' + xy' - (4x^2+1)y = 0$ کدامیک از توابع زیر می‌باشد؟

۱) $I_2(x)$
۲) $I_1(\frac{x}{2})$
۳) $K_1(2x)$
۴) $K_{\frac{1}{2}}(x)$

۷۴ـ کدامیک از توابع زیر جواب معادله $xy'' + 5y' + xy = 0$ هستند؟

۱) $x^{-2}Y_2(x)$
۲) $x^2Y_2(x)$
۳) $J_2(x)$
۴) $\sqrt{2}\,J_2(x)$

۷۵ـ کدام تابع جواب معادله $x^2y'' + xy' - (x^2+4)y = 0$ است؟

۱) $K_0(x)$
۲) $K_2(2x)$
۳) $I_2(x)$
۴) $J_2(x)$

۷۶ـ ضریب x^4 در سری توانی جواب $y'' + y\sin x = 0$ با شرایط $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{-1}{6}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{-1}{12}$

۷۷ـ حداقل شعاع همگرایی جواب $(x+1)y'' + (5x+5)y' - 5y = 0$ حول $x_0 = 0$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۵
۴) $\frac{1}{5}$

۷۸ـ معادله بازگشتی مربوط به جوابی از معادله $2xy'' + (5-2x)y' - y = 0$ که حول $x = 0$ کران‌دار باشد، کدام است؟

۱) $a_{n+1} = \frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}a_n$
۲) $a_{n+1} = \frac{2n+1}{(n+1)(2n+5)}a_n$
۳) $a_{n+1} = \frac{2n-1}{(n+1)(2n+3)}a_n$
۴) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{(2n-1)(n+1)}a_n$

۷۹ـ جواب فروبنوسی معادله $x^2y'' + 3xy' + (1+4x^2)y = 0$ حول $x_0 = 0$ عبارتست از:

۱) $y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}x^{2n}$
۲) $y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$
۳) $y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^{2n}$
۴) $y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n$

۸۰ـ شعاع همگرایی سری تیلور تابع $y = \frac{\tan x}{x^2+1}$ حول $x_0 = 2$ کدام است؟

۱) $2 - \frac{\pi}{2}$
۲) $\pi - 2$
۳) $\sqrt{5}$
۴) ۱

۸۱ـ کدامیک از گزینه‌های زیر جواب معادله $y'' - xy' + 2y = 0$ با شرایط $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ می‌باشد؟

۱) $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{x!}$
۲) $y = 1 - x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots$
۳) $y = 1 - 2x^2 + x^3 + \cdots$
۴) $y = 1 - x^2$

۸۲ـ می‌دانیم $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ و $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ حاصل $J_{\frac{3}{2}}(\frac{\pi}{2})$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$
۲) $-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$
۳) $\frac{2}{\pi}$
۴) $-\frac{2}{\pi}$

۸۳ـ معادله بازگشتی مربوط به جواب فروبنوسی معادله $xy'' + y' + xy = 0$ حول $x = 0$ کدام است؟

۱) $a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-1}$
۲) $a_n = -\frac{1}{(n+1)^2}a_{n-2}$
۳) $a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2}$
۴) $a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2}$

۸۴ـ حاصل $\int_0^1 J_3(x)\,dx$ برابر است با:

۱) $J_0(1) + 2J_2(1) - 2J_2(0)$
۲) $-J_0(1) - 2J_2(1) + 1$
۳) $-J_0(1) - 2J_2(1) + 2J_2(0)$
۴) $J_0(1) - 2J_2(1) - 1$

۸۵ـ حداقل شعاع همگرایی سری جواب برای معادله $(x^4+1)y'' + \frac{1}{x-5}y' + y = 0$ حول $x_0 = 1$ برابر است با:

۱) ۲
۲) $\sqrt{2}$
۳) ۱
۴) ۴

مدرسان شریف

فصل چهارم

« تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن »

I. تبدیل لاپلاس.

یکی از روشهای مؤثر در حل مسأله مقدار اولیه، به خصوص اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر، یک معادله با ضرائب ثابت باشد، و یا در قسمت غیرهمگن آن تابع ناپیوسته باشد، استفاده از تبدیل لاپلاس است.

تبدیل لاپلاس هم چنین به عنوان روشی سودمند، برای حل انواع خاص از معادلات انتگرال، محاسبه برخی انتگرالها نیز رشد چشمگیری پیدا کرده است.

در زیر ابتدا به تعریف تبدیل لاپلاس یک تابع می‌پردازیم و سپس به معرفی خانواده توابعی می‌پردازیم که تمامی اعضاء آن دارای تبدیل لاپلاس هستند.

تعریف. (تبدیل لاپلاس) فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $0 \le t < \infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی دلخواه است. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که با نماد $L[f(t)]$ و یا $F(s)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 1$ را بدست آورید.

حل.

$$\xrightarrow{L[f]=\int_0^\infty e^{-st} f\,dt} L[1] = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,dt \quad \Rightarrow$$

$$L[1] = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\right)$$

با توجه به تساوی $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ، حد فوق زمانی وجود دارد که $s > 0$ باشد. در اینصورت؛

$$L[1] = \frac{1}{s} \quad ; s > 0$$

تعریف. تابع $f(t)$ در بازه بسته $[a,b]$ ، قطعه‌ای پیوسته خوانده می‌شود، اگر؛

۱) تابع مفروض در تمامی نقاط بازه باز (a,b)، به استثناء متناهی نقطه $t_1, t_2, \ldots, t_n$ پیوسته باشد.

۲) در نقاط ناپیوستگی $t_1, t_2, \ldots, t_n$، تابع $f(t)$ دارای حدود چپ و راست موجود و متناهی باشد، و هم چنین در $t = a$ دارای حد راست و در $t = b$ نیز دارای حد چپ موجود و متناهی باشد.

و تابع $f(t)$ را در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته گوییم، هرگاه به ازاء هر $T > 0$، تابع $f(t)$ در فاصله $[0,T]$ قطعه‌ای پیوسته باشد.

تعریف. تابع $f(t)$ را در فاصله $[0,\infty)$ از مرتبه نمایی $a > 0$ می‌گوییم، هرگاه اعداد حقیقی ثابتی چون a، M و t_0 موجود باشند بطوری که به ازاء $t \ge t_0$ نامساوی $|f(t)| \le Me^{at}$ ، برقرار باشد. به عبارت دیگر $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{at}} = 0$.

قضیه. (وجود تبدیل لاپلاس) فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و هم‌چنین از مرتبه نمایی a باشد، در اینصورت تبدیل لاپلاس $F(s) = L[f(t)]$ برای هر $s > a$ موجود است و داریم: $|F(s)| \le \frac{M}{s-a}$.

نتیجه. (مقدار انتهایی تبدیل لاپلاس) اگر $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی a و $F(s)$ تبدیل لاپلاس آن باشد، داریم:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$$

به عنوان مثال؛

۱ـ تابع $\frac{1-\cos t}{t^2}$ و در فاصله $[0,\infty)$ دارای تبدیل لاپلاس است. چرا که:

الف ـ در فاصله $(0,\infty)$ پیوسته است و حد راست آن در صفر موجود و متناهی است:

$$\lim_{t\to0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

ب ـ تابع مفروض در فاصله مورد نظر از مرتبه نمایی $a > 0$ است:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}(1-\cos t) = 0$$

از طرف دیگر؛

۲ـ تابع $\frac{\sin t}{t^2}$ در فاصله $[0,\infty)$ دارای تبدیل لاپلاس نیست. چرا که:

$$\lim_{t\to0^+} \frac{\sin t}{t^2} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

لازم بذکر است، معمولاً از حروف کوچک مانند f ، g برای نامیدن توابع و از حروف بزرگ مانند F ، G برای نامیدن تبدیل لاپلاس توابع مذکور استفاده می‌شود.

در جدول زیر تبدیل لاپلاس برخی توابع مقدماتی ارائه شده است:

$f(t)$	$\xrightarrow{L}$	$F(s)$		$F(s)$	$\xrightarrow{L^{-1}}$	$f(t)$
$t^{\alpha}\ ;\alpha\neq -1,-2,\dots\ ;t^{\alpha}$		$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$;s>0$	$\frac{1}{s^{\alpha+1}}$		$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$
$t^{n}\ ;n\in \mathbb{N}$		$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$;s>0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$		$\frac{t^{n}}{n!}$
e^{at}		$\frac{1}{s-a}$	$;s>a$	$\frac{1}{s-a}$		e^{at}
$\cos at$		$\frac{s}{s^2+a^2}$	$;s>0$	$\frac{s}{s^2+a^2}$		$\cos at$
$\sin at$		$\frac{a}{s^2+a^2}$	$;s>0$	$\frac{1}{s^2+a^2}$		$\frac{1}{a}\sin at$
$\cosh at$		$\frac{s}{s^2-a^2}$	$;s>\lvert a\rvert$	$\frac{s}{s^2-a^2}$		$\cosh at$
$\sinh at$		$\frac{a}{s^2-a^2}$	$;s>\lvert a\rvert$	$\frac{1}{s^2-a^2}$		$\frac{1}{a}\sinh at$

بعنوان مثال؛

$$\cosh 2t \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2-4}\ ;\quad e^{3t}\xrightarrow{L}\frac{1}{s-3}$$

$$\frac{1}{s^2+3}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\ ;\quad \frac{1}{s^6}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{t^5}{5!}$$

ویژگیهای تبدیل لاپلاس.

۱ـ تبدیل لاپلاس و جمع جبری.

گزاره. تبدیل لاپلاس و تبدیل لاپلاس معکوس عملگرهایی خطی هستند. به عبارت دیگر؛

الف) $L[c_1f_1(t)\pm c_2f_2(t)]=c_1L[f_1(t)]+c_2L[f_2(t)] \quad ;c_1,c_2\in \mathbb{R}$

و یا؛

$$L[\sum_{i=1}^{n}c_if_i(t)]=\sum_{i=1}^{n}c_iL[f_i(t)] \quad ;c_i\in\mathbb{R}\ \&\ i\in\{1,\dots,n\}$$

ب) $L^{-1}[c_1F_1(s)\pm c_2F_2(s)]=c_1L^{-1}[F_1(s)]\pm c_2L^{-1}[F_2(s)] \quad ;c_1,c_2\in\mathbb{R}$

و یا؛

$$L^{-1}[\sum_{i=1}^{n}c_iF_i(s)]=\sum_{i=1}^{n}c_iL^{-1}[F_i(s)] \quad ;c_i\in\mathbb{R}\ \&\ i\in\{1,\dots,n\}$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\sin t\cos t$ ۲) $\cos^2 t$

حل.

۱) $f(t)=\sin t\cos t \Rightarrow F(s)=L[\sin t\cos t]\xrightarrow{\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t} F(s)=L[\frac{1}{2}\sin 2t]$

$\xrightarrow{L\text{ عملگری خطی است}} F(s)=\frac{1}{2}L[\sin 2t] \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}(\frac{2}{s^2+4})$

۲) $f(t)=\cos^2 t \Rightarrow F(s)=L[\cos^2 t]\xrightarrow{\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)} F(s)=L[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)]$

$\xrightarrow{L\text{ عملگری خطی است}} F(s)=\frac{1}{2}(L[1]+L[\cos 2t]) \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{1}{s^2(s+1)}$ ۲) $\frac{s}{s^4-1}+\frac{\frac{1}{3}}{s^2}$

حل.

۱) $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)} \Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\right]$

$\xrightarrow{L\text{ عملگری خطی است}} f(t)=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \Rightarrow f(t)=-1+t+e^{-t}$

یادآوری.

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}=\frac{As(s+1)+B(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)} \Rightarrow$$

$$1=As(s+1)+B(s+1)+Cs^2 \Rightarrow \begin{cases} s=0 ; & 1=B \\ s=-1 ; & 1=C \\ s=1 ; & 1=2A+2B+C \end{cases} \Rightarrow A=-1$$

۲) $F(s)=\frac{s}{s^4-1}+\frac{\frac{1}{3}}{s^2} \Rightarrow f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left(\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2-1}-\frac{s}{s^2+1})+\frac{\frac{1}{3}}{s^2}\right)$

$\xrightarrow{L\text{ عملگری خطی است}} f(t)=\frac{1}{2}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]\right)+L^{-1}\frac{\frac{1}{3}}{s^2} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}(\cosh t-\cos t)-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}$

یادآوری.

$$A=\frac{s}{s^4-1}=s\cdot\frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)}\xrightarrow{(s^2+1)-(s^2-1)=2} A=s(\frac{\frac{1}{2}}{s^2-1}-\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}) \Rightarrow A=\frac{1}{2}(\frac{s}{s^2-1}-\frac{s}{s^2+1})$$

۲ـ تبدیل لاپلاس و ضرب.

تعریف. پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ به شرط موجود بودن انتگرال زیر، به این صورت محاسبه می‌شود:

$$f*g=f(t)*g(t)=\int_c^t f(t-x)g(x)dx$$

عمل تلفیق دارای خواص زیر است:

۱) جا به جایی: $f*g=g*f$

۲) شرکت پذیری: $f*g*h=(f*g)*h=f*(g*h)$

۳) خطی نسبت به جمع توابع: $f*(cg+h)=cf*g+f*h$

گزاره. فرض کنید، تلفیق دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ قابل تعریف است. در اینصورت؛

الف) $L[f*g]=L[f]L[g]$

و اگر $F(s)=L[f(t)]$ و $G(s)=L[g(t)]$ فرض شوند، داریم؛

ب) $L^{-1}[F(s)G(s)]=L^{-1}[F(s)]*L^{-1}[G(s)]=f*g$

بعنوان مثال. پیچش توابع *sin t* و *t* را محاسبه کنید.

حل.

$$۱)\ t*\sin t=\int_c^t (t-x)\sin x dx=\Big(-(t-x)\cos x-\sin x\Big)\Big|_c^t \quad\Rightarrow\quad t*\sin t=t-\sin t$$

یادآوری.

$t-x$	$+$	$\sin x$
	$\searrow$	$-\cos x$
-۱	$-$	
	$\searrow$	$-\sin x$
0		

$$\Rightarrow \int (t-x)\sin x\ dx=-(t-x)\cos x-\sin x$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $۵-\int_0^t (t-x)^۳\cosh x\ dx$ ۲) $۳e^{۲t}+\int_0^t \sin x\, e^{x-t}dx$

حل.

$$۱)\ f(t)=۵-\int_0^t (t-x)^۳\cosh x dx \quad\Rightarrow\quad F(s)=L[۵-\int_0^t (t-x)^۳\cosh x dx]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[۵]-L[t^۳*\cosh t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=۵L[۱]-L[t^۳]L[\cosh t]$$

$$\xrightarrow{(t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{s^{n+۱}})\ \&\ (\cosh at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^۲-a^۲})} F(s)=۵\frac{۱}{s}-\frac{۳!}{s^۴}\cdot\frac{s}{s^۲-۱} \quad\Rightarrow\quad F(s)=\frac{۵}{s}-\frac{۶s}{s^۴(s^۲-۱)}$$

$$۲)\ f(t)=۳e^{۲t}+\int_0^t \sin x\, e^{x-t}dx \quad\Rightarrow\quad F(s)=L[۳e^{۲t}+\int_0^t e^{-(t-x)}\sin x dx]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[۳e^{۲t}]+L[e^{-t}*\sin t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=۳L[e^{۲t}]+L[e^{-t}]L[\sin t]$$

$$\xrightarrow{(e^{at}\xrightarrow{L}\frac{۱}{s-a})\ \&\ (\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^۲+a^۲})} F(s)=۳\frac{۱}{s-۲}+\frac{۱}{s+۱}\cdot\frac{s}{s^۲+۱} \quad\Rightarrow\quad F(s)=\frac{۳}{s-۲}+\frac{s}{(s+۱)(s^۲+۱)}$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\frac{۱}{s(s^۲+۱)}$ ۲) $\frac{۱}{s^۲(s^۲+۱)}$

حل.

$$۱)\ f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s(s^۲+۱)}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}\cdot\frac{۱}{s^۲+۱}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[FG]=L^{-۱}[F]*L^{-۱}[G]} f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}\right]*L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۱}\right] \xrightarrow{(\frac{۱}{s}\xrightarrow{L^{-۱}}۱)\ \&\ (\frac{۱}{s^۲+a^۲}\xrightarrow{L^{-۱}}\frac{۱}{a}\sin at)} f(t)=۱*\sin t$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t (t-x)g(x)dx} f(t)=\int_0^t \sin x dx=-\cos x\Big|_0^t \quad\Rightarrow\quad f(t)=۱-\cos t$$

$$۱)\ f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲(s^۲+۱)}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲}\cdot\frac{۱}{s^۲+۱}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[FG]=L^{-۱}[F]*L^{-۱}[G]} f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲}\right]*L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۱}\right] \quad\Rightarrow\quad f(t)=t*\sin t$$

$$\xrightarrow{t*\sin t=t-\sin t} f(t)=t-\sin t$$

مثال ۱. *مقدار انتگرال زیر کدام است؟*

$$I=\int_0^\infty e^{-t}\cos ۴t\ dt$$

۱) $\frac{۱}{۱۷}$ ۲) $\frac{۲}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳۴}$ ۴) $\frac{۳}{۱۷}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\ dt=L[f]|_{s=۱}} I=\int_0^\infty e^{-t}\cos ۴t\ dt=L[\cos ۴t]\Big|_{s=۱}$$

$$\xrightarrow{\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^۲+a^۲}} I=\frac{s}{s^۲+۱۶}\Big|_{s=۱}=\frac{۱}{۱۷}$$

مثال ۲. *مقدار* $\int_0^\infty t^۲e^{-۳t}\ dt$ *برابر است با:*

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳}{۲۷}$ ۴) $\frac{۴}{۲۷}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$I=\int_0^\infty t^۲e^{-۳t}\ dt=\int_0^\infty e^{-۳t}t^۲\ dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\ dt=L[f]|_{s=s}} I=L[t^۲]\Big|_{s=۳}$$

$$\xrightarrow{t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{s^{n+۱}}} I=(\frac{۲!}{s^۳})\Big|_{s=۳}=\frac{۲}{۲۷}$$

مثال ۳. *اگر* $L^{-1}\frac{1}{s}=1$ *و* $L^{-1}\frac{1}{s+a}=e^{-at}$، *مقدار* $L^{-1}\frac{1}{s^2+2s}$ *برابر است با:*

۱) $\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$ ۲) $\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$ ۳) $-\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$ ۴) $\frac{1}{2}(-1+e^{-2t})$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2})\right]=\frac{1}{2}(L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right])$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{s}\xrightarrow{L^{-1}}1)\ \&\ (\frac{1}{s+a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{-at})} f(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

مثال ۴. *ترانسفورم لاپلاس* $L[5\sin 2t-3\cos 2t]$ *عبارت است از:*

۱) $\frac{10+3s}{s^2+4}$ ۲) $\frac{10-3s}{s^2+4}$ ۳) $\frac{5-3s}{s^2+4}$ ۴) $\frac{5+3s}{s^2+4}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$F(s)=L[5\sin 2t-3\cos 2t]=5L[\sin 2t]-3L[\cos 2t]$$

$$\xrightarrow{(\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^2+a^2})\&(\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^2+a^2})} F(s)=5(\frac{2}{s^2+4})-3(\frac{s}{s^2+4})=\frac{10-3s}{s^2+4}$$

مثال ۵. *معکوس تبدیل لاپلاس* $\frac{3s+7}{s^2-2s-3}$ *برابر است با:*

۱) $4e^{-3t}-e^{t}$ ۲) $4e^{3t}-e^{-t}$ ۳) $4e^{-3t}+e^{t}$ ۴) $4e^{3t}+e^{-t}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right]=L^{-1}\left[\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right]=4L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\xrightarrow{\frac{1}{s-a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{at}} f(t)=4e^{3t}-e^{-t}$$

یادآوری. طبق قاعده تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}=\frac{A(s+1)+B(s-3)}{(s-3)(s+1)}\Rightarrow\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{(A+B)s+(A-3B)}{s^2-2s-3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=3\\A-3B=7\end{cases}\Rightarrow A=4\quad\&\quad B=-1$$

مثال ۶. *اگر* F *تابعی معلوم بوده و تابع* $g(t)$ *از مرتبه یک تابع نمایی باشد و داشته باشیم:*

$$L[g(t)]=F(s).(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)$$

آنگاه حاصل عبارت $L(\int_0^t(1-u_1(z)g(t-z)dz)$ *کدام است؟*

۱) $F(s-1)$ ۲) $sF(s)$ ۳) $\frac{F(s)}{s}$ ۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۳».

یادآوری. سری هندسی با نمایش عمومی $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots$ با شرط $|q|<1$، به حد مجموع $\frac{a}{1-q}$ همگرا است، که در آن a جمله اول و q قدر نسبت سری مفروض می‌باشد. در نتیجه؛

$$1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-ns}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-s})^n$$

$$\xrightarrow{(\begin{cases}a=1\\q=e^{-s}\end{cases}\text{ سری هندسی }\&\ (s>0\Rightarrow 0<q=e^{-s}<1)}1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-e^{-s}}$$

$$\xrightarrow{L[g(t)]\text{ با جایگذاری در تساوی (۱)}} L[g(t)]=F(s)\cdot(1+e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s}+\cdots)=F(s)(\frac{1}{1-e^{-s}})\quad;(1)$$

در اینصورت؛

$$A=L[\int_0^t(1-u_1(z)g(t-z)dz]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} A=L[(1-u_1(t))*g(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} A=L[1-u_1(t)]L[g(t)]=(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s})L[g(t)]$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (۱)}} A=\frac{1-e^{-s}}{s}\cdot F(s)\frac{1}{1-e^{-s}}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{F(s)}{s}$$

مثال ۷. *اگر* $L[f(t)]=F(s)$ *و* $L[g(t)]=G(s)$ *باشد، آنگاه* $L^{-1}[F(s)G(s)]$ *کدامیک از عبارات زیر می‌باشد.*

۱) $f(t)g(t)$ ۲) $\int_0^t f(t)g(y)dy$ ۳) $\int_0^t f(t-y)g(y)dy$ ۴) $\int_0^t f(y)g(t)dy$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$A=L^{-1}[F(s)G(s)]=L^{-1}[F(s)]*L^{-1}[G(s)]=f(t)*g(t)\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx}A=\int_0^t f(t-y)g(y)dy$$

مثال ۸. *تابع* $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{n}=f(t)$ *که در آن* $*$ *کانولوشن است برابر است با:*

۱) $\frac{t^n}{n+1}$ ۲) $\frac{t^n}{n!}$ ۳) $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

☑ **حل.** گزینه «۴». به کمک استقراء و با توجه به تساوی $L[f*g]=L[f]L[g]$ می‌توان ثابت کرد:

$$L[\underbrace{f*f*\cdots*f}_{n-\text{بار}}]=(L[f])^n\quad;(1)$$

در اینصورت؛

$$f(t)=\underbrace{1*1*\cdots*1}_{n}\quad\Rightarrow\quad L[f(t)]=L[1*1*\cdots*1]$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} L[f(t)]=\big(L[1]\big)^n=(\frac{1}{s})^n\quad\Rightarrow\quad f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right]\xrightarrow{\frac{1}{s^{n+1}}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{t^n}{n!}}f(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

مثال ۹. *تبدیل لاپلاس معکوس تابع* $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ *برابر است با:*

۱) $\cos t - t\sin t$ ۲) $\frac{1}{t}(\sin t - t\cos t)$ ۳) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ ۴) $\sin t + t\cos t$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F\times G]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] * L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(t) = \sin t * \sin t$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx} f(t) = \int_0^t \sin(t-x)\sin x dx$$

$$\xrightarrow{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))} f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t-2x)-\cos t)dx \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2x) - \cos t\times(x)\right)\Big|_0^t = -\frac{1}{4}(\sin(t-2x)\Big|_0^t) - \frac{1}{2}\cos t(x)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$f(t) = -\frac{1}{4}(\sin(-t)-\sin t) - \frac{1}{2}\cos t(t-0) = -\frac{1}{4}(-2\sin t) - \frac{1}{2}t\cos t \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$$

مثال ۱۰. *تبدیل لاپلاس معکوس* $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ *برابر است با:*

۱) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ ۲) $\sin t - t\cos t$ ۳) $\frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$ ۴) $\sin t + t\cos t$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[FG]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} f(t) = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] * L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(t) = \cos t * \cos t$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx} f(t) = \int_0^t \cos(t-x)\cos x dx$$

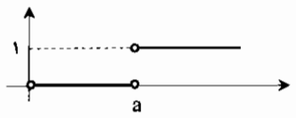
$$\xrightarrow{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))} f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(t-2x))dx \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(\cos t.(x) + \frac{1}{2}\sin(t-2x))\Big|_0^t \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

ـ تبدیل لاپلاس چند تابع خاص.

تبدیل لاپلاس تابع پله واحد

تعریف. برای $a \geq 0$ تابع پله واحد $u_a(t)$ عبارتست از:



$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & ; 0 < t < a \\ 1 & ; \quad t > a \end{cases}$$

لازم بذکر است، از کلمه هوی ساید به جای پله واحد و از نمادهای $U(t-a)$ و $H(t-a)$ به جای $u_a(t)$ نیز استفاده می‌شود. و هم چنین $u_0(t) = 1$ و $u_\infty(t) = 0$ می‌باشند.

گزاره. تبدیل لاپلاس تابع پله واحد برابر است با:

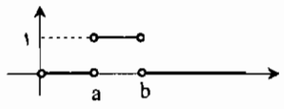
$$u_a(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \frac{1}{s}e^{-as} \quad ; s > 0$$

بعنوان مثال؛ $u_{-2}(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}e^{2s}$; $\frac{1}{s}e^{-\pi s} \xrightarrow{L^{-1}} u_\pi(t)$

بازنویسی توابع قطعه‌ای پیوسته برحسب تابع پله واحد.

سؤال قابل توجهی که اکنون می‌توان مطرح کرد، اینست که چگونه می‌توان تبدیل لاپلاس توابع قطعه‌ای پیوسته را محاسبه کرد؟ گزاره زیر می‌تواند راهگشای ما در پاسخ به این سؤال باشد.

گزاره. اگر $u_a(t)$ و $u_b(t)$ توابع هوی ساید با شرط $0 \leq a < b$ باشند، آنگاه:



$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & ; a < t < b \\ 0 & ; \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad ; 0 \leq a < b$$

با توجه به گزاره فوق در حالت کلی می‌توان بررسی کرد، اگر ضابطه تابع قطعه‌ای پیوسته $f(t)$ دارای نمایش

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & ; a < t < b \\ f_2(t) & ; c < t < d \\ \vdots & \vdots \end{cases} \qquad ; 0 < a < b < c < \cdots$$

باشد، می‌توان آن را برحسب توابع هوی ساید بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(t) = (u_a(t) - u_b(t))f_1(t) + (u_c(t) - u_d(t))f_2(t) + \cdots$$

و هم چنین در حالت خاص، اگر ضابطه تابع مفروض $f(t)$ دارای نمایش

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & ; \quad 0 < t < a_1 \\ f_2(t) & ; \quad a_1 \leq t < a_2 \\ \vdots & ; \quad \vdots \\ f_{n-1}(t) & ; a_{n-2} \leq t < a_{n-1} \\ f_n(t) & ; a_{n-1} \leq t \end{cases}$$

باشد، می‌توان آن را برحسب توابع هوی ساید، بصورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$f(t) = f_1(t) + u_{a_1}(t)(f_2(t) - f_1(t)) + \cdots + u_{a_{n-1}}(t)(f_n(t) - f_{n-1}(t))$$

بعنوان مثال. تابع قطعه‌ای پیوسته زیر را برحسب تابع پله بازنویسی کنید.

$$g(t)=\begin{cases} t & ;\ ۰<t<۱ \\ e^t & ;\ ۱<t<۲ \\ ۰ & ;\ \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

حل.

$$g(t)=\big(u_۰(t)-u_۱(t)\big)\times t+\big(u_۱(t)-u_۲(t)\big)\times e^t+\big(u_۲(t)-u_\infty(t)\big)\times(۰) \quad\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{u_۰(t)=۱\ \&\ u_\infty(t)=۰} g(t)=\big(۱-u_۲(t)\big)t+\big(u_۱(t)-u_۲(t)\big)e^t \quad\Rightarrow\quad g(t)=t+u_۱(t)(e^t-t)-u_۲(t)t$$

تذکر.

۱ـ از آنجائیکه $u_۰(t)=۱$ و $u_\infty(t)=۰$ است، می‌توان در توابع قطعه‌ای پیوسته، هر ضابطه به فرم ـ $g(t)$; $۰<t<a$ ـ را به صورت $(۱-u_a(t))\times g(t)$ و هر ضابطه به فرم ـ $h(t)$; $t>a$ ـ را به صورت $u_a(t)\times h(t)$ بازنویسی کرد.

بعنوان مثال. تابع قطعه‌ای پیوسته $f(t)=\begin{cases} t^۲ & ;\ ۰<t<۲ \\ \cosh t & ;\ t>۲ \end{cases}$ **را برحسب تابع هوی ساید بنویسید.**

حل.

$$f(t)=\big(۱-u_۲(t)\big)\times t^۲+u_۲(t)\times\cosh t \quad\Rightarrow\quad f(t)=t^۲+u_۲(t)(\cosh t-t^۲)$$

۲ـ با توجه به اینکه در درس معادلات دیفرانسیل معمولی، بازنویسی توابع قطعه‌ای پیوسته برحسب تابع پله واحد، به جهت سادگی در محاسبه تبدیل لاپلاس این دسته از توابع مطرح می‌گردد، و از آنجائیکه تبدیل لاپلاس برای تابع مفروض $f(t)$ تنها در فاصله $t\geq ۰$ مورد بحث است، لذا در توابع قطعه‌ای پیوسته که ضابطه‌ای با دامنه $t<a$ دارند، می‌توان ضابطه مذکور را با دامنه $۰<t<a$ در نظر گرفت.

بعنوان مثال. تابع قطعه‌ای پیوسته $f(t)=\begin{cases} e^t & ;\ t<۱ \\ e^{-t} & ;\ t>۱ \end{cases}$ **را برحسب تابع هوی ساید بنویسید.**

حل. با توجه به تذکر ۲ و بازنویسی تابع مفروض به صورت $f(t)=\begin{cases} e^t & ;\ ۰<t<۱ \\ e^{-t} & ;\ t>۱ \end{cases}$ داریم:

$$f(t)=\big(۱-u_۱(t)\big)\times e^t+u_۱(t)\times e^{-t} \quad\Rightarrow\quad f(t)=e^t+u_۱(t)(e^{-t}-e^t)$$

مثال ۱۱. ***تبدیل لاپلاس تابع*** $f(t)=[t]$ ***کدام است؟***

۱) $\dfrac{e^{-s}}{۱-e^{-s}}$ ۲) $\dfrac{e^{-s}}{۱+e^{-s}}$ ۳) $\dfrac{e^{-s}}{s(۱-e^{-s})}$ ۴) $\dfrac{e^{-s}}{s(۱+e^{-s})}$

حل. گزینه «۳». از آنجائیکه تبدیل لاپلاس برای $t\geq ۰$ محاسبه می‌گردد، داریم:

$$f(t)=[t]=\begin{cases} ۰ & ;\ ۰\leq t<۱ \\ ۱ & ;\ ۱\leq t<۲ \\ ۲ & ;\ ۲\leq t<۳ \\ \vdots & \vdots\quad\vdots \end{cases}$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=\big(۱-u_۱(t)\big)\times ۰+\big(u_۱(t)-u_۲(t)\big)\times ۱+\big(u_۲(t)-u_۳(t)\big)\times ۲+\cdots \quad\Rightarrow$$

$$f(t)=۰+u_۱(t)(۱-۰)+u_۲(t)(۲-۱)+\cdots=u_۱(t)+u_۲(t)+\cdots \quad\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{۱}{s}e^{-s}+\frac{۱}{s}e^{-۲s}+\cdots=\frac{۱}{s}(e^{-s}+e^{-۲s}+\cdots)=\frac{۱}{s}\sum_{k=۱}^{\infty}(e^{-s})^k$$

عبارت $\sum_{k=۱}^{\infty}(e^{-s})^k$ یک سری هندسی با قدر نسبت $q=e^{-s}$ است. در اینصورت با فرض $s>۰$ داریم:

$$(s>۰ \quad\Rightarrow\quad ۰<q=e^{-s}<۱)\xrightarrow{(|q|<۱\Rightarrow \sum_{k=۱}^{\infty}q^k=\frac{q}{۱-q})} L[f(t)]=\frac{۱}{s}\cdot\frac{e^{-s}}{۱-e^{-s}} \qquad ;\ s>۰$$

یادآوری. سری هندسی $\sum_{k=۱}^{\infty}q^k$، با شرط $|q|<۱$ به حد مجموع $\dfrac{q}{۱-q}$ همگراست.

مثال ۱۲. ***تبدیل لاپلاس تابع زیر عبارتست از:***

$$f(t)=\begin{cases} t & ;\ t\leq ۲ \\ t+۱ & ;\ ۲<t<۳ \\ t-۱ & ;\ ۳\leq t \end{cases}$$

۱) $\dfrac{۱+se^{-۲s}-۲e^{-۳s}}{s^۲}$ ۲) $\dfrac{۱-se^{-۲s}-۲e^{-۳s}}{s^۲}$ ۳) $\dfrac{۱-se^{-۲s}+۲e^{-۳s}}{s^۲}$ ۴) $\dfrac{۱+se^{-۲s}+۲e^{-۳s}}{s^۲}$

حل. گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=t+u_۲(t)\big((t+۱)-t\big)+u_۳(t)\big((t-۱)-(t+۱)\big) \quad\Rightarrow$$

$$f(t)=t+u_۲(t)-۲u_۳(t) \quad\Rightarrow\quad L[f(t)]=\frac{۱}{s^۲}+\frac{۱}{s}e^{-۲s}-\frac{۲}{s}e^{-۳s} \quad\Rightarrow\quad L[f(t)]=\frac{۱+se^{-۲s}-۲se^{-۳s}}{s^۲}$$

مثال ۱۳. ***تبدیل لاپلاس تابع زیر کدام است؟***

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & ;\ x\leq \pi \\ ۱+\cos x & ;\ x>\pi \end{cases}$$

۱) $\dfrac{s}{s^۲+۱}-\dfrac{e^{\pi s}}{s}$ ۲) $\dfrac{s}{s^۲+۱}+\dfrac{e^{\pi s}}{s}$ ۳) $\dfrac{s}{s^۲+۱}-\dfrac{e^{-\pi s}}{s}$ ۴) $-\dfrac{s}{s^۲+۱}+\dfrac{e^{-\pi s}}{s}$

حل. گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(x)=\cos x+u_\pi(x)\big((۱+\cos x)-\cos x\big) \quad\Rightarrow\quad f(x)=\cos x+u_\pi(x) \quad\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{s}{s^۲+۱}+\frac{۱}{s}e^{-\pi s}$$

مثال ۱۴. ***تبدیل لاپلاس تابع*** $f(t)$ ***که نمودار آن در شکل نشان داده شده است کدامیک از مقادیر زیر است:***

۱) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s}(۱-e^{-s})$ ۲) $F(s)=\dfrac{۱}{s+۱}-\dfrac{۱}{s-۲}$

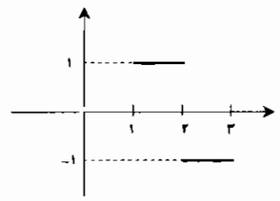
۳) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s+۱}-\dfrac{e^{-۲s}}{s+۲}$ ۴) $F(s)=\dfrac{u(s-۱)}{s+۱}-\dfrac{u(s-۲)}{s+۲}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{u_a(t)\ \text{بازنویسی توابع بر حسب}} f(t)=u_1(t)-u_2(t) \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=L[u_1(t)]-L[u_2(t)]$$

$$\xrightarrow{u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as}} F(s)=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s} \quad \Rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{s}e^{-s}(1-e^{-s})$$

مثال۱۵. *تبدیل لاپلاس تابع f(t) با نمودار زیر عبارتست از:*



۱) $\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$ ۲) $\frac{1}{s}(e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s})$

۳) $\frac{1}{s}(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s})$ ۴) $\frac{1}{s}(e^{-s}+2e^{-2s}+e^{-3s})$

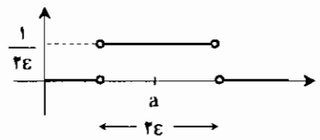
☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{u_a(t)\ \text{بازنویسی توابع بر حسب}} f(t)=(u_1(t)-u_2(t))\times 1+(u_2(t)-u_3(t))\times -1 \quad \Rightarrow$$

$$f(t)=u_1(t)-2u_2(t)+u_3(t) \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s}=\frac{1}{s}(e^{-s}-2e^{-2s}+e^{-3s})$$

تبدیل لاپلاس تابع دلتای دیراک

تعریف. برای $a\geq 0$ تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t-a)$ عبارتست از:



$$\delta_\varepsilon(t-a)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon} & ;\ |t-a|<\varepsilon\\ 0 & ;\ |t-a|>\varepsilon\end{cases}$$

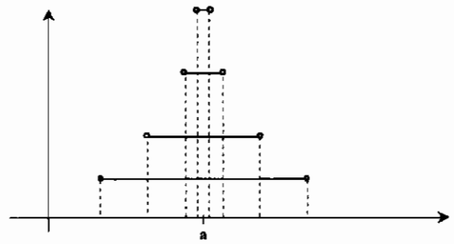
با توجه به تعریف تابع ضربه می‌توان بدست آورد:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(t-a)\,dt=1$$

تعریف. حد تابع ضربه وقتی مقدار ε به سمت صفر میل می‌کند، تابع دلتای دیراک $\delta(t-a)$ حول نقطه a نامیده می‌شود.

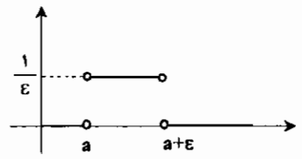
به عبارت دیگر؛

$$\delta(t-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t-a)$$



تذکر. تابع ضربه را بصورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف. برای $a\geq 0$، تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t-a)$، در فاصله $[0,\infty)$ عبارتست از:



$$\delta_\varepsilon(t-a)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & ;\ a<t<a+\varepsilon\\ 0 & ;\ \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

که بازنویسی آن برحسب توابع پله‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\delta_\varepsilon(t-a)=\frac{1}{\varepsilon}(u_a(t)-u_{a+\varepsilon}(t))$$

با توجه به تعاریف فوق، تابع دلتای دیراک دارای خواص زیر خواهد بود:

الف) $\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & ;\ t=a\\ 0 & ;\ t\neq a\end{cases}$

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)\,dt=1$

اگر تابع $g(t)$ در IR پیوسته باشد:

ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)\,dt=g(a)$

به عنوان مثال، با انتخاب $a=0$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,g(t)\,dt=g(0)$$

گزاره. تبدیل لاپلاس تابع دلتای دیراک برابر است با:

$$\delta(t-a)\ \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}}\ e^{-as}$$

به عنوان مثال؛

$$\delta(t)\xrightarrow{L}1 \quad \& \quad \delta(t+\tfrac{\pi}{4})\xrightarrow{L}e^{\frac{\pi}{4}s}$$

مثال۱۶. *اگر* $\delta(t)=Lim f(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t>0\end{cases}$ *و* $g(t)$ *یک تابع پیوسته باشد، کدام رابطه صحیح نمی‌باشد.*

۱) $\int_0^{\infty}\delta(t)dt=1$ ۲) $\int_0^{\infty}\delta(t)g(t)dt=g(0)$

۳) $\int_0^{\infty}\delta(t-a)g(t)dt=g(a)$ ۴) $\int_0^{\infty}\delta(t-a)g(t)dt=g(0)$

☑ **حل.** گزینه «۴»، با توجه به خواص تابع دلتای دیراک.

مثال۱۷. *مقدار انتگرال* $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^t\,dt$ *کدام است؟*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) e

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)g(t)dt=g(0)} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^t\,dt=e^0=1$$

مثال۱۸. *حاصل* $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{\pi}{4})sint\,dt$ *کدام است؟*

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)dt=g(a)} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{\pi}{4})sint\,dt=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۱۹. *حاصل* $L^{-1}\left[\frac{e^{-۲s}}{s^۲+۱}\right]$ *برابر است با:*

۱) $\delta(t-۲)*\sin t$ ۲) $\delta(t-۲)*\frac{\sin t}{t}$ ۳) $e^{-t}\delta(t-۲)*\sin t$ ۴) $\delta(t-۲)*t\sin t$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{e^{-۲s}}{s^۲+۱}\right]=L^{-۱}\left[e^{-۲s}.\frac{۱}{s^۲+۱}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[FG]=L^{-۱}[F]*L^{-۱}[G]} f(t)=L^{-۱}[e^{-۲s}]*L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۱}\right] \xrightarrow{e^{-as}\ L^{-۱}\ \delta(t-a)} f(t)=\delta(t-۲)*\sin t$$

مثال ۲۰. *انتگرال* $\int_۰^{۲\pi} x^۲\sin ۲x\,e^{ix}\,\delta(x-\pi)\,dx$ *برابر است با:*

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) هیچکدام

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$I=\int_۰^{۲\pi} x^۲\sin ۲x\,e^{ix}\delta(x-\pi)\,dx=\int_۰^{۲\pi}\delta(x-\pi)(x^۲\sin ۲x\,e^{ix})\,dx$$

با توجه به تعریف $\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & ;t=a\\ ۰ & ;t\neq a\end{cases}$ داریم:

$$(x\neq\pi \Rightarrow \delta(x-\pi)=۰) \Rightarrow I=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\pi)(x^۲\sin ۲x\,e^{ix})\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)\,dt=g(a)} I=(x^۲\sin ۲x\,e^{ix})\big|_{x=\pi} \xrightarrow{\sin ۲\pi=۰} I=۰$$

تبدیل لاپلاس توابع متناوب

تعریف. تابع $f(t)$ در فاصله $[۰,\infty)$ متناوب نامیده می‌شود، هرگاه به ازاء عددی مانند T داشته باشیم:

$$\forall t>۰\ ;f(t+T)=f(t)$$

کوچکترین $T>۰$ که در تساوی فوق صدق کند، دوره تناوب تابع $f(t)$ نامیده می‌شود.

گزاره. فرض کنید $f(t)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T است. اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود باشد، آنگاه؛

$$L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-sT}}\int_۰^T e^{-st}f(t)\,dt$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس تابع متناوب زیر را بدست آورید.

$$f(t)=\begin{cases}۱ & ;۰\le t\le ۱\\ -۱ & ;۱<t\le ۲\end{cases}\quad ;f(t+۲)=f(t)$$

حل.

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب؛ }T=۲} L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-s\times ۲}}\int_۰^۲ e^{-st}f(t)\,dt \qquad ;(۱)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال می‌پردازیم؛

$$J=\int_۰^۲ e^{-st}f(t)\,dt=\int_۰^۱ e^{-st}f(t)\,dt+\int_۱^۲ e^{-st}f(t)\,dt$$

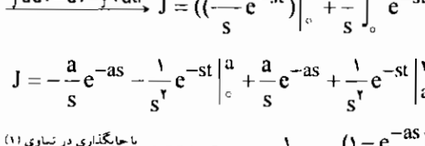
$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع } f(t)} J=\int_۰^۱ e^{-st}\times(۱)\,dt+\int_۱^۲ e^{-st}\times(-۲)\,dt=\int_۰^۱ e^{-st}\,dt-۲\int_۱^۲ e^{-st}\,dt \Rightarrow$$

$$J=\frac{-۱}{s}e^{-st}\Big|_۰^۱+\frac{۲}{s}e^{-st}\Big|_۱^۲=\frac{۱}{s}(-e^{-s}+۱+۲e^{-۲s}-۲e^{-s})=\frac{۱-۳e^{-s}+۲e^{-۲s}}{s} \Rightarrow J=\frac{(e^{-s}-۱)(۲e^{-s}-۱)}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}} L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-۲s}}\cdot\frac{(e^{-s}-۱)(۲e^{-s}-۱)}{s}=\frac{۱}{(۱-e^{-s})(۱+e^{-s})}\cdot\frac{(۱-e^{-s})(۱-۲e^{-s})}{s} \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{۱-۲e^{-s}}{s(۱+e^{-s})}$$

مثال ۲۱. *موج مثلثی متناوب، دارای نمودار مقابل است. تبدیل لاپلاس آن کدام است؟*



۱) $\frac{۱+e^{-as}}{s^۲(۱+e^{-as})}$ ۲) $\frac{۱-e^{-as}}{s^۲(۱+e^{as})}$

۳) $\frac{۱-e^{-as}}{s^۲(۱+e^{-as})}$ ۴) $\frac{۱-e^{-as}}{s(۱+e^{-as})}$

☑ **حل.** گزینه «۳». تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=۲a$ است، که در یک دوره تناوب $[۰,۲a]$ از در خط زیر تشکیل شده است:

$$f(t)=\begin{cases}t & ;۰\le t<a\\ ۲a-t & ;a\le t<۲a\end{cases}$$

در نتیجه؛

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب؛ }T=۲a} L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-s\times ۲a}}\int_۰^{۲a}e^{-st}f(t)dt \qquad ;(۱)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_۰^{۲a}e^{-st}f(t)dt=\int_۰^a e^{-st}f(t)dt+\int_a^{۲a}e^{-st}f(t)dt$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف } f(t)} J=\int_۰^a e^{-st}\times(t)\,dt+\int_a^{۲a}e^{-st}\times(۲t-a)\,dt=\int_۰^a \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}+\int_a^a \underbrace{(۲a-t)}_{u}\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}$$

$$\begin{cases}du=dt\\ v=-\frac{۱}{s}e^{-st}\end{cases}\qquad\begin{cases}du=-dt\\ v=-\frac{۱}{s}e^{-st}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=dv-\int vdu} J=\left(\left(\frac{-t}{s}e^{-st}\right)\Big|_۰^a+\frac{۱}{s}\int_۰^a e^{-st}dt\right)+\left(\left(\frac{-(۲a-t)}{s}e^{-st}\right)\Big|_a^{۲a}-\frac{۱}{s}\int_a^{۲a}e^{-st}dt\right) \Rightarrow$$

$$J=-\frac{a}{s}e^{-as}-\frac{۱}{s^۲}e^{-st}\Big|_۰^a+\frac{a}{s}e^{-as}+\frac{۱}{s^۲}e^{-st}\Big|_a^{۲a} \Rightarrow J=\frac{۱}{s^۲}(۱-e^{-as}+e^{-۲as}-e^{-as}) \Rightarrow J=\frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}} L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-۲as}}\cdot\frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲}=\frac{۱}{(۱-e^{as})(۱+e^{-as})}\cdot\frac{(۱-e^{-as})^۲}{s^۲} \Rightarrow L[f(t)]=\frac{۱-e^{-as}}{s^۲(۱+e^{-as})}$$

مثال ۲۲. *تبدیل لاپلاس تابع زیر کدام است؟*

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 2n\le t<2n+1\\ -1 & 2n+1\le t\le 2n+2\end{cases}\quad ;\ n=0,1,2,\ldots$$

۱) $L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\cot g\frac{s}{2}$ ۲) $L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$ ۳) $L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}$ ۴) $L[f(t)]=\frac{1-e^{-\frac{s}{2}}}{1+e^{-\frac{s}{2}}}$

☑ **حل.** گزینه «۲». تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2$ است، که با جایگذاری $n=0$ ، در یک دوره تناوب $[0,2]$ ضابطه تابع مفروض عبارتست از:

$$f(t)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le t<1\\ -1 & ;\ 1\le t<2\end{cases}$$

در نتیجه؛

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب } T=2} L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt \qquad ;\ (1)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_0^2 e^{-st}f(t)dt=\int_0^1 e^{-st}f(t)dt+\int_1^2 e^{-st}f(t)dt$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع } f(t)} J=\int_0^1 e^{-st}\times(1)dt+\int_1^2 e^{-st}\times(-1)dt=\int_0^1 e^{-st}dt-\int_1^2 e^{-st}dt \quad\Rightarrow$$

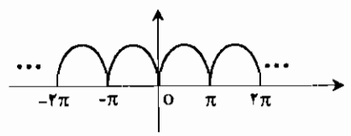
$$J=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2=\frac{1}{s}(-e^{-s}+1+e^{-2s}-e^{-s})=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}\quad\Rightarrow\quad J=\frac{(1-e^{-s})^2}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{(1-e^{-s})^2}{s}=\frac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\cdot\frac{(1-e^{-s})^2}{s}\quad\Rightarrow\quad L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$$

مثال ۲۳. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=|\sin t|$ کدام است؟*

۱) $\frac{1}{1+s^2}\cot g\,h(\frac{\pi}{2}s)$ ۲) $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$

۳) $\frac{1}{1+s^2}\tan g\,h(\frac{\pi}{2}s)$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲



☑ **حل.** گزینه «۴». با توجه به تساوی $|\sin t|=|\sin(t+\pi)|$، تابع $f(t)=|\sin t|$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ است.

بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب } ;\ T=\pi} L[|\sin t|]=\frac{1}{1-e^{-s\pi}}\int_0^\pi e^{-st}\,|\sin t|\,dt$$

$$\xrightarrow{(0\le t\le\pi\ \Rightarrow\ \sin t\ge 0)} L[|\sin t|]=\frac{1}{1-e^{-s\pi}}\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt \qquad ;(1)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_0^\pi \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{\sin t\,dt}_{dv}\xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du} J=(e^{-st}\times-\cos t)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi -\cos t\times -se^{-st}dt\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}du=-se^{-st}dt\\ v=\int\sin t\,dt=-\cos t\end{cases}$$

$$J=(e^{-\pi s}+1)-s\int_0^\pi \underbrace{e^{-st}}_{u}\underbrace{\cos t\,dt}_{dv}\xrightarrow{\int u\,dv=uv-\int v\,du} J=e^{-\pi s}+1-s((e^{-st}\sin t)\Big|_0^\pi+s\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases}du=-se^{-st}dt\\ v=\int\cos t\,dt=\sin t\end{cases}$$

$$J=e^{-\pi s}+1-s^2\int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt\xrightarrow{\int_0^\pi e^{-st}\sin t=J} J=1+e^{-\pi s}-s^2J\quad\Rightarrow\quad(1+s^2)J=1+e^{-\pi s}\quad\Rightarrow$$

$$J=\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} L[|\sin t|]=\frac{1}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}\quad\Rightarrow\quad L[|\sin t|]=\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$$

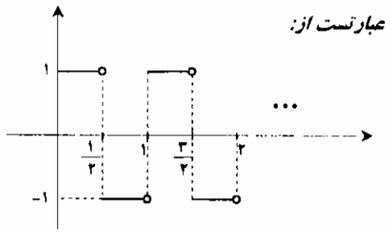
از طرف دیگر با ضرب $e^{\frac{\pi}{2}s}$ در صورت و مخرج عبارت سمت راست در تساوی فوق می‌توان بدست آورد:

$$L[|\sin t|]=\frac{1}{1+s^2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}s}+e^{-\frac{\pi}{2}s}}{e^{\frac{\pi}{2}s}-e^{-\frac{\pi}{2}s}}=\frac{1}{1+s^2}\cot g\,h(\frac{\pi}{2}s)$$

یادآوری.

$$\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\cot g\,h\,x$$

مثال ۲۴. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که نمودار آن در زیر رسم شده است، عبارتست از:*



۱) $\frac{1}{s}\cot g\,h\frac{s}{4}$ ۲) $\frac{1}{s}\tan g\,h\frac{s}{4}$

۳) $\frac{1}{s}\sin h\frac{s}{4}$ ۴) $\frac{1}{s}\cos h\frac{s}{4}$

☑ **حل.** گزینه «۲». تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=1$ است، که در یک دوره تناوب $[0,1]$ از ضابطه زیر تشکیل شده است:

$$f(t)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le t<\frac{1}{2}\\ -1 & ;\ \frac{1}{2}\le t<1\end{cases}$$

در نتیجه؛

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب } ;\ T=1} F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-s\times 1}}\int_0^1 e^{-st}\,f(t)\,dt \qquad ;(1)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_{0}^{1} e^{-st}f(t)\,dt=\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-st}f(t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع } f(t)} J=\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-st}\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-st}\,dt=\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \Rightarrow$$

$$J=\left(-\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{2}}+\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{2}}\right)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-\frac{s}{2}}+\frac{1}{s}e^{-s} \Rightarrow J=\frac{1}{s}\left(1-2e^{-\frac{s}{2}}+(e^{-\frac{s}{2}})^{2}\right) \Rightarrow$$

$$J=\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{s}{2}})^{2} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} F(s)=\frac{1}{1-e^{-s}}\cdot\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{s}{2}})^{2}=\frac{1}{s}\cdot\frac{(1-e^{-\frac{s}{2}})^{2}}{1-(e^{-\frac{s}{2}})^{2}} \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{(1-e^{-\frac{s}{2}})^{2}}{(1-e^{-\frac{s}{2}})(1+e^{-\frac{s}{2}})} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-\frac{s}{2}}}{1+e^{-\frac{s}{2}}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{s}{4}}-e^{-\frac{s}{4}}}{e^{\frac{s}{4}}+e^{-\frac{s}{4}}} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{4}\right)$$

یادآوری. $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\tanh x$

مثال ۲۵. *تبدیل لاپلاس تابع موج دندانه اره‌ای که نمودار آن در زیر رسم شده است، کدام است:*

۱) $\dfrac{b}{as^{2}}+\dfrac{be^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

۲) $\dfrac{b}{as^{2}}+\dfrac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$

۳) $\dfrac{b}{as^{2}}-\dfrac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$

۴) $\dfrac{b}{as^{2}}-\dfrac{be^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

☑ **حل.** گزینه «۳». تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=a$ است، که در یک دوره تناوب $[0,a]$ دارای ضابطه $f(t)=\dfrac{b}{a}t$ است. در نتیجه:

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب: } T=a} F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-s\times a}}\int_{0}^{a} e^{-st}\times\frac{b}{a}t\,dt \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{b}{a(1-e^{-as})}\int_{0}^{a} te^{-st}\,dt \quad ; (*)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_{0}^{a} te^{-st}\,dt=\left(-\frac{t}{s}e^{-st}\right)\Big|_{0}^{a}+\frac{1}{s}\int_{0}^{a} e^{-st}\,dt=-\frac{a}{s}e^{-as}-\frac{1}{s^{2}}\left(e^{-st}\Big|_{0}^{a}\right) \Rightarrow$$

$$J=-\frac{a}{s}e^{-as}-\frac{1}{s^{2}}(e^{-as}-1) \Rightarrow J=\frac{1}{s^{2}}(1-e^{-as})-\frac{a}{s}e^{-as}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (*)}} F(s)=\frac{b}{a(1-e^{-as})}\cdot\left(\frac{1}{s^{2}}(1-e^{-as})-\frac{a}{s}e^{-as}\right) \Rightarrow F(s)=\frac{b}{as^{2}}-\frac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$$

ـ قضایای تبدیل لاپلاس.

تبدیل لاپلاس و انتقال

قضیه. (قاعده اول انتقال) اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

الف) $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)=L[f(t)]\big|_{s\mapsto s-a}$

ب) $L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)=e^{at}L^{-1}[F(s)]$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $e^{t}u_{1}(t)+e^{4t}\sqrt{t}$ ۲) $2\cosh t.\cos t$

حل.

۱) $F(s)=L[f(t)]=L[e^{t}u_{1}(t)+e^{4t}\sqrt{t}\,]=L[e^{t}u_{1}(t)]+L[e^{4t}t^{\frac{1}{2}}]$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]\big|_{s\mapsto s-a}} F(s)=L[u_{1}(t)]\big|_{s\mapsto s-1}+L[t^{\frac{1}{2}}]\big|_{s\mapsto s-4}$$

$$\xrightarrow{(u_{a}(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as})\,\&\,(t^{\alpha}\xrightarrow{L}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}})} F(s)=\left(\frac{1}{s}e^{-s}\right)\Big|_{s\mapsto s-1}+\left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}\right)\Big|_{s\mapsto s-4}$$

$$\xrightarrow{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} F(s)=\frac{1}{s-1}e^{-(s-1)}+\frac{\sqrt{\pi}}{(s-4)^{\frac{3}{2}}}$$

۲) $F(s)=L[f(t)]=L[2\cosh t.\cos t]\xrightarrow{\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}} F(s)=L[(e^{t}+e^{-t})\cos t] \Rightarrow F(s)=L[e^{t}\cos t+e^{-t}\cos t]$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]\big|_{s\mapsto s-a}} F(s)=L[\cos t]\big|_{s\mapsto s-1}+L[\cos t]\big|_{s\mapsto s+1}$$

$$\xrightarrow{\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^{2}+a^{2}}} F(s)=\left(\frac{s}{s^{2}+1}\right)\Big|_{s\mapsto s-1}+\left(\frac{s}{s^{2}+1}\right)\Big|_{s\mapsto s+1} \Rightarrow F(s)=\frac{s-1}{(s-1)^{2}+1}+\frac{s+1}{(s+1)^{2}+1}$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\dfrac{s+1}{s^{2}+4s+5}$ ۲) $\dfrac{3s-2}{s(s-1)^{2}}$

حل.

۱) $f(t)=L^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^{2}+4s+5}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{s+(2-1)}{s^{2}+4s+4+1}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{(s+2)-1}{(s+2)^{2}+1}\right]$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]\;:\;a=-2} f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^{2}+1}\right]=e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^{2}+1}-\frac{1}{s^{2}+1}\right]$$

$$\xrightarrow{(\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^{2}+a^{2}})\,\&\,(\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^{2}+a^{2}})} f(t)=e^{-2t}(\cos t-\sin t)$$

$$۲)\ f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۳s-۲}{s(s-۱)^۲}\right]=L^{-۱}\left[\frac{-۲}{s}+\frac{۲}{s-۱}+\frac{۱}{(s-۱)^۲}\right]=-۲L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}\right]+۲L^{-۱}\left[\frac{۱}{s-۱}\right]+L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-۱)^۲}\right]$$

$$\xrightarrow{(\frac{۱}{s^{n+۱}}\xrightarrow{L^{-۱}}\frac{t^n}{n!})\&(\frac{۱}{s-a}\xrightarrow{L^{-۱}}e^{at})} f(t)=-۲+۲e^t+L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-۱)^۲}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} f(t)=-۲+۲e^t+e^tL^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲}\right] \quad \Rightarrow \quad f(t)=-۲+۲e^t+e^tt$$

قضیه. (قاعده دوم انتقال). اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

الف) $L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]$

ب) $L^{-۱}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)L^{-۱}[F(s)]\big|_{t\mapsto t-a}$

بعنوان مثال. مقادیر عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $L[u_{\frac{\pi}{۲}}(t)\sin ۲t]$ ۲) $\int_{\pi}^{+\infty}e^{-st}\cos t\,dt$

حل.

۱) $F(s)=L[f(t)]=L[u_{\frac{\pi}{۲}}(t)\sin ۲t]$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[\sin ۲(t+\frac{\pi}{۲})]=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[\sin(۲t+\pi)]$$

$$\xrightarrow{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha} F(s)=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[-\sin ۲t]\xrightarrow{\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^۲+a^۲}} F(s)=-e^{-\frac{\pi}{۲}s}\cdot\frac{۲}{s^۲+۴}$$

۲) $F(s)=\int_{\pi}^{+\infty}e^{-st}f(t)\,dt$

کران پایین انتگرال مفروض از صفر شروع نشده است، امّا از آنجائیکه ($\circ<t<\pi \Rightarrow u_\pi(t)=\circ$) است، می‌توان نوشت:

$$F(s)=\int_{\circ}^{+\infty}u_\pi(t)(e^{-st}\cos t)\,dt=\int_{\circ}^{+\infty}e^{-st}(u_\pi(t)\cos t)\,dt$$

$$\xrightarrow{\int_{\circ}^{\infty}e^{-st}f\,dt=L[f]} F(s)=L[u_\pi(t)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=e^{-\pi s}L[\cos(t+\pi)]=e^{-\pi s}L[-\cos t]$$

$$\xrightarrow{\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^۲+a^۲}} F(s)=-e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^۲+۱}$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{s}{s^۲+۱}e^{-\frac{\pi}{۲}s}$ ۲) $\frac{s+۲}{s^۲+۲s+۲}e^{-s}$

حل.

۱) $f(t)=L^{-۱}\left[e^{-\frac{\pi}{۲}s}\cdot\frac{s}{s^۲+۱}\right]$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-۱}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=u_{\frac{\pi}{۲}}(t)L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۱}\right]\Big|_{t\mapsto t-\frac{\pi}{۲}}=u_{\frac{\pi}{۲}}(t)(\cos t)\Big|_{t\mapsto t-\frac{\pi}{۲}} \Rightarrow$$

$$f(t)=u_{\frac{\pi}{۲}}(t)\cos(t-\frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin\alpha} f(t)=u_{\frac{\pi}{۲}}(t)\sin t$$

۲) $f(t)=L^{-۱}\left[e^{-s}\frac{s+۲}{s^۲+۲s+۲}\right]$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-۱}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=u_۱(t)L^{-۱}\left[\frac{s+۲}{s^۲+۲s+۲}\right]\Big|_{t\mapsto t-۱}=u_۱(t)L^{-۱}\left[\frac{(s+۱)+۱}{(s+۱)^۲+۱}\right]\Big|_{t\mapsto t-۱} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} f(t)=u_۱(t)(e^{-t}L^{-۱}\left[\frac{s+۱}{s^۲+۱}\right])\Big|_{t\mapsto t-۱}=u_۱(t)(e^{-t}(L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۱}\right]+L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۱}\right]))\Big|_{t\mapsto t-۱} \Rightarrow$$

$$f(t)=u_۱(t)(e^{-t}(\cos t+\sin t))\Big|_{t\mapsto t-۱} \Rightarrow f(t)=u_۱(t)e^{-(t-۱)}\big(\cos(t-۱)+\sin(t-۱)\big)$$

قضیه. (قاعده سوم انتقال) فرض کنید $a\geq\circ$)؛ $\delta(t-a)$ – تابع دلتای دیراک و $f(t)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[\circ,\infty)$ باشد. در اینصورت؛

$$L[\delta(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a)$$

و در حالت خاص با فرض $a=\circ$ بدست می‌آوریم:

$$L[\delta(t)f(t)]=f(\circ)$$

به عنوان مثال، به ازاء تابع $f(t)=۱$ داریم:

$$L[\delta(t-a)]=e^{-as} \quad \& \quad L[\delta(t)]=۱$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $(\sin t+۲)\,\delta(t-\frac{\pi}{۲})$ ۲) $t^۲\delta(t-۳)+۲u_۱(t)$

حل.

۱) $f(t)=(\sin t+۲)\delta(t-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[\delta(t-\frac{\pi}{۲})(\sin t+۲)]$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)} F(s)=e^{-\frac{\pi}{۲}s}(\sin t+۲)\Big|_{t=\frac{\pi}{۲}} \Rightarrow F(s)=e^{-\frac{\pi}{۲}s}(\sin\frac{\pi}{۲}+۲) \Rightarrow F(s)=۳e^{-\frac{\pi}{۲}s}$$

۲) $f(t) = t^{۲}\delta(t-۳) + ۲u_{۱}(t) \Rightarrow F(s) = L[f(t)] = L[\delta(t-۳)t^{۲} + ۲u_{۱}(t)] \Rightarrow F(s) = L[\delta(t-۳)t^{۲}] + ۲\frac{۱}{s}e^{-s}$

$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)} F(s) = e^{-۳s}(t^{۲})\big|_{t=۳} + \frac{۲}{s}e^{-s} \Rightarrow F(s) = ۹e^{-۳s} + \frac{۲}{s}e^{-s}$

مثال ۲۶. *تبدیل لاپلاس $f(t) = \delta(t-۱)\cos t$ کدام است؟*

۱) $e^{s}\cos ۱$ ۲) $\frac{s}{s^{۲}+۱}$ ۳) $۱ + \frac{s}{s^{۲}+۱}$ ۴) $e^{-s}\cos ۱$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$F(s) = L[f(t)] = L[\delta(t-۱)\cos t] \xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)} F(s) = e^{-s}\cos ۱$

مثال ۲۷. *تبدیل لاپلاس $۱\delta(t-۳)$ عبارتست از:*

۱) $۳e^{-۳s}$ ۲) $\frac{e^{-۳s}}{s}$ ۳) $۳e^{۳s}$ ۴) $\frac{e^{۳s}}{s}$

☑ **حل.** گزینه «۱». حل اول:

$F(s) = L[t\,\delta(t-۳)] = L[\delta(t-۳)\,t] \xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)} F(s) = e^{-۳s}(t)\big|_{t=۳} \Rightarrow F(s) = ۳e^{-۳s}$

حل دوم:

$F(s) = L[t\,\delta(t-۳)] \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = -(L[\delta(t-۳)])'$

$\xrightarrow{\delta(t-a) \xrightarrow{L} e^{-as}} F(s) = -(e^{-۳s})' = ۳e^{-۳s}$

مثال ۲۸. *تبدیل لاپلاس تابع $e^{t}\,\delta(t)\sin t$ برابر است با:*

۱) e ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) صفر

☑ **حل.** گزینه «۴».

$F(s) = L[e^{t}\,\delta(t)\sin t] = L[\delta(t)(e^{t}\sin t)] \xrightarrow{L[\delta(t)f(t)]=f(۰)} F(s) = (e^{t}\sin t)\big|_{t=۰} \Rightarrow F(s) = ۰$

مثال ۲۹. *تبدیل لاپلاس تابع پیوسته $f(t)$ و $t \geq ۰$ برابر است با:*

$$F(s) = L[f(t)] = \frac{e^{-\pi s}}{(۱+s)^{۲}+۱}$$

تابع $f(t)$ را مشخص کنید.

۱) $f(t) = u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$ ۲) $f(t) = u_{\pi}(t)e^{t-\pi}\sin(t-\pi)$

۳) $f(t) = u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$ ۴) $f(t) = u_{\pi}(t)e^{t-\pi}\sin(t)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$f(t) = L^{-۱}\left[e^{-\pi s}\frac{۱}{(۱+s)^{۲}+۱}\right]$

$\xrightarrow{L^{-۱}[e^{as}F]=u_{a}(t)L^{-۱}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t) = u_{\pi}(t)\,L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۱}\right]\Big|_{t\mapsto t-\pi}$

$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} f(t) = u_{\pi}(t)(e^{-t}L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s)^{۲}+۱}\right])\Big|_{t\mapsto t-\pi} = u_{\pi}(t)(e^{-t}\sin t)\Big|_{t\mapsto t-\pi} \Rightarrow$

$f(t) = u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$

مثال ۳۰. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{۳t}(۲\cos ۵t - ۳\sin ۵t)$ برابر است با:*

۱) $s-۳$ ۲) $\frac{۲s-۲۱}{s^{۲}-۶s+۳۴}$ ۳) $\frac{۲s+۹}{s^{۲}+۳۴}$ ۴) $\frac{s+۳}{s^{۲}+۵s+۱۶}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$F(s) = L[e^{۳t}(۲\cos ۵t - ۳\sin ۵t)]$

$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s) = L[۲\cos ۵t - ۳\sin ۵t]\Big|_{s\mapsto s-۳} = (۲L[\cos ۵t] - ۳L[\sin ۵t])\Big|_{s\mapsto s-۳} \Rightarrow$

$F(s) = (۲\frac{s}{s^{۲}+۲۵} - ۳\frac{۵}{s^{۲}+۲۵})\Big|_{s\mapsto s-۳} = (\frac{۲s-۱۵}{s^{۲}+۲۵})\Big|_{s\mapsto s-۳} \Rightarrow F(s) = \frac{۲(s-۳)-۱۵}{(s-۳)^{۲}+۲۵} = \frac{۲s-۲۱}{s^{۲}-۶s+۳۴}$

مثال ۳۱. *تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{۱}{\sqrt{۴s-۱}}$ برابر است با:*

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}t^{-\frac{۱}{۲}}e^{-\frac{t}{۴}}$ ۲) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{۴}}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{t}{۴}}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}t^{\frac{۱}{۲}}e^{\frac{t}{۴}}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$f(t) = L^{-۱}\left[\frac{۱}{\sqrt{۴s-۱}}\right] = L^{-۱}\left[\frac{۱}{\sqrt{۴(s-\frac{۱}{۴})}}\right] = L^{-۱}\left[\frac{۱}{۲(s-\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۲}}}\right] = \frac{۱}{۲}L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۲}}}\right]$

$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} f(t) = \frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۴}t}L^{-۱}(\frac{۱}{s^{\frac{۱}{۲}}})$

$\xrightarrow{\frac{۱}{s^{\alpha+۱}} \xrightarrow{L^{-۱}} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+۱)}} f(t) = \frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۴}}\frac{t^{-\frac{۱}{۲}}}{\Gamma(\frac{۱}{۲})} \xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}} f(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{۴}}$

مثال ۳۲. *معکوس تبدیل تابع $\frac{s-۱}{s^{۲}-۴s+۵}$ کدام است؟*

۱) $e^{۲t}\cos t + e^{۲t}\sin t$ ۲) $e^{t}\sin ۲t$ ۳) $e^{۲t}\cos t$ ۴) $e^{-۲t}(\cos t + \sin t)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s-1)-1+1}{s^2-2s+4+1}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s-2)+1}{(s-2)^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^{2t}L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+1}\right]=e^{2t}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}\text{ عملگری خطی است}} f(t)=e^{2t}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]\right) \Rightarrow f(t)=e^{2t}(\cos t+\sin t)$$

مثال ۳۳. *مبدل لاپلاس معکوس* $F(s)=\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ *کدامیک از توابع زیر می‌باشد:*

۱) $u_2(t)\sinh(t-4)$ ۲) $u_2(t)\sinh(2t-2)$ ۳) $u_2(t)\sinh(t-2)$ ۴) $u_2(t)\sinh(2t-4)$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}\right]=2\left[e^{-2s}\frac{1}{s^2-4}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=2u_2(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right]\Big|_{t\mapsto t-2} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right]=\frac{1}{a}\sinh at} f(t)=2u_2(t)\left(\frac{1}{2}\sinh 2t\right)\Big|_{t\mapsto t-2} \Rightarrow$$

$$f(t)=u_2(t)\sinh 2(t-2)$$

مثال ۳۴. *تبدیل لاپلاس تابع* $e^{-t}\cos 2t$ *کدام است؟*

۱) $\frac{s}{s^2+1}$ ۲) $\frac{s-1}{s^2+2s+5}$ ۳) $\frac{s}{s^2-1}$ ۴) $\frac{s+1}{s^2+2s+5}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$F(s)=L[e^{-t}\cos 2t]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s)=L[\cos 2t]\Big|_{s\mapsto s+1} \Rightarrow F(s)=\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\Big|_{s\mapsto s+1}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

مثال ۳۵. *معکوس تبدیل تابع* $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ *کدام است؟*

۱) $e^t\cos 2t+e^t\sin 2t$ ۲) $e^t\sin 2t$ ۳) $e^t\cos 2t$ ۴) $e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+1+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^tL^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=e^t\cos 2t$$

مثال ۳۶. *تبدیل معکوس لاپلاس* $F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}$ *کدام است؟*

۱) $1-\cos t$ ۲) $1+\cos t$ ۳) $u_\pi(t)(1+\cos t)$ ۴) $u_\pi(t)(1-\cos t)$

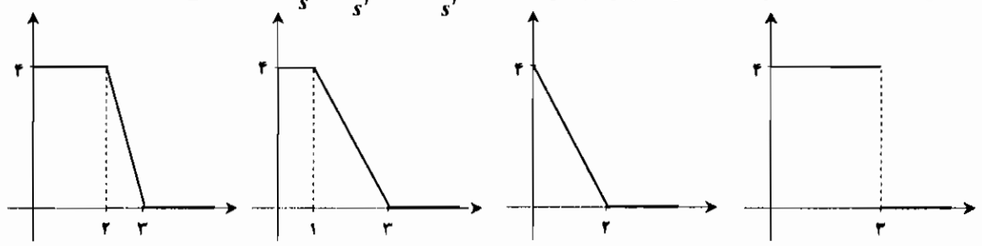
☑ **حل.** گزینه «۳».

$$f(t)=L^{-1}\left[e^{-\pi s}\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=u_\pi(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]\Big|_{t\mapsto t-\pi}=u_\pi(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]\Big|_{t\mapsto t-\pi} \Rightarrow$$

$$f(t)=u_\pi(t)(1-\cos t)\Big|_{t\mapsto t-\pi}=u_\pi(t)\big(1-\cos(t-\pi)\big) \xrightarrow{\cos(t-\pi)=-\cos t} f(t)=u_\pi(t)(1+\cos t)$$

مثال ۳۷. *کدامیک از گزینه‌های زیر معکوس لاپلاس عبارت* $F(s)=\frac{4}{s}-\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}$ *می‌باشد؟*



☑ **حل.** گزینه «۴».

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{4}{s}-\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right]=4L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-4L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s^2}\right]+4L^{-1}\left[e^{-3s}\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=4-4u_2(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]\Big|_{t\mapsto t-2}+4u_3(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]\Big|_{t\mapsto t-3} \Rightarrow$$

$$f(t)=4-4u_2(t)(t)\Big|_{t\mapsto t-2}+4u_3(t)(t)\Big|_{t\mapsto t-3} \Rightarrow f(t)=4-4u_2(t)(t-2)+4u_3(t)(t-3) \Rightarrow$$

اکنون از آنجائیکه تابع $f(t)$ برحسب $u_2(t)$ و $u_3(t)$ بدست آمده است و با توجه به تعریف $u_a(t)=\begin{cases}0 & ;\ 0<t<a\\ 1 & ;\ a<t\end{cases}$، می‌توان

$f(t)$ را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases}0<t<2 & \xrightarrow{u_2(t)=u_3(t)=0} f(t)=4-0+0=4\\ 2<t<3 & \xrightarrow{u_2(t)=1\ \&\ u_3(t)=0} f(t)=4-4(1)(t-2)+0=12-4t\\ 3<t & \xrightarrow{u_2(t)=u_3(t)=1} f(t)=4-4(1)(t-2)+4(1)(t-3)=0\end{cases} \Rightarrow f(t)=\begin{cases}4 & ;\ 0<t<2\\ 12-4t & ;\ 2<t<3\\ 0 & ;\ 3<t\end{cases}$$

تبدیل لاپلاس و مشتق

قضیه. (مشتق از تبدیل لاپلاس) اگر $F(s)$ تبدیل تابع $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

الف) $L[tf(t)] = -F'(s) = -\big(L[f(t)]\big)'$

ب) $L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]$

در حالت کلی می‌توان بدست آورد:

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $t\cosh 2t$ ۲) $te^{2t}\sin t$

حل.

۱) $F(s) = L[f(t)] = L[t\cosh 2t]$

$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}$ $F(s) = -\big(L[\cosh 2t]\big)' = -\left(\frac{s}{s^2-4}\right)' \Rightarrow F(s) = \frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$

۲) $F(s) = L[f(t)] = L[te^{2t}\sin t] = L[e^{2t}(t\sin t)]$

$\xrightarrow{L[e^{at}F]=L[F]|_{s\mapsto s-a}}$ $F(s) = L[t\sin t]\Big|_{s\mapsto s-2}$

$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}$ $F(s) = \left(-\frac{d}{ds}L[\sin t]\right)\Big|_{s\mapsto s-2} = \left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right)\Big|_{s\mapsto s-2} \Rightarrow F(s) = \left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right)\Big|_{s\mapsto s-2} \Rightarrow$

$$F(s) = \frac{2(s-2)}{((s-2)^2+1)^2}$$

بعنوان مثال. تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\text{Arc tan}\frac{1}{s}$ ۲) $\text{Ln}\frac{s^3+s}{(s+2)^3}$

حل.

۱) $f(t) = L^{-1}\left[\text{Arc tan}\frac{1}{s}\right]$

$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']}$ $f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\text{Arc tan}\frac{1}{s}\right)\right] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}}\right] \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right]$

$\frac{1}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{a}\sin at$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{t}\sin t$

۲) $f(t) = L^{-1}\left[\text{Ln}\frac{s^3+s}{(s+2)^3}\right] = L^{-1}\left[\text{Ln}\frac{s(s^2+1)}{(s+2)^3}\right] = L^{-1}\left[\text{Ln}s + \text{Ln}(s^2+1) - 3\text{Ln}(s+2)\right]$

$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']}$ $f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2+1} - 3\frac{1}{s+2}\right] \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}(1+2\cos t - 3e^{-2t}) \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{3e^{-2t} - 2\cos t - 1}{t}$$

تذکر.

با توجه به قضیه (مشتق از تبدیل لاپلاس ـ ب) تساوی $L^{-1}[F'(s)] = -t\,L^{-1}[F(s)]$ بدست می‌آید که در واقع بیان می‌دارد، برای تابع مفروض $F(s)$، اگر بتوان تابعی مانند $G(s)$ پیدا کرد، بطوری که $G'(s) = F(s)$ باشد، (در ریاضیات عمومی تابع $G(s)$، تابع اولیه نامیده می‌شود و معمولاً با انتگرالگیری قابل محاسبه است) در اینصورت می‌توان به جای محاسبه $L^{-1}[F]$، به محاسبه $-t\,L^{-1}[G]$ پرداخت.

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \frac{3s}{(s^2-1)^3}$ را بدست آورید.

حل. از یک طرف؛

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2} \Rightarrow G(s) = \int \frac{2s}{(s^2-1)^2}ds = -\frac{1}{s^2-1} \quad ; (G'(s) = F(s))$$

در اینصورت؛

$\xrightarrow{L^{-1}[F(s)]=-t\,L^{-1}[G(s)]}$ $L^{-1}[F(s)] = -t\,L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2-1}\right] = t\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]$

$\frac{1}{s^2-a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{a}\sinh at$

$\Rightarrow L^{-1}[F(s)] = t\sinh t$

مثال۳۸. *تبدیل معکوس تابع arc cotag s برابر است با :*

۱) $t\sin t$ ۲) $\frac{1}{t}\sin t$ ۳) $t\cos t$ ۴) $\frac{1}{t}\cos t$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$f(t) = L^{-1}[\text{arc cotag}\,s] \xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']} f(t) = -\frac{1}{t}L^{-1}[(\text{arc cotag}\,s)'] = -\frac{1}{t}L^{-1}\left[-\frac{1}{s^2+1}\right] \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\sin t$$

مثال۳۹. *اگر تبدیل لاپلاس توابع $\sin\alpha t$ و $\cos\alpha t$ (α پارامتر حقیقی ثابت) به ترتیب برابر $\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ و $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ باشند،*

تبدیل لاپلاس تابع $t\sin\alpha t + e^{\beta t}\cos t$ (α و β پارامترهای حقیقی ثابت) برابر است با:

۱) $\frac{-2s\alpha}{(\alpha^2+s^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$ ۲) $\frac{2s\alpha}{(\alpha^2+s^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$

۳) $\int_0^s \frac{\alpha d\sigma}{\alpha^2+\sigma^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$ ۴) $\frac{\alpha s}{s^2\alpha^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$

حل. گزینه «۲».

$$F(s) = L[t\sin\alpha t + e^{\beta t}\cos t] = L[t\sin\alpha t] + L[e^{\beta t}\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])' \;\&\; L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s) = -\big(L[\sin\alpha t]\big)' + L[\cos t]\big|_{s\mapsto s-\beta}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمولهای ارائه شده در مسأله}} F(s) = -\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)' + \left(\frac{s}{s^2+1}\right)\Big|_{s\mapsto s-\beta} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2} + \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2+1}$$

مثال ۴۰. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = (t-\pi)\sin(3t)e^{2t}u_\pi(t)$ عبارت است از:*

۱) $\dfrac{-2e^{-\pi(s-2)}}{[(s-2)^2+9]^2}$

۲) $-6e^{-\pi(s-2)} \times \dfrac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$

۳) $\dfrac{e^{-\pi(s-2)}}{[(s-2)^2+9]^2}$

۴) $2e^{-\pi(s-2)} \times \dfrac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$

حل. گزینه «۲».

$$F(s) = L[u_\pi(t)(e^{2t}(t-\pi)\sin 3t)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s) = e^{-\pi s}L[e^{2(t+\pi)}(t+\pi-\pi)\sin 3(t+\pi)] = e^{-\pi s}L[e^{2\pi}e^{2t}t\sin 3t] \quad \Rightarrow$$

$$F(s) = -e^{-\pi s}e^{2\pi}L[e^{2t}t\sin 3t] = -e^{-\pi(s-2)}L[e^{2t}(t\sin 3t)]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s) = -e^{-\pi(s-2)}\big(L[t\sin 3t]\big)\big|_{s\mapsto s-2}$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = -e^{-\pi(s-2)}\big(-(L[\sin 3t]\big)'\big|_{s\mapsto s-2}) = e^{-\pi(s-2)}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'\Big|_{s\mapsto s-2} \quad \Rightarrow$$

$$F(s) = e^{-\pi(s-2)}\left(\frac{-6s}{(s^2+9)^2}\Big|_{s\mapsto s-2}\right) \quad \Rightarrow \quad F(s) = -6e^{-\pi(s-2)}\cdot\frac{s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$$

مثال ۴۱. *اگر $\dfrac{g(t)}{t} = f(t)$، $f(t) > 0$ و اگر توابع f دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشند، آنگاه فرض می‌کنیم $F(s) = Ln\dfrac{(s^2+4\alpha^2)^{\frac{1}{4}}}{s^{\frac{1}{2}}}$، α عددی حقیقی و ثابت، در اینصورت:*

۱) $f(t) = 1-\cos 2\alpha t$

۲) $g(t) = \dfrac{1-\cos 2\alpha t}{2}$

۳) $g(t) = 1+\cos 2\alpha t$

۴) $g(t) = \dfrac{1+\cos 2\alpha t}{2}$

حل. گزینه «۲». از یک طرف؛

$$F(s) = Ln\frac{(s^2+4\alpha^2)^{\frac{1}{4}}}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}Ln(s^2+4\alpha^2) - \frac{1}{2}Lns$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{ds}Lnu=\frac{u'}{u}} F'(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2s}{s^2+4\alpha^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad F'(s) = \frac{s}{2(s^2+4\alpha^2)} - \frac{1}{2s} \qquad ; \ (1)$$

در اینصورت با توجه به تساوی $\dfrac{g(t)}{t} = f(t)$ بدست می‌آوریم:

$$g(t) = tf(t) \quad \Rightarrow \quad L[g(t)] = L[tf(t)] \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} L[g(t)] = -F'(s) \quad \Rightarrow \quad g(t) = -L^{-1}[F'(s)]$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری تساوی (۱)}} g(t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4\alpha^2} - \frac{1}{s}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(2\alpha)^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right)$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2} \xrightarrow{L^{-1}} \cos\alpha t\right)\&\left(\frac{1}{s} \xrightarrow{L^{-1}} 1\right)} g(t) = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha t - 1) = \frac{1-\cos 2\alpha t}{2}$$

مثال ۴۲. *تبدیل لاپلاس $f(t) = t\sinh(2t)$ برابر است با:*

۱) $\dfrac{4s}{(s^2-4)^2}$

۲) $\dfrac{-4s}{(s^2-4)^2}$

۳) $\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}$

۴) $\dfrac{-4s}{(s^2+4)^2}$

حل. گزینه «۱».

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} L[f(t)] = L[t\sinh 2t] = -\big(L[\sinh 2t]\big)' = -\left(\frac{2}{s^2-4}\right)' = \frac{4s}{(s^2-4)^2}$$

مثال ۴۳. *اگر $L[t^n f(t)] = (-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$ باشد. تبدیل لاپلاس $L[t^2e^{2t}]$ برابر است با:*

۱) $\dfrac{2}{(s-2)^3}$

۲) $\dfrac{1}{(s-2)^2}$

۳) $\dfrac{2!s}{(s-2)^3}$

۴) $\dfrac{1}{(s+3)^2}$

حل. گزینه «۱».

$$F(s) = L[t^2e^{2t}] \xrightarrow{\text{با توجه به فرمول ارائه شده}} F(s) = (-1)^2\cdot\frac{d^2}{ds^2}L[e^{2t}]$$

$$\xrightarrow{e^{at} \xrightarrow{L} \frac{1}{s-a}} F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

مثال ۴۴. *اگر $L[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ آنگاه $L[t\cos at]$ برابر است با:*

۱) $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

۲) $\dfrac{s^2+a^2}{(s^2+a^2)^2}$

۳) $\dfrac{s-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

۴) $\dfrac{-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

حل. گزینه «۱».

$$F(s) = L[t\cos at]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = -(L[\cos at])' \xrightarrow{\cos at \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+a^2}} (s) = -\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال ۴۵. *اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $Ln\frac{s}{s-1}$ باشد. $f(t)$ کدام است؟*

۱) $\frac{e^{-t}-1}{t}$ ۲) $\frac{e^{-t}-t-1}{t}$ ۳) $\frac{e^{t}-1}{t}$ ۴) $\frac{e^{t}+t-1}{t}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$f(t)=L^{-1}\left[Ln\frac{s}{s-1}\right]=L^{-1}[Lns-Lns-1]\xrightarrow{L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]}f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{s-a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{at}}f(t)=-\frac{1}{t}(1-e^{t})=\frac{e^{t}-1}{t}$$

مثال ۴۶. *مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}te^{-2t}\sin t\,dt$ برابر کدام است؟*

۱) $\frac{3}{25}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{4}{25}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-2t}(t\sin t)dt\xrightarrow{\int_{0}^{\infty}e^{-st}f\,dt=(L[f])|_{s=s}}I=\left(L[t\sin t]\right)\Big|_{s=2}$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}I=-\left(L[\sin t]\right)'\Big|_{s=2}=-\left(\frac{1}{s^{2}+1}\right)'\Big|_{s=2}=\frac{2s}{(s^{2}+1)^{2}}\Big|_{s=2}=\frac{4}{25}$$

مثال ۴۷. *تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-t}t\cos 2t$ عبارت است از:*

۱) $\frac{s^{2}+4}{(s^{2}-4)^{2}}$ ۲) $\frac{(s+1)^{2}-4}{((s+1)^{2}+4)^{2}}$ ۳) $\frac{s^{2}-4}{(s^{2}+4)^{2}}$ ۴) $\frac{(s+1)^{2}+4}{((s+1)^{2}-4)^{2}}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$F(s)=L[e^{-t}(t\cos 2t)]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\to s-a}}F(s)=L[t\cos 2t]\Big|_{s\to s+1}$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}F(s)=-\left(L[\cos 2t]\right)'\Big|_{s\to s+1}=-\left(\frac{s}{s^{2}+4}\right)'\Big|_{s\to s+1}=\frac{s^{2}-4}{(s^{2}+4)^{2}}\Big|_{s\to s+1}\Rightarrow F(s)=\frac{(s+1)^{2}-4}{((s+1)^{2}+4)^{2}}$$

تبدیل لاپلاس و انتگرال

قضیه. (انتگرال از تبدیل لاپلاس) اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود باشد، در اینصورت؛

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}L[f(t)]ds$$

و در حالت کلی می‌توان بررسی کرد:

$$L\left[\frac{f(t)}{t^{n}}\right]=\underbrace{\int_{s}^{\infty}\cdots\int_{s}^{\infty}}_{n\text{ بار}}L[f(t)](ds)^{n}$$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{\sin t}{t}$ ۲) $\frac{1-\cos t}{t}$

حل.

۱) $f(t)=\frac{\sin t}{t}\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[\frac{\sin t}{t}]$

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_{s}^{\infty}L[f]\,ds}F(s)=\int_{s}^{\infty}L[\sin t]ds=\int_{s}^{\infty}\frac{1}{s^{2}+1}ds$$

$$\xrightarrow{\int_{a}^{\infty}f\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{a}^{T}f\,dt}F(s)=\lim_{T\to\infty}\int_{s}^{T}\frac{ds}{s^{2}+1}=\lim_{T\to\infty}(\tan^{-1}s)\Big|_{s}^{T}=\lim_{T\to\infty}(\tan^{-1}T-\tan^{-1}s)\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{\pi}{2}-tag^{-1}s\xrightarrow{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{\alpha}}F(s)=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

یادآوری. با توجه به مفهوم ربع اصلی، در محاسبه معکوس توابع مثلثاتی داریم:

$$\begin{cases}\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha=\frac{\pi}{2}\\ \cot^{-1}\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{\alpha}$$

۲) $f(t)=\frac{1-\cos t}{t}\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[\frac{1-\cos t}{t}]$

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_{s}^{\infty}L[f]ds}F(s)=\int_{s}^{\infty}L[1-\cos t]ds\Rightarrow F(s)=\int_{s}^{\infty}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^{2}+1})ds$$

$$\xrightarrow{\int_{a}^{\infty}f\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_{a}^{T}f\,dt}F(s)=\lim_{T\to\infty}\int_{s}^{T}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^{2}+1})ds=\lim_{T\to\infty}(Ln\,s-\frac{1}{2}Ln(s^{2}+1))\Big|_{s}^{T}\Rightarrow$$

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}(Lns-Ln\sqrt{s^{2}+1})\Big|_{s}^{T}=\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{s}{\sqrt{s^{2}+1}})\Big|_{s}^{T}=\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{T}{\sqrt{T^{2}+1}}-Ln\frac{s}{\sqrt{s^{2}+1}})\Rightarrow$$

$$F(s)=-Ln\frac{s}{\sqrt{s^{2}+1}}=Ln\frac{\sqrt{s^{2}+1}}{s}$$

به عنوان یک نتیجه از قضیه قبل، می‌توان گزاره زیر را مطرح کرد.

گزاره. اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ موجود باشد. در اینصورت؛

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{0}^{\infty}L[f(t)]\,ds$$

بعنوان مثال. مقدار انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ را بدست آورید.

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt\xrightarrow{\int_{0}^{\infty}\frac{f}{t}dt=\int_{0}^{\infty}L[f]\,ds}I=\int_{0}^{\infty}L[\sin t]\,ds=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{s^{2}+1}ds=\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T}\frac{1}{s^{2}+1}ds\Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}tag^{-1}s\Big|_{0}^{T}=\lim_{T\to\infty}(tag^{-1}T-tag^{-1}(0))=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

قضیه. (تبدیل لاپلاس انتگرال) اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

الف) $L[\int_0^t f(t)\,dt] = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}L[f(t)]$

ب) $L^{-1}[\frac{1}{s}F(s)] = \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t L^{-1}[F(s)]\,dt$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\int_0^t t\cosh t\,dt$ ۲) $\int_0^t \frac{1-\cos t}{t}\,dt$

حل.

۱) $F(s) = L[f(t)] = L[\int_0^t t\cosh t\,dt] \xrightarrow{L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]} F(s) = \frac{1}{s}L[t\cosh t]$

$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s) = \frac{1}{s}\times -(L[\cosh t])' = -\frac{1}{s}\cdot(\frac{s}{s^2-1})' = -\frac{1}{s}\cdot\frac{-s^2-1}{(s^2-1)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)^2}$

۲) $F(s) = L[f(t)] = L[\int_0^t \frac{1-\cos t}{t}dt] \xrightarrow{L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]} F(s) = \frac{1}{s}L[\frac{1-\cos t}{t}]$

$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]\,ds} F(s) = \frac{1}{s}\times\int_s^\infty L[1-\cos t]ds = \frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}\int_s^T(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1})ds \Rightarrow$

$F(s) = \frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}\left(\ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1)\Big|_s^T\right) = \frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}(\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}})\Big|_s^T \Rightarrow$

$F(s) = \frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}(\ln\frac{T}{\sqrt{T^2+1}} - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}) \Rightarrow F(s) = -\frac{1}{s}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

بعنوان مثال. تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\frac{1}{s^2(s+1)}$ ۲) $\frac{1}{s-1}\ln\frac{s+1}{s-1}$

حل.

۱) $f(t) = L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)}] = L^{-1}[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s+1)}]$

$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]\,dt} f(t) = \int_0^t L^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]\,dt = \int_0^t L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]\,dt \Rightarrow$

$f(t) = \int_0^t (1-e^{-t})\,dt \Rightarrow f(t) = (t+e^{-t})\Big|_0^t \Rightarrow f(t) = t+e^{-t}-1$

۲) $f(t) = L^{-1}[\frac{1}{s-1}-\ln\frac{s+1}{s-1}] = L^{-1}[\frac{1}{s-1}\ln\frac{(s-1)+2}{s-1}]$

$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t) = e^t L^{-1}[\frac{1}{s}\ln\frac{s+2}{s}] \xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]\,dt} f(t) = e^t\int_0^t L^{-1}[\ln\frac{s+2}{s}]dt$

$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']} f(t) = e^t\int_0^t(-\frac{1}{t}L^{-1}](\ln(s+2)-\ln s)']\,dt = e^t\int_0^t(-\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s}])\,dt \Rightarrow$

$f(t) = e^t\int_0^t -\frac{1}{t}(e^{-2t}-1)\,dt \Rightarrow f(t) = e^t\int_0^t \frac{1-e^{-2t}}{t}\,dt$

مثال۴۸. *تبدیل لاپلاس* $\int_0^t \sinh 2x\,dx$ *کدام است؟*

۱) $\frac{2}{s^2-4}$ ۲) $\frac{2}{s(s^2+4)}$ ۳) $-\frac{2}{s^2+4}$ ۴) $\frac{2}{s(s^2-4)}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$I = \int_0^t \sinh 2x\,dx \xrightarrow{L[\int_0^t f\,dx]=\frac{1}{s}L[f]} I = \frac{1}{s}L[\sinh 2t] = \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2-4}$

مثال۴۹. *تبدیل معکوس لاپلاس* $\frac{1}{s(s^2+1)}$ *برابر است با :*

۱) $1+\sin t$ ۲) $1-\cos t$ ۳) $-1-\sin t$ ۴) $-1+\cos t$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$f(t) = L^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}] = L^{-1}[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}]$

$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]\,dt} f(t) = \int_0^t L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]\,dt = \int_0^t \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^t \Rightarrow f(t) = 1-\cos t$

مثال۵۰. *تبدیل لاپلاس معکوس* $\frac{s+1}{s^3+s}$ *برابر است با :*

۱) $1+\cos t+\sin t$ ۲) $1+\cos t-\sin t$ ۳) $1-\cos t+\sin t$ ۴) $-1+\cos t+\sin t$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$f(t) = L^{-1}[\frac{s+1}{s^3+s}] = L^{-1}[\frac{1}{s}\cdot\frac{s+1}{s^2+1}]$

$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]\,dt} f(t) = \int_0^t L^{-1}[\frac{s+1}{s^2+1}]\,dt = \int_0^t L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}]\,dt \Rightarrow$

$f(t) = \int_0^t (\cos t+\sin t)\,dt = (\sin t-\cos t)\Big|_0^t \Rightarrow f(t) = \sin t-\cos t+1$

مثال ۵۱. *کدام عبارت در مورد عکس تبدیل لاپلاس* $g(s)=\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s}$ *درست است؟*

۱) تابعی است مقطعی پیوسته و هم مرتبه نمایی
۲) تابعی است پیوسته و هم مرتبه نمایی
۳) تابعی است مقطعی پیوسته ولی هم مرتبه نمایی نیست.
۴) با داده‌های مسأله نوع تابع مشخص نیست.

☑ **حل.** گزینه «۲»، از یک طرف داریم؛

$$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']} L^{-1}[tag^{-1}\frac{1}{s}]=-\frac{1}{t}L^{-1}[\frac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}}]=-\frac{1}{t}L^{-1}[-\frac{1}{1+s^2}] \Rightarrow L^{-1}[tag^{-1}\frac{1}{s}]=\frac{\sin t}{t} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$f(t)=L^{-1}[g(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s}\cdot tag^{-1}\frac{1}{s}] \xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F]=\int_0^t L^{-1}[F]\,dt} f(t)=\int_0^t L^{-1}[tag^{-1}\frac{1}{s}]dt$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}} f(t)=\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt$$

با توجه به اینکه در فاصله $(0,\infty)$، تابع $\frac{\sin t}{t}$ پیوسته است، در نتیجه $f(t)$ نیز پیوسته می‌باشد.

از طرف دیگر؛

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t\frac{\sin t}{t}}{e^t}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{HOP}\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{\sin t}{t}}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{te^t}\cdot\sin t$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه کرانداری}}\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{e^t}=0$$

در نتیجه تابع $f(t)$ از مرتبه نمایی $a=1$ است.

مثال ۵۲. *تبدیل لاپلاس تابع* $\int_0^t \frac{x^2}{x^2+1}e^{ix}\,\delta(x-\pi)\sin x\,dx$ *کدام است؟*

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$F(s)=L[\int_0^t \frac{x^2}{x^2+1}e^{ix}\,\delta(t-\pi)\sin x\,dx]\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]}F(s)=\frac{1}{s}L[\frac{x^2}{x^2+1}e^{ix}\,\delta(x-\pi)\sin x]\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s}L[\delta(x-\pi)(\frac{x^2}{x^2+1}e^{ix}\sin x)]\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)}F(s)=\frac{1}{s}\cdot e^{-\pi s}(\frac{x^2}{x^2+1}e^{ix}\sin x)\big|_{x=\pi}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\sin\pi=0}F(s)=0$$

مثال ۵۳. *تبدیل لاپلاس تابع* $\int_0^t f(x)\delta(t-x)\,dx$ *عبارتست از:*

۱) $\frac{2}{s}e^{-as}f(a)$ ۲) $\frac{1}{s}e^{as}f(a)$ ۳) $\frac{1}{s}e^{-as}f(a)$ ۴) $\frac{2}{s}e^{as}f(a)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$F(s)=L[\int_0^t f(x)\delta(x-a)\,dx]\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]}F(s)=\frac{1}{s}L[f(t)\delta(t-a)]=\frac{1}{s}L[\delta(t-a)f(t)]$$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a)}F(s)=\frac{1}{s}\cdot e^{-as}f(a)$$

مثال ۵۴. *تبدیل لاپلاس* $\frac{\sin^2 t}{t}$ *کدام گزینه است؟*

۱) $\frac{1}{2}Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$ ۲) $Ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$ ۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$ ۴) $Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds}F(s)=L[\frac{\sin^2 t}{t}]=\int_s^\infty L[\sin^2 t]\,ds=\int_s^\infty L[\frac{1-\cos 2t}{2}]\,ds\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\int^\infty(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})\,ds=\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})\,ds=\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}(Ln\,s-\frac{1}{2}Ln(s^2+4))\Big|_s^T\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}})\Big|_s^T=\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{T}{\sqrt{T^2+4}}-Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}})\Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}Ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

مثال ۵۵. *تبدیل لاپلاس* $f(t)=e^{2t}\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx$ *عبارتست از:*

۱) $\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s}$ ۲) $\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s-2}$ ۳) $\frac{1}{s-2}tag^{-1}\frac{1}{s-2}$ ۴) $\frac{1}{s-2}tag\frac{-1}{s}$

☑ **حل.** گزینه «۳»، از یک طرف؛

$$\bar{F}(s)=L[\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx]\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]}\bar{F}(s)=\frac{1}{s}L[\frac{\sin x}{x}]$$

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds}\bar{F}(s)=\frac{1}{s}\int_s^\infty L[\sin x]\,ds=\frac{1}{s}\int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}\,ds\Rightarrow$$

$$\bar{F}(s)=\frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}\int_s^T\frac{ds}{s^2+1}=\frac{1}{s}\cdot\lim_{T\to\infty}(tag^{-1}s)\Big|_s^T\Rightarrow\bar{F}(s)=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-tag^{-1}s)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{2}-tag^{-1}\alpha=tag^{-1}\frac{1}{\alpha}}\bar{F}(s)=\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s}\Rightarrow L[\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx]=\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s}\quad;(1)$$

در اینصورت؛

$$F(s)=L[f(t)]=L[e^{2t}\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx]\xrightarrow{[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=(L[\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx])\Big|_{s\mapsto s-2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}F(s)=L[\frac{1}{s}tag^{-1}\frac{1}{s}]\Big|_{s\mapsto s-2}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s-2}tag^{-1}\frac{1}{s-2}$$

مثال ۵۶. تبدیل لاپلاس $f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ با شرط $a,b>0$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Ln}\frac{s-b}{s-a}$ ۲) $\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b}$ ۳) $\operatorname{Ln}\frac{s+b}{s+a}$ ۴) $\operatorname{Ln}\frac{s+a}{s+b}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$F(s)=L[f(t)]=L[\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}] \xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} F(s)=\int_s^\infty L[e^{at}-e^{bt}]ds \quad \Rightarrow$$

$$F(s)=\int_s^\infty(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b})ds=\lim_{T\to\infty}\int_s^T(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b})ds=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}(s-a)-\operatorname{Ln}(s-b))\Big|_s^T \quad \Rightarrow$$

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b})\Big|_s^T=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{T-a}{T-b}-\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b})=-\operatorname{Ln}\frac{s-a}{s-b} \quad \Rightarrow \quad F(s)=\operatorname{Ln}\frac{s-b}{s-a}$$

مثال ۵۷. مقدار تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{2\cos^2 t-2e^{-t}}{t}$ به ازاء $s=1$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$F(s)=L[f(t)]=L[\frac{2\cos^2 t-2e^{-t}}{t}] \xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} F(s)=\int_s^\infty L[2\cos^2 t-2e^{-t}]ds \quad \Rightarrow$$

$$F(s)=\int_s^\infty L[(1+\cos 2t)-2e^{-t}]ds=\int_s^\infty(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}-2\frac{1}{s+1})ds=\lim_{T\to\infty}\int_s^T(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s+1})ds \quad \Rightarrow$$

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{Ln}s+\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(s^2+4)-2\operatorname{Ln}(s+1)\right)\Big|_s^T=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{T\sqrt{T^2+4}}{(T+1)^2}-\operatorname{Ln}\frac{s\sqrt{s^2+1}}{(s+1)^2}) \quad \Rightarrow$$

$$F(s)=-\operatorname{Ln}\frac{s\sqrt{s^2+4}}{(s+1)^2}=\operatorname{Ln}\frac{(s+1)^2}{s\sqrt{s^2+4}} \quad \Rightarrow \quad F(1)=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

مثال ۵۸. مقدار $\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

☑ **حل.** گزینه «۲». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} L[\frac{\sin t}{t}]=\int_s^\infty L[\sin t]ds=\int_s^\infty\frac{ds}{s^2+1}=\lim_{T\to\infty}\int_s^T\frac{ds}{s^2+1}=\lim_{T\to\infty}(\tan^{-1}s)\Big|_s^T \quad \Rightarrow$$

$$L[\frac{\sin t}{t}]=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s \quad \Rightarrow \quad L[\frac{\sin t}{t}]=\tan^{-1}\frac{1}{s} \qquad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$I=\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt=(\int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin t}{t}dt)\Big|_{s=1}$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}dt=L[f]|_{s=s}} I=L[\frac{\sin t}{t}]\Big|_{s=1} \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} I=(\tan^{-1}\frac{1}{s})\Big|_{s=1}=\tan^{-1}1 \quad \Rightarrow \quad I=\frac{\pi}{4}$$

مثال ۵۹. اگر $f(t)=\begin{cases}\frac{\sin(\alpha t)}{t} & t\neq 0\\ \alpha & t=0\end{cases}$، آنگاه تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر است با:

۱) $\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}-\frac{\pi}{2}$ ۲) $-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}+\frac{\pi}{2}$ ۳) $\sin^{-1}\frac{s}{\alpha}$ ۴) $\cot^{-1}\frac{s}{\alpha}$

☑ **حل.** گزینه «۲». از آنجائیکه $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\alpha t}{t}=\alpha$ است، داریم؛

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds} L[f(t)]=L[\frac{\sin\alpha t}{t}]=\int_s^\infty L[\sin\alpha t]ds=\int_s^\infty\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}ds=\lim_{T\to\infty}\int_s^T\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \quad \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\lim_{T\to\infty}(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\frac{s}{\alpha})\Big|_s^T=\lim_{T\to\infty}(\tan^{-1}\frac{T}{\alpha}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{\alpha}$$

مثال ۶۰. با فرض $a>0$، مقدار انتگرال $\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx$ کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) ۰ ۳) π ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx \xrightarrow{\int_0^\infty\frac{f}{t}dt=\int_0^\infty L[f]ds} I=\int_0^\infty L[\sin ax]ds=\int_0^\infty\frac{a}{s^2+a^2}ds \quad \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{a}{s^2+a^2}ds=\lim_{T\to\infty}\tan^{-1}\frac{s}{a}\Big|_0^T \quad \Rightarrow \quad I=\lim_{T\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{T}{a}-\tan^{-1}(0)\right) \quad \Rightarrow \quad T=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۶۱. مقدار انتگرال $\int_0^\infty\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt$ کدام است؟

۱) $\operatorname{Ln}2$ ۲) صفر ۳) $\operatorname{Ln}\frac{1}{2}$ ۴) ∞

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$I=\int_0^\infty\frac{e^t-\cos 2t}{t}dt \xrightarrow{\int_0^\infty\frac{f}{t}dt=\int_0^\infty L[f]ds} I=\int_0^\infty L[e^t-\cos 2t]ds=\int_0^\infty(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4})ds \quad \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+4})ds=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}|s-1|-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(s^2+4))\Big|_0^T \quad \Rightarrow \quad I=\lim_{T\to\infty}\operatorname{Ln}\frac{|s-1|}{\sqrt{s^2+4}}\Big|_0^T \quad \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}(\operatorname{Ln}\frac{|T-1|}{\sqrt{T^2+4}}-\operatorname{Ln}\frac{1}{2})=-\operatorname{Ln}\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I=\operatorname{Ln}2$$

مثال ۶۲. مقدار انتگرال $\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}dx$ برابر است با:

۱) $\operatorname{Ln}\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) $\operatorname{Ln}3$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-3x}}{x}dx \xrightarrow{\int_0^\infty \frac{f}{t}dt=\int_0^\infty L[f]ds} I=\int_0^\infty L[e^{-x}-e^{-3x}]ds=\int_0^\infty(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3})ds \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3})ds=\lim_{T\to\infty}\big(Ln(s+1)-Ln(s+3)\big)\Big|_0^T \Rightarrow I=\lim_{T\to\infty}Ln(\frac{s+1}{s+3})\Big|_0^T \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{T+1}{T+3}-Ln\frac{1}{3})=-Ln\frac{1}{3} \Rightarrow I=Ln3$$

مثال ۶۳. *مقدار انتگرال* $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ *برای* $a,b>0$ *چقدر است؟*

۱) $e^{\frac{a}{b}}$ ۲) $e^{\frac{b}{a}}$ ۳) $Ln\frac{b}{a}$ ۴) $Ln\frac{a}{b}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \xrightarrow{\int_0^\infty \frac{f}{t}dt=\int_0^\infty L[f]ds} I=\int_0^\infty L[e^{-ax}-e^{-bx}]dx=\int_0^\infty(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b})ds \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b})ds=\lim_{T\to\infty}\big(Ln(s+a)-Ln(s+b)\big)\Big|_0^T \Rightarrow I=\lim_{T\to\infty}Ln(\frac{s+a}{s+b})\Big|_0^T \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}(Ln(\frac{T+a}{T+b})-Ln\frac{a}{b})=-Ln\frac{a}{b} \Rightarrow I=Ln\frac{b}{a}$$

مثال ۶۴. *با فرض* $a,b>0$ *مقدار انتگرال* $\int_0^\infty \frac{e^{at}-\cos bt}{t}dt$ *کدام است؟*

۱) ∞ ۲) $Ln\frac{b}{a}$ ۳) صفر ۴) $Ln\frac{a}{b}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$I=\int_0^\infty \frac{e^{at}-\cos bt}{t}dt \xrightarrow{\int_0^\infty \frac{f}{t}dt=\int_0^\infty L[f]ds} I=\int_0^\infty L[e^{at}-\cos bt]ds=\int_0^\infty(\frac{1}{s-a}-\frac{s}{s^2+b^2})ds \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(\frac{1}{s-a}-\frac{s}{s^2+b^2})ds=\lim_{T\to\infty}(Ln|s-a|-\frac{1}{2}Ln(s^2+b^2))\Big|_0^T \Rightarrow I=\lim_{T\to\infty}Ln\frac{|s-a|}{\sqrt{s^2+b^2}}\Big|_0^T \Rightarrow$$

$$I=\lim_{T\to\infty}(Ln\frac{T+a}{\sqrt{T^2+b^2}}-Ln\frac{a}{b})=-Ln\frac{a}{b} \Rightarrow I=Ln\frac{b}{a}$$

تبدیل لاپلاس و تغییر مقیاس

قضیه. اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

الف) $L[f(kt)]=\frac{1}{k}F(\frac{s}{k})=\frac{1}{k}L[f(t)]\Big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}$; $k\neq 0$

ب) $L^{-1}[F(ks)]=\frac{1}{k}f(\frac{t}{k})=\frac{1}{k}L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\mapsto\frac{t}{k}}$; $k\neq 0$

مثال ۶۵. *اگر تبدیل لاپلاس* $f(t)$ *برابر* $F(s)=Ln\frac{s-2}{s+1}$ *باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس* $f(2t)$ *عبارتست از:*

۱) $\frac{1}{2}Ln\frac{s+4}{s+2}$ ۲) $\frac{1}{2}Ln\frac{s-4}{s+2}$ ۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{s-4}{s-2}$ ۴) $\frac{1}{2}Ln\frac{s+4}{s-2}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\overline{F}(s)=L[f(2t)] \xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}F(s)\Big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} \overline{F}(s)=\frac{1}{2}F(s)\Big|_{s\mapsto\frac{s}{2}}$$

$$\xrightarrow{F(s)=Ln\frac{s-2}{s+1}} \overline{F}(s)=\frac{1}{2}(Ln\frac{s-2}{s+1})\Big|_{s\mapsto\frac{s}{2}}=\frac{1}{2}Ln\frac{\frac{s}{2}-2}{\frac{s}{2}+1} \Rightarrow \overline{F}(s)=\frac{1}{2}Ln\frac{s-4}{s+2}$$

مثال ۶۶. *اگر لاپلاس معکوس تابع* $F(s)$ *برابر* $f(t)=t+\int_0^t \sin x^2dx$ *باشد، مقدار* $L^{-1}[F(2s+3)]$ *کدام است؟*

۱) $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}t}(\frac{t}{2}+\int_0^{\frac{t}{2}}\sin x^2dx)$ ۲) $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}(\frac{t}{2}+\int_0^{\frac{t}{2}}\sin x^2dx)$

۳) $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}(\frac{t}{2}+\int_0^{t}\sin x^2dx)$ ۴) $\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}t}(\frac{t}{2}+\int_0^{t}\sin x^2dx)$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\bar{f}(t)=L^{-1}[F(2s+3)]=L^{-1}[F(2(s+\frac{3}{2}))] \xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} \bar{f}(t)=e^{-\frac{3}{2}t}L^{-1}[F(2s)]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(ks)]=\frac{1}{k}L^{-1}[F(s)]\Big|_{t\mapsto\frac{t}{k}}} \bar{f}(t)=e^{-\frac{3}{2}t}(\frac{1}{2}L^{-1}[F(s)])\Big|_{t\mapsto\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}f(\frac{t}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تعریف } f(t)} \bar{f}(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}(\frac{t}{2}+\int_0^{\frac{t}{2}}\sin x^2dx)$$

مثال ۶۷. *با فرض* $L[\frac{1-e^{t}}{t}] = Ln(1-\frac{1}{s})$ *، تبدیل لاپلاس تابع* $f(t)=\frac{1-e^{3t}}{t}$ *کدام است؟*

۱) $Ln(1-\frac{3}{s})$ ۲) $\frac{1}{3}Ln(1-\frac{3}{s})$ ۳) $Ln(1-\frac{1}{3s})$ ۴) $3Ln(1-\frac{1}{3s})$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$f(t)=\frac{1-e^{3t}}{t}=3(\frac{1-e^{3t}}{3t}) \xrightarrow{\bar{f}(t)=\frac{1-e^{t}}{t}\ \text{با فرض}} f(t)=3\bar{f}(3t) \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=3L[\bar{f}(3t)]$$

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}L[f(t)]\big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} L[f(t)]=3\cdot\frac{1}{3}L[\bar{f}(t)]\big|_{s\mapsto\frac{s}{3}}=L[\bar{f}(t)]\big|_{s\mapsto\frac{s}{3}}$$

با توجه به تعریف $\bar{f}(t)$ و فرمول ارائه شده در صورت مسأله بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{L[\bar{f}(t)]=Ln(1-\frac{1}{s})} L[f(t)]=Ln(1-\frac{1}{s})\big|_{s\mapsto\frac{s}{3}}=Ln(1-\frac{3}{s})$$

مثال ۶۸. *با فرض* $b\neq 0$ *تبدیل لاپلاس تابع* $\delta(bt-a)$ *کدام است؟ که در آن* $\delta(t-a)$ *معرف تابع دلتای دیراک می‌باشد.*

۱) $\frac{a}{b}e^{-\frac{a}{b}s}$ ۲) $\frac{1}{b}e^{-abs}$ ۳) $\frac{1}{b}e^{-\frac{a}{b}s}$ ۴) $\frac{1}{b}e^{-as}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}L[f(t)]\big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} L[\delta(bt-a)]=\frac{1}{b}L[\delta(t-a)]\big|_{s\mapsto\frac{s}{b}}$$

$$\xrightarrow{\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}} L[\delta(bt-a)]=\frac{1}{b}\cdot e^{-as}\big|_{s\mapsto\frac{s}{b}} \quad \Rightarrow \quad L[\delta(bt-a)]=\frac{1}{b}e^{-\frac{a}{b}s}$$

مثال ۶۹. *اگر* $F(s)$ *تبدیل لاپلاس تابع* $f(t)$ *باشد، تبدیل لاپلاس تابع* $tf(at)$ *با فرض* $a\neq 0$ *کدام است؟*

۱) $\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$ ۲) $\frac{1}{a}F'(\frac{s}{a})$ ۳) $-\frac{1}{a}F'(\frac{s}{a})$ ۴) $-\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\bar{F}(s)=L[tf(at)] \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} \bar{F}(s)=-(L[f(at)])'$$

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}F(s)\big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} \bar{F}(s)=-(\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}))'=-\frac{1}{a}(F(\frac{s}{a}))' \xrightarrow{\text{قاعده زنجیره‌ای}} \bar{F}(s)=-\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$$

II. کاربرد تبدیل لاپلاس.

پس از آشنایی با مفهوم تبدیل لاپلاس و فضایای مربوط به آن، اکنون زمان آن فرا رسیده است، تا به برخی از کاربردهای این تبدیل نیز اشاره‌ای مبسوط داشته باشیم.

تبدیل لاپلاس و حل معادلات دیفرانسیل

از آنجائیکه در ضابطه یک معادله دیفرانسیل علاوه بر متغیر مستقل و متغیر تابعی، مشتقات مراتب مختلف متغیر تابعی نسبت به متغیر مستقل نیز حضور دارند، بنابراین لازم است ابتدا بدانیم تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع مفروض چگونه محاسبه می‌شود.

گزاره. (تبدیل لاپلاس مشتق) فرض کنید تابع $f(t)$ و مشتق آن $f'(t)$ دارای تبدیل لاپلاس می‌باشند. در اینصورت؛

الف) $L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)$.

و هم‌چنین اگر تبدیل لاپلاس توابع $f''(t)$ ، ... و $f^{(n)}(t)$ نیز موجود باشند، داریم؛

ب) $L[f^{(n)}(t)]=s^nL[f(t)]-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$

بعنوان مثال. تبدیل لاپلاس $\delta'(t-a)$ **را بدست آورید.**

حل.

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} L[\delta'(t-a)]=sL[\delta(t-a)]-\delta(0-a)$$

$$\xrightarrow{t\neq a\ \Rightarrow\ \delta(t-a)=0} L[\delta'(t-a)]=sL[\delta(t-a)] \xrightarrow{\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}} L[\delta'(t-a)]=se^{-as}$$

اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم با استفاده از تبدیل لاپلاس به حل برخی از معادلات دیفرانسیل با مقادیر اولیه بپردازیم.

بعنوان مثال. مسأله مقدار اولیه $y''-2y'+y=te^{t}$ **را با شرایط اولیه** $y(0)=0$ **و** $y'(0)=1$ **حل کنید.**

حل.

$$y''+2y'+y=te^{t} \quad \Rightarrow \quad L[y'']-2L[y']+L[y]=L[te^{t}]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} \Big(s^2L[y]-sy(0)\Big)-2(sL[y]-y(0))+L[y]=L[te^{t}]$$

$$\xrightarrow{(y(0)=0\ ;\ y'(0)=1)\ \&\ (L[tf]=-(L[f])')} s^2L[y]-1-2sL[y]+L[y]=-(L[e^{t}])'=-(\frac{1}{s-1})' \quad \Rightarrow$$

$$(s^2-2s+1)L[y]-1=\frac{1}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad (s-1)^2L[y]=\frac{1}{(s-1)^2}+1 \quad \Rightarrow \quad L[y]=\frac{1}{(s-1)^4}+\frac{1}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$y=L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^4}+\frac{1}{(s-1)^2}] \xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} y=e^{t}L^{-1}[\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^2}] \quad \Rightarrow \quad y=e^{t}(\frac{t^3}{6}+t)$$

مثال ۷۰. *تبدیل لاپلاس جواب معادله* $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$ *با شرایط اولیه* $y(0)=0$ *و* $y'(0)=1$ *کدام است؟*

۱) $\frac{s+2+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$ ۲) $\frac{s+1+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$ ۳) $\frac{s+2+e^{-\pi s}}{s^2+2s+1}$ ۴) $\frac{s+1+e^{-\pi s}}{s^2+2s+1}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \Rightarrow L[y'']+2L[y']+2L[y]=L[\delta(t-\pi)]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+2(sL[y]-y(0))+2L[y]=e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=0} s^2L[y]-s+2sL[y]-2+2L[y]=e^{-\pi s} \Rightarrow (s^2+2s+2)L[y]-(s+2)=e^{-\pi s} \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{(s+2)+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$$

مثال ۷۱. *هرگاه $y'(0)=0$ و $y(0)=0$ و $y''-y'+y=t$ آنگاه $L[y]$ برابر است با:*

۱) $\frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)}$ ۲) $\frac{s+1}{s^2(s^2-s+1)}$ ۳) $\frac{1}{s^2(s-1)}$ ۴) $\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y''-y'+y=t \Rightarrow L[y'']-L[y']+L[y]=L[t]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[y]-sy(0)-y'(0))-(sL[y]-y(0))+L[y]=\frac{1}{s^2}$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0} s^2L[y]-sL[y]+L[y]=\frac{1}{s^2} \Rightarrow (s^2-s+1)L[y]=\frac{1}{s^2} \Rightarrow L[y]=\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$$

مثال ۷۲. *در معادله دیفرانسیل $y''+9y=0$ اگر $y'(0)=2$ و $y(0)=0$ باشند. با استفاده از رابطه انتقالی لاپلاس ($\sin\omega t=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$) مقدار $y(1)$ چقدر است؟*

۱) $y(t)=\frac{3}{2}\sin t$ ۲) $y(t)=\frac{2}{3}\sin 3t$ ۳) $y(t)=\frac{3}{2}\sin 3t$ ۴) $y(t)=\frac{2}{3}\sin t$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y''+9y=0 \Rightarrow L[y'']+9L[y]=0$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} (s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+9L[y]=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=0 \ \& \ y'(0)=2} s^2L[y]-2+9L[y]=0 \Rightarrow (s^2+9)L[y]=2 \Rightarrow L[y]=\frac{2}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+9}\right]=2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right] \Rightarrow y(t)=2\left(\frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

مثال ۷۳. *جواب معادله دیفرانسیل همگن $f''(t)+8f'(t)+16f(t)=0$ با شرایط اولیه $f(0)=2$ و $f'(0)=1$ برابر است با:*

۱) $f(t)=(2+5t)e^{-4t}$ ۲) $f(t)=\frac{1}{8}(9e^{-4t}+7e^{-4t})$

۳) $f(t)=\frac{1}{4}(5e^{-2t}+3e^{2t})$ ۴) $f(t)=(2+9t)e^{-4t}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$f''(t)+8f'(t)+16f(t)=0 \Rightarrow L[f''(t)]+8L[f'(t)]+16L[f(t)]=0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[f]-sf(0)-f'(0))+8(sL[f]-f(0))+16L[f]=0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{f(0)=2 \ \& \ f'(0)=1} (s^2L[f]-2s-1)+8(sL[f]-2)+16L[f]=0 \Rightarrow (s^2+8s+16)L[f]=2s+17 \Rightarrow$$

$$L[f]=\frac{2s+17}{(s+4)^2} \Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{2s+17}{(s+4)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{2s+9}{s^2}\right]=e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{2}{s}+\frac{9}{s^2}\right] \Rightarrow f(t)=e^{-4t}(2+9t)$$

در ابتدای این فصل بعنوان یک نتیجه از قضیه وجودی تبدیل لاپلاس، قضیه مقدار انتهایی تبدیل لاپلاس را مطرح کردیم که بیان می‌کرد؛ اگر تابع $f(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی $a>0$ و $F(s)=L[f(t)]$ تبدیل لاپلاس آن باشد، آنگاه:

$$\lim_{s\to+\infty} F(s)=\lim_{s\to+\infty} L[f(t)]=0$$

اکنون به بیان دو قضیه دیگر که می‌توانند راهگشای ما در بررسی بیشتر خواص تبدیل لاپلاس باشند، می‌پردازیم.

قضیه. فرض کنید توابع $f(t)$، ... و $f^{(n)}(t)$ در فاصله $[0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی $a>0$ هستند، اگر $F(s)=L[f(t)]$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، در اینصورت؛

$$\lim_{s\to+\infty} (s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0))=f^{(n-1)}(0)$$

به خصوص؛

$n=1$; $\lim_{s\to+\infty} sF(s)=f(0)$ (قضیه مقدار آغازی) ؛

$n=2$; $\lim_{s\to+\infty} (s^2F(s)-sf(0))=f'(0)$ (قضیه مقدار آغازی مشتق) ؛

قضیه. (مقدار پایانی) اگر $f(t)$ تابعی قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی $a>0$ و $F(s)=L[f(t)]$ تبدیل لاپلاس آن باشد، آنگاه:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

بعنوان مثال. اگر $L[f(t)]=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ **باشد، مقدار** $f(0)$ ، $f'(0)$ **و** $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ **را بدست آورید.**

حل.

۱) $\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی}} f(0)=\lim_{s\to+\infty} sF(s)=\lim_{s\to+\infty} s\cdot\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \Rightarrow f(0)=1$

۲) $\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی مشتق}} f'(0)=\lim_{s\to+\infty} (s^2F(s)-sf(0)) \xrightarrow{f(0)=1} f'(0)=\lim_{s\to+\infty} \left(\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}-s\right) \Rightarrow$

$$f'(0)=\lim_{s\to+\infty}\frac{s(s-\sqrt{1+s^2})}{\sqrt{1+s^2}}=\lim_{s\to+\infty}\frac{s(s-\sqrt{1+s^2})}{\sqrt{1+s^2}}\times\frac{s+\sqrt{1+s^2}}{s+\sqrt{1+s^2}}=\lim_{s\to+\infty}\frac{s(s^2-(1+s^2))}{\sqrt{1+s^2}\ (s+\sqrt{1+s^2})}\Rightarrow$$

$$f'(0)=\lim_{s\to+\infty}\frac{-s}{\sqrt{1+s^2}\ (s+\sqrt{1+s^2})}=0$$

۳) $\xrightarrow{\text{قضیه مقدار پایانی}}\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)=\lim_{s\to\infty}s.\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$

مثال ۷۴. اگر $f(t)=\begin{cases}1 & 2\le t\le 3\\ 0 & \text{در غیراینصورت}\end{cases}$ آنگاه $L[y(t)]$ که $\begin{cases}y'(t)+2y(t)=f(t)\\ y(0)=1\end{cases}$ برابر است با:

۱) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}+\frac{1}{s+2}$ ۲) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}$ ۳) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}+1}{s+2}$ ۴) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}+\frac{1}{s+2}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y'+2y=f(t)=\begin{cases}1 & ;1\le t\le 2\\ 0 & \text{در غیراینصورت}\end{cases}\Rightarrow y'+2y=(u_1(t)-u_2(t))\times1\Rightarrow$$

$$L[y']+2L[y]=L[u_1(t)-u_2(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)}(sL[y]-y(0))+2L[y]=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}\xrightarrow{y(0)=1}(s+2)L[y]-1=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\Rightarrow$$

$$(s+2)L[y]=1+\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\Rightarrow L[y]=\frac{1}{s+2}+\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}$$

مثال ۷۵. جواب مسأله مقدار اولیه زیر کدام است؟

$$y''+y=\delta(t-\pi)\cos t\quad ;\quad y(0)=y'(0)=0$$

۱) $\sin t$ ۲) $u_\pi(t)\sin t$ ۳) $u_\pi(t)\cos t$ ۴) $\cos t$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y''+y=t\delta(t-\pi)\Rightarrow L[y'']+L[y]=L[\delta(t-\pi)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f(t)]=e^{-as}f(a)}(s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+L[y]=e^{-\pi s}\cos(\pi)$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0}s^2L[y]+L[y]=-e^{-\pi s}\Rightarrow L[y]=-e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow y=-L^{-1}[e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2+1}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t).L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}}y=-u_\pi(t).L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}|]\Big|_{t\mapsto t-\pi}=-u_\pi(t)(\sin t)\Big|_{t\mapsto t-\pi}\Rightarrow$$

$$y=-u_\pi(t)\sin(t-\pi)\xrightarrow{\sin(t-\pi)=-\sin t}y=u_\pi(t)\sin t$$

مثال ۷۶. اگر $y''+2y'+2y=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t\end{cases}$ و $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ حاصل $\int_0^\infty 5e^{-t}y(t)\,dt$ کدام است؟

۱) $-e^{-\pi}(1+\pi)$ ۲) $4-e^{-\pi}(\pi+1)$ ۳) $4+e^{-\pi}(1-\pi)$ ۴) $4+e^{-\pi}(\pi-1)$

☑ **حل.** گزینه «۲». از یک طرف؛

$$I=\int_0^\infty 5e^{-t}y(t)\,dt=5\int_0^\infty e^{-t}y(t)\,dt\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=L[f(t)]|_{s=s}}I=5L[y(t)]\Big|_{s=1}\quad ;(*)$$

در اینصورت؛

$$y''+2y'+2y=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t\end{cases}\Rightarrow y''+2y'+2y=(1-u_\pi(t))\times1=1-u_\pi(t)\Rightarrow$$

$$L[y'']+2L[y']+2L[y]=L[1]-L[u_\pi(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)}(s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+2(sL[y]-y(0))+2L[y]=\frac{1}{s}+(L[u_\pi(t)])'$$

$$\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=0}s^2L[y]-s+2sL[y]-2+2L[y]=\frac{1}{s}+(\frac{1}{s}e^{-\pi s})'=\frac{1}{s}+(-\frac{1}{s^2}\times e^{-\pi s}+\frac{1}{s}\times-\pi e^{-\pi s})\Rightarrow$$

$$(s^2+2s+2)L[y]-(s+2)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-\pi s}-\frac{\pi}{s}e^{-\pi s}\xrightarrow{s=1}5L[y]-3=1-e^{-\pi}-\pi e^{-\pi}\Rightarrow$$

$$5L[y]=4-e^{-\pi}(1+\pi)\xrightarrow{\text{با توجه به تساوی }(*)}I=4-e^{-\pi}(1+\pi)$$

مثال ۷۷. اگر جواب $y(t)$ از معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+ty=0$ دارای تبدیل لاپلاس $Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt$ باشد، آنگاه:

۱) $Y(s)=\frac{y(0)}{\sqrt{1+s^2}}$ ۲) $Y(s)=\frac{y(0)}{s^2+1}$

۳) $Y(s)=\frac{-y(0)}{s^2+1}$ ۴) $Y(s)=y(0)(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s)$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$ty''+2y'+ty=0\Rightarrow t(y''+y)+2y'=0\Rightarrow L[t(y''+y)]+2L[y']=0$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}-(L[y''+y])'+2L[y']=0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)}-(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s))'+2(sY(s)-y(0))=0\Rightarrow$$

$$-(2s\times Y+s^2\times Y'-y(0)+Y')+2sY-2y(0)=0\Rightarrow-2sY-s^2Y'+y(0)-Y'+2sY-2y(0)=0\Rightarrow$$

$$-(s^2+1)Y'-y(0)=0\Rightarrow(s^2+1)\frac{dY}{ds}=-y(0)\Rightarrow\frac{dY}{ds}=-\frac{y(0)}{s^2+1}\Rightarrow dY=y(0)\frac{-1}{s^2+1}\,ds$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}}Y(s)=y(0)(\cot g^{-1}s+c)\xrightarrow{\cot g^{-1}s=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s}Y(s)=y(0)(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s+c)$$

که با فرض $c=0$، گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۷۸. *جواب مسأله با مقدار اولیه* $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *عبارت است از:*

۱) $y = \int_0^x \cos(x-t) f(t)\,dt$ ۲) $y = \int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$

۳) $y = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt$ ۴) $y = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y'' + y = f(x) \quad \Rightarrow \quad L[y''] + L[y] = L[f(x)]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf'(0)-f'(0)} (s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) + L[y] = L[f(x)]$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0} s^2L[y] + L[y] = L[f(x)] \quad \Rightarrow (s^2+1)L[y] = L[f(x)] \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{1}{s^2+1}\cdot L[f(x)] \quad \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}\cdot L[f(x)]] \xrightarrow{L^{-1}[F.G]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} y = L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}] * L^{-1}[L[f(x)]] \quad \Rightarrow$$

$$y = \sin x * f(x) \xrightarrow{f*g=\int_0^x f(x-t)g(t)dt} y = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$$

مثال ۷۹. *تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر کدام است؟*

$$xy'' + (1+x)y' + y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

۱) $\frac{s-1}{s(s+1)}$ ۲) $\frac{1}{s+1}$ ۳) $\frac{s+1}{s^2}$ ۴) $\frac{s-1}{s^2}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$xy'' + (1+x)y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x(y'' + y') + y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad L[x(y'' + y')] + L[y'] + L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -(L[y'' + y'])' + L[y'] + L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0))' + (sY(s) - y(0)) + Y(s) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=-1} -(s^2Y(s) - s - 1 + sY(s) - 1)' + sY(s) - 1 + Y(s) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-(2s \times Y + s^2 \times Y' - 1 + Y + s \times Y') + sY - 1 + Y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-(s^2+s)Y' - sY = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^2+s)\frac{dY}{ds} = -sY \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{Y} = \frac{-s}{s^2+s}\,ds = \frac{-1}{s+1}\,ds$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; معادله مرتبه اول جدا شونده}} \ln Y = -\ln c(s+1) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{c(s+1)}$$

با فرض $c = 1$ تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۸۰. *هرگاه* $f(t) = L^{-1}(\frac{2s+1}{(s-2)(s-1)})$ *باشد آنگاه* $f(0)$ *برابر است با:*

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{5}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی}} f(0) = \lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{s(2s+1)}{(s-2)(s-1)} = 2$$

مثال ۸۱. *اگر تبدیل لاپلاس* $f(t)$ *برابر* $L(f(t)) = \frac{s+2}{2s^2+2s+1}$ *باشد، مقدار* $f'(0)$ *چقدر خواهد بود؟*

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۰

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی}} f(0) = \lim_{s\to+\infty} sF(s) = \frac{s(s+2)}{2s^2+2s+1} \quad \Rightarrow \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی مشتق}} f'(0) = \lim_{s\to+\infty} (s^2F(s) - sf(0)) \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{2}} f'(0) = \lim_{s\to+\infty} (\frac{s^2(s+2)}{2s^2+2s+1} - \frac{s}{2}) \quad \Rightarrow$$

$$f'(0) = \lim_{s\to+\infty} \frac{2s^2 - s}{4s^2+4s+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال ۸۲. *اگر تبدیل لاپلاس* $f(t)$ *برابر با* $\frac{e^s + s^{-s}}{s^2 - 3s + 6} + \frac{1}{s}$ *باشد، در اینصورت حد* $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ *برابر است با:*

۱) ۰ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) e^2 ۴) ۱

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار پایانی}} \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} (\frac{s(e^s + e^{-s})}{s^2 - 3s + 6} + 1) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$$

مثال ۸۳. *تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است؟*

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1$$

۱) $\frac{s-1}{s^2}$ ۲) $\frac{s(s-1)}{s^2+1}$ ۳) $\frac{1}{s(s-1)}$ ۴) $\frac{s}{s^2+1}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی}} y(0) = \lim_{s\to+\infty} sL[y] \xrightarrow{y(0)=1} \lim_{s\to+\infty} sL[y] = 1$$

در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند صحیح باشند.

$$\xrightarrow{\text{قضیه مقدار آغازی مشتق}} y'(0) = \lim_{s\to+\infty} (s^2L[y] - sy(0)) \xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=-1} \lim_{s\to+\infty} (s^2L[y] - s) = -1 \quad : (1)$$

در اینصورت، اگر لاپلاس جواب برابر گزینه «۴» باشد، داریم:

$$L[y] = \frac{s}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to+\infty} (s^2L[y] - s) = \lim_{s\to+\infty} (\frac{s^3}{s^2+1} - s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{-s}{s^2+1} = 0$$

در نتیجه با توجه به تساوی (۱) گزینه «۴» نیز نمی‌تواند صحیح باشد.

مثال ۸۴. *تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است؟*

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \quad , y(0) = 1 \quad , y'(0) = -1$$

۱) $\frac{s+1}{s^2}$ ۲) $\frac{s+1}{s^2} + 1$ ۳) $\frac{s-1}{s^2} + 1$ ۴) $\frac{s-1}{s^2}$

☑ **حل.** گزینه «۴». حل اول:

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \Rightarrow xy'' + y' - xy' + y = 0 \Rightarrow x(y'' - y') + y' + y = 0 \Rightarrow$$

$$L[x(y'' - y')] + L[y'] + L[y] = 0 \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -\big(L[y'' - y']\big)' + L[y'] + L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -\Big((s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - (sY(s) - y(0))\Big)' + (sY(s) - y(0)) + Y(s) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=-1} -(s^2Y(s) - sY(s) - s + 2)' + sY(s) - 1 + Y(s) = 0 \Rightarrow$$

$$-(2s \times Y + s^2 \times Y' - Y - s \times Y' - 1) + sY - 1 + Y = 0 \Rightarrow -2sY - s^2Y' + Y' + sY' + 1 + sY - 1 + Y = 0 \Rightarrow$$

$$(s - s^2)Y' + (2 - s)Y = 0 \Rightarrow (s - s^2)\frac{dY}{ds} = -(2 - s)Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{2 - s}{s^2 - s}ds$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \int \text{؛ معادله مرتبه اول جدا شونده}} \int\frac{dY}{Y} = -\int\frac{2 - s}{s(s-1)}ds \Rightarrow LnY = \int(\frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1})ds \Rightarrow$$

$$LnY = -2Lns + Ln(s-1) + Lnc \Rightarrow LnY = Lns^{-2} + Ln(s-1) + Lnc \Rightarrow LnY = Ln(cs^{-2}(s-1))$$

$$\xrightarrow{\text{Ln: تابعی ۱-۱ است}} Y(s) = \frac{c(s-1)}{s^2} \quad ; (1)$$

اکنون با توجه به قضیه مقدار آغازی بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)} y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} (s.\frac{c(s-1)}{s^2}) = c \xrightarrow{y(0)=1} c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} Y(s) = L[y(x)] = \frac{s-1}{s^2}$$

حل دوم: با توجه به قضیه مقدار آغازی مشتق داریم:

$$y'(0) = \lim_{s\to+\infty} (s^2F(s) - sy(0)) \xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=-1} \lim_{s\to+\infty} (s^2F(s) - s) = -1$$

که با جایگذاری گزینه‌ها به جای $F(s)$ تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۸۵. *اگر* $\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$ *و تبدیل لاپلاس تابع* $J_0(x)$ *برابر* $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ *باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس* $J_1(x)$ *برابر است با:*

۱) $1 + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ ۲) $1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ ۳) $1 + \frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}$ ۴) $1 - \frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$-x^{-n}J_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) \xrightarrow{n=0} J_1(x) = -J_0'(x) \Rightarrow L[J_1(x)] = -L[J_0'(x)]$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} L[J_1(x)] = -(sL[J_0(x)] - J_0(0))$$

$$L[J_0] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \ \& \ J_0(0)=1 \longrightarrow L[J_1(x)] = -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + 1$$

یادآوری. با توجه به ضابطه تابع بسل مرتبه صفر داریم:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \Rightarrow J_0(x) = 1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \Rightarrow J_0(0) = 1$$

مثال ۸۶. *تبدیل لاپلاس جواب مسأله مقدار اولیه زیر عبارتست از:*

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad ; y(0) = 1 \ , y'(0) = 0$$

۱) $Y(s) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k!)}{(2k)!2^k} \frac{1}{s^{2k}}$ ۲) $Y(s) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k!)}{(2k)!2^k} \frac{1}{s^{2k+1}}$

۳) $Y(s) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k}} \frac{1}{s^{2k+1}}$ ۴) $Y(s) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2 2^{2k}} \frac{1}{s^{2k+1}}$

☑ **حل.** گزینه «۳». حل اول:

$$xy'' + y' + xy = 0 \Rightarrow x(y'' + y) + y' = 0 \Rightarrow L[x(y'' + y)] + L[y'] = 0$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -\big(L[y'' + y]\big)' + L[y'] = 0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -((s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s))' + (sY(s) - y(0)) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \ \& \ y'(0)=0} -\big(s^2Y(s) - s + Y(s)\big)' + sY(s) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-(2s \times Y(s) + s^2Y'(s) - 1 + Y'(s)) + sY(s) - 1 = 0 \Rightarrow -2sY - s^2Y' + 1 - Y' + sY - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-(1+s^2)Y' - sY = 0 \Rightarrow -(1+s^2)\frac{dY}{ds} = sY \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\frac{s}{1+s^2}ds$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \int \text{: مرتبه اول جدا شونده}} \int\frac{dY}{Y} = -\int\frac{s}{1+s^2}ds = -\frac{1}{2}\int\frac{2s}{1+s^2}ds \Rightarrow LnY = -\frac{1}{2}Ln(1+s^2) + Lnc \Rightarrow$$

$$LnY = Ln(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} + Lnc \Rightarrow LnY = Ln(c(1+s^2)^{-\frac{1}{2}})$$

$$\xrightarrow{\text{Ln: تابعی ۱-۱ است}} Y(s) = c(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow Y(s) = \frac{c}{s}(1+\frac{1}{s^2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{(1+x)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l(l-1)\times\cdots\times(l-k+1)}{k!}x^k} Y(s) = \frac{c}{s}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} \cdot (\frac{1}{s^2})^k \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{c}{s}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}}{k!} \cdot \frac{1}{s^{2k}} \Rightarrow Y(s) = c\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{1}{s^{2k+1}}$$

یادآوری.

$$\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\times\cdots\times(-\frac{2k-1}{2})}{k!}=(-1)^k\frac{1\times3\times\cdots\times(2k-1)}{2^k\times k!}$$

$$=(-1)^k\frac{1\times3\times\cdots\times(2k-1)}{2^k\times k!}\times\frac{2\times4\times\cdots\times2k}{2\times4\times\cdots\times2k}=(-1)^k\frac{1\times2\times3\times4\times\cdots\times(2k-1)(2k)}{2^k k!\times2^k(1\times2\times\cdots\times k)}=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^k k!\times2^k(k!)}$$

$$=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

تذکر.

۱ـ ازآنجائیکه مسأله فوق یک مسأله با مقدار اولیه است، لذا جواب مورد نظر باید بصورت یک جواب خصوصی ارائه می‌شد. بنابراین بیان جواب بصورت عمومی اشکال دارد.

۲ـ با توجه به قضیه مقدار اولیه می‌توان مقدار $c=1$ را محاسبه کرد. که در اینصورت جواب خصوصی مورد نظر مسأله مفروض با جایگذاری $c=1$ در جواب عمومی $Y(s)$ بدست می‌آید.

حل دوم:

$$xy''+y'+xy=0 \xrightarrow{\times x\ (\text{معادله})} x^2y''+xy'+x^2y=0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دیفرانسیل بسل مرتبه صفر}} y(x)=J_0(x)=c\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \quad ;(1)$$

$$\xrightarrow{x=0} y(0)=c+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right)\Big|_{x=0} \xrightarrow{y(0)=1} c=1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } c=1 \text{ در تساوی } (1)} y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \Rightarrow Y(s)=L[y(x)]=L[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}]$$

$$\xrightarrow{\text{با عملگری خطی است}} Y(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}L[x^{2k}] \xrightarrow{t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{s^{n+1}}} Y(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{(2k)!}{s^{2k+1}} \Rightarrow$$

$$Y(s)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{1}{s^{2k+1}}$$

مثال ۸۷. *در حل معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=2xe^{-x}$ همراه با دو شرط $y(0)=2$ و $y'(0)=2$ چنانچه مقدار $x=2$ باشد، آنگاه مقدار y برابر است با:*

۱) $e^{-2}(6+4\cos2+3\sin2)$

۲) $e^{-2}(6+4\cos2-3\sin2)$

۳) $e^{2}(6+4\cos2+3\sin2)$

۴) $e^{2}(6+4\cos2-3\sin2)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y''+2y'+2y=2xe^{-x} \Rightarrow L[y'']+2L[y']++2L[y]=2L[xe^{-x}]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+2(sY(s)-y(0))+2Y(s))=2L[e^{-x}x]$$

$$\xrightarrow{(y(0)=2\ ;\ y'(0)=2)\ \&\ L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} s^2Y(s)-4s-2+2sY(s)-8+2Y(s)=2(\frac{1}{s^2})\Big|_{s\mapsto s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2+2s+2)Y(s)-4s-10=2\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow ((s^2+2s+1)+1)Y(s)=\frac{2}{(s+1)^2}+4s+10 \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{2}{((s+1)^2+1)(s+1)^2}+\frac{4s+10}{(s+1)^2+1} \Rightarrow Y(s)=\frac{2}{((s+1)^2+1)(s+1)^2}+\frac{4((s+1)+\frac{3}{2})}{(s+1)^2+1} \Rightarrow$$

$$y(x)=L^{-1}(\frac{2}{((s+1)^2+1)(s+1)^2}+\frac{4((s+1)+\frac{3}{2})}{(s+1)^2+1})$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} y(x)=e^{-x}L^{-1}(\frac{2}{(s^2+1)(s^2)}+\frac{4(s+\frac{3}{2})}{s^2+1}) \Rightarrow$$

$$y(x)=e^{-x}(2L^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)s^2}]+4L^{-1}[\frac{s+\frac{3}{2}}{s^2+1}]) \Rightarrow$$

$$y(x)=e^{-x}(2L^{-1}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}]+4L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1}]) \Rightarrow$$

$$y(x)=e^{-x}(2(x-\sin x)+4(\cos x+\frac{3}{2}\sin x)) \Rightarrow y(x)=e^{-x}(2x+4\cos x+2\sin x)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } x=2} y(2)=e^{-2}(6+4\cos2+2\sin2)$$

مثال ۸۸. *تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر کدام است؟*

$$xy''+(1+x)y'+y=0 \quad ;\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$$

۱) $\frac{1}{s+1}+1$

۲) $\frac{1}{s+1}$

۳) $\frac{1}{s+1}-1$

۴) $\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۲». با توجه به قضیه مقدار آغازی داریم:

$$y(0)=\lim_{s\to+\infty}sF(s) \xrightarrow{y(0)=1} \lim_{s\to+\infty}sF(s)=1$$

که با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال ۸۹. *جواب مسأله مقدار اولیه زیر به ازاء $t = \pi$ کدام است؟*

$$y'' + ۲y' + ۲y = \delta(t - \frac{\pi}{۲})(\sin t + ۲) \quad ; \quad y(۰) = ۰ \ , \ y'(۰) = ۰$$

۱) $۳e^{-\pi}$ ۲) $۳e^{\pi}$ ۳) $۳e^{-\frac{\pi}{۲}}$ ۴) $۳e^{\frac{\pi}{۲}}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$y'' + ۲y' + ۲y = \delta(t - \frac{\pi}{۲})(\sin t + ۲) \quad \Rightarrow \quad L[y''] + ۲L[y'] + ۲L[y] = L[\delta(t - \frac{\pi}{۲})(\sin t + ۲)]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}] = s^n L[f] - s^{n-۱} f(۰) - \cdots - f^{(n-۱)}(۰)} (s^۲ L[y] - sy(۰) - y'(۰)) + ۲(sL[y] - y(۰)) + ۲L[y] = L[\delta(t - \frac{\pi}{۲})(\sin t + ۲)]$$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f] = e^{-as} f(a) \ \& \ y(۰) = y'(۰) = ۰} s^۲ L[y] + ۲sL[y] + ۲L[y] = e^{-\frac{\pi}{۲}s}(\sin\frac{\pi}{۲} + ۲) \quad \Rightarrow$$

$$(s^۲ + ۲s + ۲)\,L[y] = ۳e^{-\frac{\pi}{۲}s} \quad \Rightarrow \quad L[y] = ۳e^{-\frac{\pi}{۲}s} \cdot \frac{۱}{s^۲ + ۲s + ۲} = ۳e^{-\frac{\pi}{۲}s} \cdot \frac{۱}{(s+۱)^۲ + ۱} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = ۳L^{-۱}[e^{-\frac{\pi}{۲}s} \cdot \frac{۱}{(s+۱)^۲ + ۱}]$$

$$\xrightarrow{L[e^{-as}F] = u_a(t) L^{-۱}[F]|_{t \mapsto t-a}} y(t) = ۳u_{\frac{\pi}{۲}}(t) L^{-۱}[\frac{۱}{(s+۱)^۲ + ۱}]\Big|_{t \mapsto t - \frac{\pi}{۲}}$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)] = e^{at} L^{-۱}[F(s)]} y(t) = ۳u_{\frac{\pi}{۲}}(t)(e^{-t} L^{-۱}[\frac{۱}{s^۲ + ۱}])\Big|_{t \mapsto t - \frac{\pi}{۲}} = ۳u_{\frac{\pi}{۲}}(t)(e^{-t}\sin t)\Big|_{t \mapsto t - \frac{\pi}{۲}} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = ۳u_{\frac{\pi}{۲}}(t) e^{-(t - \frac{\pi}{۲})} \sin(t - \frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{t = \pi} y(\pi) = ۳u_{\frac{\pi}{۲}}(\pi) e^{-\frac{\pi}{۲}} \sin(\frac{\pi}{۲})$$

با توجه به تعریف $u_{\frac{\pi}{۲}}(t) = \begin{cases} ۱ & ; t > \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & ; t < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ داریم:

$$\xrightarrow{\pi > \frac{\pi}{۲} \Rightarrow u_{\frac{\pi}{۲}}(\pi) = ۱} y(\pi) = ۳e^{-\frac{\pi}{۲}}$$

تبدیل لاپلاس و معادلات انتگرال

تعریف. معادلاتی که تابع مجهول در آنها تحت علامت انتگرال ظاهر شود، معادلات انتگرال نامیده می‌شوند و معمولاً دارای نمایش عمومی زیر هستند:

$$k(t) + \lambda \int_۰^t g(t-x)\, f(x)\, dx = h(t)$$

این دسته از معادلات انتگرال عموماً به صورت زیر قابل حل می‌باشند:

$$k(t) + \lambda \int_۰^t g(t-x)\, f(x)\, dx = h(t) \xrightarrow{\int_۰^t g(t-x) f(x)dx = (f*g)(t)} k(t) + \lambda (f*g)(t) = h(t) \quad \Rightarrow$$

$$L[k(t)] + \lambda L[(f*g)(t)] = L[h(t)] \xrightarrow{L[f*g] = L[f]L[g]} L[k(t)] + \lambda L[f(t)] L[g(t)] = L[h(t)]$$

بعنوان مثال. معادله انتگرال $f(t) = t + \int_۰^t f(x)\sin(t-x)\,dx$ **را حل کنید.**

حل.

$$f(t) = t + \int_۰^t f(x)\sin(t-x)\,dx \xrightarrow{\int_۰^t f(x)g(t-x)dx = f*g} f(t) = t + (f*\sin)(t)$$

$$\xrightarrow{L[f*g] = L[f]L[g]} L[f(t)] = L[t] + L[f(t)]L[\sin t] \quad \Rightarrow \quad L[f(t)] = \frac{۱}{s^۲} + \frac{۱}{s^۲ + ۱} L[f(t)] \quad \Rightarrow$$

$$(۱ - \frac{۱}{s^۲ + ۱}) L[f(t)] = \frac{۱}{s^۲} \quad \Rightarrow \quad L[f(t)] = \frac{s^۲ + ۱}{s^۴} = \frac{۱}{s^۲} + \frac{۱}{s^۴} \quad \Rightarrow f(t) = L^{-۱}[\frac{۱}{s^۲}] + L^{-۱}[\frac{۱}{s^۴}] \quad \Rightarrow$$

$$f(t) = t + \frac{t^۳}{۳!}$$

مثال ۹۰. *تبدیل لاپلاس تابع* $f(t) = \int_۰^t (t-\lambda)^۳ \sin\lambda d\lambda$ *برابر است با:*

۱) $\frac{۳}{s^۴(s^۲ + ۱)}$ ۲) $\frac{۳!}{s^۴(s^۲ + ۱)}$ ۳) $\frac{۳}{s^۴(s^۲ - ۱)}$ ۴) $\frac{۳!}{s^۴(s^۲ - ۱)}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$f(t) = \int_۰^t (t-\lambda)\sin\lambda d\lambda \quad \Rightarrow \quad F(s) = L[f(t)] = L[\int_۰^t (t-\lambda)^۳ \sin\lambda d\lambda]$$

$$\xrightarrow{\int_۰^t f(t-x)g(x)dx = f*g} F(s) = L[t^۳ * \sin t] \xrightarrow{L[f*g] = L[f]L[g]} F(s) = L[t^۳]L[\sin t] \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{۳!}{s^۴} \cdot \frac{۱}{s^۲ + ۱}$$

مثال ۹۱. *جواب مسأله انتگرالی* $y'(t) + \int_۰^t y(u)\cos(t-u)\,du = \cos t$ *و* $y(۰) = ۰$ *کدام است؟*

۱) $y(t) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} t \sin\sqrt{۲}\, t$ ۲) $y(t) = \sqrt{۲}\sin t + \sqrt{۲}\cos t$

۳) $y(t) = \sqrt{۲}\cos\sqrt{۲}\, t$ ۴) $y(t) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\sqrt{۲}\, t$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$y'(t) = \int_۰^t y(u)\cos(t-u)\,du = \cos t \xrightarrow{\int_۰^t f(x)g(t-x)dx = (f*g)(t)} y'(t) + (y*\cos)(t) = \cos t \quad \Rightarrow$$

$$L[y'(t)] + L[y(t)]L[\cos t] = L[\cos t] \xrightarrow{L[f'] = sL[f] - f(۰)} (sL[y(t)] - sy(۰)) + \frac{s}{s^۲ + ۱} L[y(t)] = \frac{s}{s^۲ + ۱}$$

$$\xrightarrow{y(0)=0} sL[y(t)]+\frac{s}{s^2+1}L[y(t)]=\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow (s+\frac{s}{s^2+1})L[y(t)]=\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}L[y(t)]=\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow L[y(t)]=\frac{1}{s^2+2} \Rightarrow y(t)=L^{-1}(\frac{1}{s^2+(\sqrt{2})^2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

مثال ۹۲. *جواب معادله انتگرالی* $\phi(x)=x+\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt$ *عبارتست از:*

۱) $\cosh x$ ۲) $\sinh x$ ۳) $\sec hx$ ۴) $\operatorname{cosech} x$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\phi(x)=x+\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} \phi(x)=x+x*\phi(x) \Rightarrow$$

$$L[\phi(x)]=L[x]+L[x*\phi(x)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[\phi(x)]=L[x]+L[x]L[\phi(x)] \Rightarrow$$

$$L[\phi(x)]=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}L[\phi(x)] \Rightarrow (1-\frac{1}{s^2})L[\phi(x)]=\frac{1}{s^2} \Rightarrow L[\phi(x)]=\frac{1}{s^2-1} \Rightarrow$$

$$\phi(x)=L^{-1}[\frac{1}{s^2-1}]=\sinh x$$

مثال ۹۳. *جواب معادله انتگرالی* $\phi(x)=t^2+\int_0^t e^{-x}\phi(t-x)\,dx$ *کدام‌سزینه است؟*

۱) $t^2+\frac{t^3}{6}$ ۲) $\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}$ ۳) $t^2+\frac{t^3}{3}$ ۴) $\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$

☑ **حل.** گزینه «۳».

$$\phi(t)=t^2+\int_0^t e^{-x}\phi(t-x)\,dt \xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} \phi(t)=t^2+e^{-t}*\phi(x) \Rightarrow$$

$$L[\phi(t)]=L[t^2]+L[e^{-t}*\phi(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[\phi(t)]=L[t^2]+L[e^{-t}]L[\phi(t)] \Rightarrow$$

$$L[\phi(t)]=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s+1}L[\phi(t)] \Rightarrow (1-\frac{1}{s+1})L[\phi(t)]=\frac{2}{s^3} \Rightarrow \frac{s}{s+1}L[\phi(t)]=\frac{2}{s^3} \Rightarrow$$

$$L[\phi(t)]=2\frac{s+1}{s^4}=2(\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}) \Rightarrow \phi(t)=2L^{-1}[\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}]=2(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}) \Rightarrow \phi(t)=t^2+\frac{t^3}{3}$$

مثال ۹۴. *پاسخ معادله انتگرال* $\sin x=\lambda\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$ *برای* $f(x)$ *کدام است؟*

۱) $\frac{1}{\lambda}(\cos x+\sin x)$ ۲) $\frac{1}{\lambda}(\cos x-\sin x)$ ۳) $\lambda(\sin x+\cos x)$ ۴) $\lambda(\cos x-\sin x)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$\sin x=\lambda\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=(f*g)(t)} \sin x=\lambda(e^x*f(x)) \Rightarrow$$

$$L[\sin x]=\lambda L[e^x*f(x)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[\sin x]=\lambda L[e^x]L[f(x)] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{s^2+1}=\lambda\cdot\frac{1}{s-1}\cdot L[f(x)] \Rightarrow L[f(x)]=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{s-1}{s^2+1}=\frac{1}{\lambda}(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}) \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}] \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\lambda}(\cos x-\sin x)$$

مثال ۹۵. *جواب معادله انتگرالی* $t^{\frac{3}{2}}=\int_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}}y(u)\,du$ *کدام است؟*

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}t$ ۳) $\frac{3}{2}t$ ۴) $\frac{3}{2}$

☑ **حل.** گزینه «۴».

$$t^{\frac{3}{2}}=\int_0^t (t-u)^{\frac{1}{2}}y(u)\,du \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=f*g} t^{\frac{3}{2}}=t^{\frac{1}{2}}*y(t) \Rightarrow$$

$$L[t^{\frac{3}{2}}]=L[t^{\frac{1}{2}}*y(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[t^{\frac{3}{2}}]=L[t^{\frac{1}{2}}]L[y] \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot L[y] \xrightarrow{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)} \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}.s}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}\cdot L[y] \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{\frac{3}{2}}{s} \Rightarrow y=\frac{3}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}]=\frac{3}{2}$$

مثال ۹۶. *اگر* $x(t)$ *جواب معادله* $x(t)=2+\int_0^t e^{t-u}x'(u)\,du$ *باشد، مقدار* $x(t)$ *در نقطه* $t=5$ *برابر است با:*

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **حل.** گزینه «۳». از یک طرف؛

$$x(t)=2+\int_0^t e^{t-u}x'(u)\,du \xrightarrow{t=0} x(0)=2 \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$x(t)=2+\int_0^t e^{t-u}x'(u)\,du \Rightarrow \int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=f*g \Rightarrow x(t)=2+e^t*x'(t) \Rightarrow$$

$$L[x(t)]=L[2]+L[e^t*x'(t)] \Rightarrow L[x(t)]=\frac{2}{s}+L[e^t]L[x'(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} L[x(t)]=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}(sL[x(t)]-x(0)) \xrightarrow{\text{تساوی (1)}} L[x(t)]=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}(sL[x(t)]-2) \Rightarrow$$

$$(1-\frac{s}{s-1})L[x(t)]=\frac{2}{s}-\frac{2}{s-1} \Rightarrow \frac{-1}{s-1}L[x(t)]=\frac{-2}{s(s-1)} \Rightarrow L[x(t)]=\frac{2}{s} \Rightarrow$$

$$x(t)=2L^{-1}[\frac{1}{s}] \Rightarrow x(t)=2 \xrightarrow{t=5} x(5)=2$$

مثال ۹۷. *با فرض* $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ *جواب معادله* $t=\int_0^t \frac{y(x)}{\sqrt{t-x}}dx$ *کدام است؟*

۱) $\frac{2\sqrt{t}}{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{t}}{2\pi}$ ۳) $\frac{t}{2\pi}$ ۴) $\frac{2t}{\pi}$

☑ **حل.** گزینه «۱». از یک طرف؛

$$\xrightarrow{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)} \Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$t=\int_0^t \frac{y(x)}{\sqrt{t-x}}dx \Rightarrow t=\int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}}y(x)\,dx \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=f*g} t=t^{-\frac{1}{2}}*y \Rightarrow$$

$$L[t]=L[t^{-\frac{1}{2}}*y] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[t]=L[t^{-\frac{1}{2}}]\,L[y] \Rightarrow \frac{1}{s^2}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\cdot L[y]$$

$$\xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} L[y]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\ \xrightarrow{L^{-1}}\ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt{t}}{\pi}$$

مثال۹۸. *جواب معادله انتگرالی* $y(t)+3y'+2\int_0^t y(\tau)d\tau=0$ *و* $y(0)=1$ *برابر است با:*

۱) $y(t)=e^{-t}(1+t)$ ۲) $y(t)=e^{-t}(1-t)$

۳) $y(t)=e^{t}(1+t)$ ۴) $y(t)=e^{t}(1-t)$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$y'+2y+\int_0^t y(\tau)\,d\tau=0 \Rightarrow L[y']+2L[y]+L[\int_0^t y(\tau)\,d\tau]=0$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)\ \&\ L[\int_0^t f\,dt]=\frac{1}{s}L[f]} (sL[y]-y(0))+2L[y]+\frac{1}{s}L[y]=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=0} sL[y]-1+2L[y]+\frac{1}{s}[y]=0 \Rightarrow (s+2+\frac{1}{s})L[y]=1 \Rightarrow L[y]=\frac{s}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$y=L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2}\right] \xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} y=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right] \Rightarrow$$

$$y=e^{-t}(1-t)$$

مثال۹۹. *با فرض* $L[J_0(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ *، معادله انتگرال زیر را حل کنید.*

$$\int_0^t J_0(t-x)\,f(x)\,dx=\sin t$$

۱) $J_0(t)$ ۲) $J_1(t)$ ۳) $tJ_0(t)$ ۴) $tJ_1(t)$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$\int_0^t J_0(t-x)\,f(x)\,dx=\sin t \Rightarrow (J_0*f)(t)=\sin t \Rightarrow L[(J_0*f)(t)]=L[\sin t] \Rightarrow$$

$$L[J_0(t)]L[f(t)]=L[\sin t] \xrightarrow{J_0(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}L[f(t)]=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L[f(t)]=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \Rightarrow$$

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right] \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\xrightarrow{L^{-1}}J_0(t)} f(t)=J_0(t)$$

لازم بذکر است، حل معادله انتگرالی فوق در واقع تساوی قابل توجه $\sin t=\int_0^t J_0(t-x)J_0(x)\,dx$ را به اثبات می‌رساند.

مثال۱۰۰. *جواب معادله انتگرالی زیر عبارت است از:*

$$y(t)=1-2\int_0^t (t-u)y(u)du \quad , t\geq 0$$

۱) $\cos\sqrt{2}t$ ۲) $\sin\sqrt{2}t$ ۳) $t\cos 2t$ ۴) $t\sin 2t$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$$y(t)=1-2\int_0^t (t-u)y(u)du \Rightarrow Y(s)=L[y(t)]=L[1-2\int_0^t (t-u)y(u)du]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} Y(s)=L[1]-2L[t*y(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} Y(s)=\frac{1}{s}-2L[t]L[y(t)] \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}Y(s) \Rightarrow (1+\frac{2}{s^2})Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+2} \Rightarrow y(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right] \Rightarrow y(t)=\cos\sqrt{2}\,t$$

مثال۱۰۱. *مقدار تابع که در معادله زیر صدق می‌کند کدام است؟*

$$f(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-u)f(u)du$$

۱) $f(t)=t^2+\frac{t^4}{6}$ ۲) $f(t)=t^2+\frac{t^4}{12}$

۳) $f(t)=t^2-\frac{t^4}{6}$ ۴) $f(t)=t^2-\frac{t^4}{12}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$$f(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-u)f(u)du \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[t^2+\int_0^t \sin(t-u)f(u)du]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[t^2]+L[\sin t*f(t)]$$

$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=\frac{۲}{s^۳}+L[\sin t]L[f(t)] \Rightarrow F(s)=\frac{۲}{s^۳}+\frac{۱}{s^۲+۱}F(s) \Rightarrow (۱-\frac{۱}{s^۲+۱})F(s)=\frac{۲}{s^۳} \Rightarrow$

$F(s)=\frac{۲s^۲+۲}{s^۵}=\frac{۲}{s^۳}+\frac{۲}{s^۵} \Rightarrow f(t)=L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}\left[\frac{۲}{s^۳}+\frac{۲}{s^۵}\right] \Rightarrow f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۲}{s^۳}\right]+۲L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۵}\right] \Rightarrow$

$f(t)=t^۲+\frac{۲t^۴}{۴!}=t^۲+\frac{t^۴}{۱۲}$

مثال ۱۰۲. *پاسخ معادله انتگرال زیر برای $f(t)$ چیست؟*

$$f(t)=e^{-t}+\int_۰^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \quad ;t\geq ۰$$

۱) $f(t)=\frac{۳}{۴}e^{-t}+\frac{۱}{۴}e^{t}$

۲) $f(t)=(\frac{۳}{۴}--\frac{۱}{۲}t)e^{-t}+\frac{۱}{۴}e^{t}$

۳) $f(t)=\frac{۱}{۴}e^{-t}+(\frac{۳}{۴}--\frac{۱}{۲}t)e^{t}$

۴) $f(t)=\frac{۱}{۴}e^{-t}+\frac{۳}{۴}e^{t}$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$f(t)=e^{-t}+\int_۰^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[e^{-t}+\int_۰^t (t-\tau)f(\tau)d\tau]$

$\xrightarrow{\int_۰^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[e^{-t}]+L[t*f(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=\frac{۱}{s+۱}+L[t]\,L[f(t)] \Rightarrow$

$F(s)=\frac{۱}{s+۱}+\frac{۱}{s^۲}F(s) \Rightarrow (۱-\frac{۱}{s^۲})F(s)=\frac{۱}{s+۱} \Rightarrow F(s)=\frac{s^۲}{(s+۱)(s^۲-۱)}=\frac{s^۲}{(s+۱)(s-۱)(s+۱)} \Rightarrow$

$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}\left[\frac{s^۲}{(s+۱)^۲(s-۱)}\right]=L^{-۱}(\frac{-\frac{۱}{۲}}{(s+۲)^۲}+\frac{\frac{۳}{۴}}{s+۱}+\frac{\frac{۱}{۴}}{s-۱}) \Rightarrow$

$f(t)=-\frac{۱}{۲}L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s+۱)^۲}\right]+\frac{۳}{۴}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s+۱}\right]+\frac{۱}{۴}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s-۱}\right]$

$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F(s)]} f(t)=-\frac{۱}{۲}(e^{-t}t)+\frac{۳}{۴}e^{-t}+\frac{۱}{۴}e^{t} \Rightarrow f(t)=(\frac{۳}{۴}--\frac{۱}{۲}t)e^{-t}+\frac{۱}{۴}e^{t}$

یادآوری.

$\frac{s}{(s+۱)^۲(s-۱)}=\frac{A}{(s+۱)^۲}+\frac{B}{s+۱}+\frac{C}{s-۱}=\frac{A(s-۱)+B(s^۲-۱)+C(s+۱)^۲}{(s+۱)^۲(s-۱)} \Rightarrow$

$s^۲\equiv A(s-۱)+B(s^۲-۱)+C(s+۱)^۲ \Rightarrow \begin{cases} s=۱ \;;\; ۱=۴C & \Rightarrow C=\frac{۱}{۴} \\ s=-۱ \;;\; ۱=-۲A & \Rightarrow A=-\frac{۱}{۲} \\ s=۰ \;;\; ۰=-A-B+C & \Rightarrow B=\frac{۳}{۴} \end{cases}$

مثال ۱۰۳. *جواب $f(t)$ در معادله انتگرالی $f(t)=te^{-t}+\int_۰^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha$ برابر است با:*

۱) $\frac{۱}{۲}(۱-۲e^{-۲t}) \;;t\geq ۰$

۲) $\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۲t}) \;;t\geq ۰$

۳) $\frac{۱}{۲}(۱+۲e^{۲t}) \;;t\geq ۰$

۴) $\frac{۱}{۲}(۱+۲e^{-۲t}) \;;t\geq ۰$

☑ **حل.** گزینه «۲».

$f(t)=te^{-t}+\int_۰^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}d\alpha \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[te^{-t}+\int_۰^t f(t-\alpha)(\alpha e^{-\alpha})d\alpha]$

$\xrightarrow{\int_۰^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[te^{-t}]+L[f(t)*te^{-t}] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=L[te^{-t}]+L[f(t)]L[te^{-t}] \Rightarrow$

$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s)=(L[t]|_{s\mapsto s+۱})+F(s)L[t]|_{s\mapsto s+۱} \Rightarrow F(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۲}+F(s)\frac{۱}{(s+۱)^۲} \Rightarrow$

$(۱-\frac{۱}{(s+۱)^۲})F(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۲} \Rightarrow F(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۲-۱} \Rightarrow \frac{(s+۱)^۲-۱}{(s+۱)^۲}F(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۲} \Rightarrow F(s)=\frac{۱}{(s+۱)^۲-۱}$

$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s+۱)^۲-۱}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۲s}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s(s+۲)}\right]=L^{-۱}\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{s}-\frac{\frac{۱}{۲}}{s+۲}\right) \Rightarrow$

$f(t)=\frac{۱}{۲}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}\right]-\frac{۱}{۲}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s+۲}\right]=\frac{۱}{۲}(۱)-\frac{۱}{۲}e^{-۲t} \Rightarrow f(t)=\frac{۱}{۲}(۱-e^{-۲t})$

مثال ۱۰۴. *جواب معادله انتگرالی زیر کدام است؟*

$$y(t)=te^{t}-۲e^{t}\int_۰^t e^{-u}y(u)du$$

۱) $\sinh t$

۲) $\cosh t$

۳) e^{t}

۴) $۲e^{-t}$

☑ **حل.** گزینه «۱».

$y(t)=te^{t}-۲e^{t}\int_۰^t e^{-u}\,y(u)\,du=te^{t}-۲\int_۰^t e^{t}\times e^{-u}y(u)du \Rightarrow y(t)=te^{t}-۲\int_۰^t e^{t-u}y(u)du \Rightarrow$

$Y(s)=L[y(t)]=L[te^{t}-۲\int_۰^t e^{t-u}y(u)du] \xrightarrow{\int_۰^t f(t-x)g(x)dx=f*g} Y(s)=L[te^{t}]-۲L[e^{t}*y(t)]$

$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} Y(s)=L[e^{t}t]-۲L[e^{t}]L[y(t)] \xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} Y(s)=\frac{۱}{s^۲}\Big|_{s\mapsto s-۱}-۲\frac{۱}{s-۱}Y(s) \Rightarrow$

$(۱+\frac{۲}{s-۱})Y(s)=\frac{۱}{(s-۱)^۲} \Rightarrow Y(s)=\frac{۱}{(s-۱)(s+۱)}=\frac{۱}{s^۲-۱} \Rightarrow y(t)=L^{-۱}[Y(s)]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲-۱}\right]=\sinh t$

تبدیل لاپلاس و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

تعریف. همانگونه که می‌دانیم، هر معادله دیفرانسیل معمولی در واقع رابطه‌ای بین یک تابع و مشتقات آن نسبت به یک متغیر مستقل است. حال اگر چند معادله شامل روابطی بین چند تابع و متغیر مستقل مشترک آنها داشته باشیم، حاصل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.

تعریف. اگر معادلات حاضر در یک دستگاه معادلات، خطی باشند، به دستگاه مفروض یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی گفته می‌شود.

اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه داده شده باشد، با استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان دستگاه مفروض را به یک دستگاه جبری تبدیل نموده و در فضای لاپلاس به محاسبهٔ تبدیل لاپلاس توابع مجهول بپردازیم. سپس به کمک تبدیل معکوس لاپلاس، جواب دستگاه معادلات خطی مفروض را بدست آوریم.

بعنوان مثال. مسأله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' = ۴x + ۵y \\ y' = -x - ۲y \end{cases} \quad ; \; x(۰) = ۰ \;,\; y(۰) = ۱$$

حل. با فرض $L[x] = X$ و $L[y] = Y$ داریم:

$$\begin{cases} x' = ۲x + ۵y \\ y' = -x - ۲y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L[x'] = ۲L[x] + ۵L[y] \\ L[y'] = -L[x] - ۲L[y] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x(۰)=۰ \;\&\; y(۰)=۱} \begin{cases} sX = ۲X + ۵Y \\ sY - ۱ = -X - ۲Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-۲)X - ۵Y = ۰ \\ X + (s+۲)Y = ۱ \end{cases}$$

با توجه به اینکه در دستگاه غیرهمگن حاصل، دترمینان ماتریس ضرایب $\begin{vmatrix} s-۲ & -۵ \\ ۱ & s+۲ \end{vmatrix} = s^۲ + ۱$ مقداری مخالف صفر است، با استفاده از روش کرامر بدست می‌آوریم:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & -۵ \\ ۱ & s+۲ \end{vmatrix}}{s^۲+۱} = \frac{۵}{s^۲+۱} \quad \Rightarrow \quad x = L^{-۱}X = ۵L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۱}\right] \quad \Rightarrow \quad x = ۵\sin t$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s-۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}}{s^۲+۱} = \frac{s-۲}{s^۲+۱} \quad \Rightarrow \quad y = L^{-۱}[Y] = L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۱} - ۲\frac{۱}{s^۲+۱}\right] \quad \Rightarrow \quad y = \cos t - ۲\sin t$$

مثال ۱۰۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ **با شرط اولیه** $y(۰) = ۰$ **و** $x(۰) = ۲$ **را حل نمائید.**

۱) $y = e^{۲t} - e^{-۲t}$, $x = e^{۲t} + e^{-۲t}$

۲) $y = e^{t} - e^{-t}$, $x = e^{t} + e^{-t}$

۳) $y = e^{t\sqrt{۲}} - e^{-t\sqrt{۲}}$, $x = e^{t\sqrt{۲}} + e^{-t\sqrt{۲}}$

۴) $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{t\sqrt{۲}} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-t\sqrt{۲}}$, $x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱)e^{t\sqrt{۲}} + (۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})e^{-t\sqrt{۲}}$

☑ **حل.** گزینه «۴». با فرض $L[x] = X$ و $L[y] = Y$ داریم:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX - ۲ = X + Y \\ sY - ۰ = X - Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-۱)X - Y = ۲ \\ X - (s-۱)Y = ۰ \end{cases}$$

با توجه به اینکه در گزینه غیرهمگن حاصل، دترمینان ماتریس ضرایب $\begin{vmatrix} s-۱ & -۱ \\ ۱ & -(s+۱) \end{vmatrix} = ۲ - s^۲$ برابر مقداری مخالف صفر است، با استفاده از روش کرامر بدست می‌آوریم:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & -(s+۱) \end{vmatrix}}{۲-s^۲} = \frac{۲(s+۱)}{s^۲-۲} \quad \Rightarrow \quad x = L^{-۱}[X] = ۲L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲-۲} + \frac{۱}{s^۲-۲}\right] \quad \Rightarrow$$

$$x = ۲(\cosh\sqrt{۲}t + \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sinh\sqrt{۲}t) = ۲\cosh\sqrt{۲}t + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲\sinh\sqrt{۲}t)$$

$$\xrightarrow{۲\cosh x = e^{x}+e^{-x} \;\&\; ۲\sinh x = e^{x}-e^{-x}} x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱)e^{\sqrt{۲}t} + (۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})e^{-\sqrt{۲}t}$$

در اینصورت با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد. برای بررسی کاملتر به محاسبه تابع جواب y نیز می‌پردازیم:

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s-۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}}{۲-s^۲} = \frac{۲}{s^۲-۲} \quad \Rightarrow \quad y = L^{-۱}[Y] = ۲L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲-۲}\right] = \frac{۲}{\sqrt{۲}}\sinh\sqrt{۲}t \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲\sinh\sqrt{۲}t) \xrightarrow{۲\sinh x = e^{x}-e^{-x}} y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(e^{\sqrt{۲}t} - e^{-\sqrt{۲}t})$$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ اگر $L[f] = \frac{1}{s^4}$، $f(t)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{t}{2}$ ۲) $\frac{t^2}{4}$ ۳) $\frac{t^3}{6}$ ۴) $\frac{t^4}{8}$

۲ـ اگر $L(f) = \frac{1}{s^2+25}$، $f(t)$ کدام است؟ (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{5}\sin 5t$ ۲) $\frac{1}{5}\cos 5t$ ۳) $5\sin 5t$ ۴) $5\cos 5t$

۳ـ اگر $\frac{3}{s+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۸)

۱) $f(x) = 3(x+4)$ می‌باشد. ۲) $f(x) = 4e^{-3x}$ می‌باشد.

۳) $f(x) = 3e^{4x}$ می‌باشد. ۴) $f(x) = 3e^{-4x}$ می‌باشد.

۴ـ مقادیر a و b را طوری تعیین نمائید که تابع $\frac{as+b}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $4\cos 2t + 2\sin 2t$ باشد. (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۸)

۱) $a=-1, b=-2$ ۲) $a=1, b=-1$ ۳) $a=1, b=-2$ ۴) $a=b=1$

۵ـ حاصل $\int_0^\infty e^{-3t}\sin 2t\,dt$ برابر کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{2}{13}$ ۲) $\frac{3}{13}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۶ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty xe^{-sx}\cos\beta x\,dx$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۷ و مجموعه مواد ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\beta^2-s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$ ۲) $\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$ ۳) $\frac{\beta^2-s^2}{\beta^2+s^2}$ ۴) $\frac{s^2-\beta^2}{s^2+\beta^2}$

۷ـ $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ مطلوب است $f(t)$: (مجموعه عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ۲) $\alpha\pi t$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ ۴) πt

۸ـ جواب معادله انتگرال $\varphi(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u}\varphi(u)\,du$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۸)

۱) $\varphi(t) = e^{2t}$ ۲) $\varphi(t) = e^t$ ۳) $\varphi(t) = 1 + e^t$ ۴) $\varphi(t) = 1 + e^{2t}$

۹ـ تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر کدام است؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۷۸)

$$L^{-1}\frac{1}{s^2+3s+\frac{13}{4}}$$

۱) $e^{-t}\sin\frac{3}{2}t$ ۲) $e^{-\frac{3}{2}t}\sin t$ ۳) $e^{-\frac{3}{2}}\cos t$ ۴) $te^{-\frac{3}{2}t}$

۱۰ـ جواب معادله انتگرال $y(t) = 1 + \int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx$ برابر است با: (مهندسی برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $1+t^2$ ۲) $t+\frac{1}{2}t^2$ ۳) $1+\frac{1}{2}t^2$ ۴) $\delta(t)+\frac{1}{2}t^2$

۱۱ـ اگر $L(\sin\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$ باشد. آنگاه $L(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}})$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{p}{4}}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$

۳) $\frac{-3\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}} + \frac{1}{4p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$

۱۲ـ تبدیل لاپلاس معکوس تابع $Arc\cot g\frac{s}{\omega}$ برابر است با: (مجموعه مواد سرامیک ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{1}{t}\sin\omega t$ ۲) $\frac{1}{t}\cos\omega t$ ۳) $\frac{1}{t^2}\sin\omega t$ ۴) $\frac{1}{t^2}\cos\omega t$

۱۳ـ تبدیل لاپلاس $f(t) = te^t$ کدام است؟ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{1}{(s+1)^2}$ ۲) $\frac{6}{(s-1)^2}$ ۳) $\frac{6}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{(s-1)^2}$

۱۴ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^t\sin t$ کدام است؟ (مجموعه صنایع پلیمر ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{1}{(s+1)^2+1}$ ۲) $\frac{s}{(s-1)^2+1}$ ۳) $\frac{s}{(s+1)^2-1}$ ۴) $\frac{1}{(s-1)^2+1}$

۱۵ـ چنانچه تبدیل لاپلاس $L[e^{at}\sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ و $L[e^{at}\cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ باشد آنگاه $L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right]$: (مجموعه مهندسی برق ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}e^{-t}\cos 3t + 3e^t\sin 3t$ ۲) $e^t\cos 3t + 3e^t\sin 3t$

۳) $3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$ ۴) $3e^{-t}\cos 3t + e^{-t}\sin 3t$

۱۶ـ چنانچه تبدیل لاپلاس $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ مفروض باشد تبدیل معکوس لاپلاس $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\}$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^t - \frac{7}{2}e^{-3t}$ ۲) $-\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{-3t}$

۳) $\frac{1}{6}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{2}{7}e^{-3t}$ ۴) $-\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{2}{7}e^{3t}$

۱۷ـ در صورتی که تبدیل لاپلاس $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$ و $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$، آنگاه جواب معادله انتگرال $u(t) = \cos bt + c\int_0^t u(t-z)e^{-cz}dz$ (c,b,a ثابت) برابر است با: (مهندسی سازه‌های هیدرولیکی ـ آزاد ۷۸)

۱) $c\sin bt + \cos bt$ ۲) $e^{-ct}\cos bt$ ۳) $\frac{c}{b}\sin bt + \cos bt$ ۴) $\frac{c}{a}\sin bt$

۱۸ـ حل معادله زیر کدام است؟ (مجموعه سازه‌های هیدرولیکی ـ آزاد ۷۸)

$$z'' + z' - 2z = 0 \quad ; \quad z(0) = 2 \ , \ z'(0) = 1$$

۱) $z = e^x - 3e^{-2x}$ ۲) $z = 3e^x + e^{-2x}$ ۳) $z = e^x - e^z$ ۴) $z = e^z - e^x$

۱۹ـ کانولوشن دو تابع f و g از t که در آن $f(t) = 1$ و $g(t) = t$ (یعنی $g(t) * 1$) برابر است با: (مهندسی پزشکی ـ آزاد ۷۸)

۱) $\frac{1}{3}t^3$ ۲) t ۳) 1 ۴) $\frac{1}{2}t^2$

۲۰ـ اگر a یک عدد حقیقی ثابتی باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{iat}$ ($i = \sqrt{-1}$) کدام است؟ (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $F(s) = \frac{1}{s-ia}$ ۲) $F(s) = \frac{1}{s+ia}$ ۳) $F(s) = \frac{-1}{s-ia}$ ۴) وجود ندارد

۲۱ـ $L^{-1}\left[\frac{8-6s}{16s^2+9}\right]$ وقتی که $t = 0$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۷۹)

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) صفر ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) 1

۲۲ـ حاصل $\int_0^\infty e^{-3t}\sin t\cos t\,dt$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{26}$ ۲) $\frac{1}{13}$ ۳) $\frac{3}{14}$ ۴) $\frac{1}{7}$

۲۳ـ مطلوب است محاسبهٔ $L^{-1}\left[\frac{4-5s}{s^{3/2}}\right]$. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{vt^{\frac{1}{2}} - 15t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ ۲) $\frac{5t^{\frac{1}{2}} - 8t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ ۳) $\frac{8t^{\frac{1}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\frac{15t^{\frac{1}{2}} - vt^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$

۲۴ـ مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_0^\infty t\,e^{-4t}\cos 2t\,dt$: (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{100}$ ۲) $\frac{5}{200}$ ۳) $\frac{\pi}{100}$ ۴) $\frac{7}{200}$

۲۵ـ تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ برابر است با: (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۷۹)

۱) $((s+1)^2+4)^{-1}$ ۲) $2((s+1)^2+4)^{-1}$ ۳) $((2s+1)^2+4)^{-1}$ ۴) $4((s+2)^2+4)^{-1}$

۲۶ـ انتگرال $\int_0^{2\pi} \sin x e^{2ix}\frac{x^2}{x-1}\delta(x-\pi)dx$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) ∞

۲۷ـ اگر داشته باشیم $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 2 \\ 2 & t \ge 2 \end{cases}$، تبدیل لاپلاس f کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$ ۲) $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s}$ ۳) $F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^2}$ ۴) $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$

۲۸ـ می‌دانیم تبدیل لاپلاس $f(t) = \sin t$ برابر با $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ است. تبدیل لاپلاس $g(t) = t^2\sin t$ کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$ ۲) $\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$ ۳) $\frac{4s^2+2}{(s^2+1)^3}$ ۴) $\frac{2s^2+1}{(s^2+1)^2}$

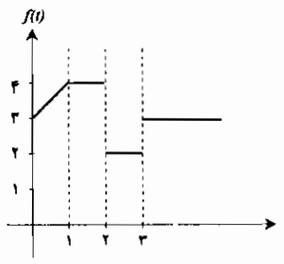
۲۹ـ جواب مسأله با مقادیر اولیه زیر کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۹)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 2 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

۱) $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{1}{6}x^3e^x + 4$ ۲) $y = 3xe^x - 4e^x + \frac{1}{6}x^2e^x + 4$

۳) $y = 4xe^x - 3e^x + \frac{1}{6}xe^x + 4$ ۴) $y = 4xe^x - 3e^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^x + 4$

۳۰ـ تبدیل لاپلاس نشان داده شده در شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۷۹)



۱) $\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$

۲) $\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$

۳) $\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$

۴) $\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s}$

۳۱ـ عکس تبدیل لاپلاس $Ln\frac{p+1}{p+3}$ کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{x}(e^{-x} + e^{-3x})$ ۲) $\frac{1}{x}(e^x + e^{3x})$ ۳) $\frac{1}{x}(e^x - e^{3x})$ ۴) $\frac{e^{-3x} - e^{-x}}{x}$

۳۲ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} 2t & t < 3 \\ t^2 & t > 3 \end{cases}$ برابر است با: (مهندسی شیمی ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{s} + (2 + 4s + 3s^2)\frac{e^{3s}}{s^2}$ ۲) $\frac{2}{s^2} + (\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{s})e^{-3s}$

۳) $\frac{2}{s^2} + (\frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s})e^{-3s}$ ۴) $\frac{2}{s^2} - (\frac{3}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s})e^{-3s}$

۳۳ـ جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟ (δ تابع دیراک) (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۷۹)

$$y'' + ۲y' + ۲y = \delta(t - \frac{\pi}{۲}) \quad ; \quad y(۰) = y'(۰) = ۰$$

۱) $-u_{\frac{\pi}{۲}}(t)e^{-(t-\frac{\pi}{۲})}\cos t$
۲) $-e^{-(t-\frac{\pi}{۲})}\cos t$
۳) $e^{-t}\sin t$
۴) $e^{-(t-\frac{\pi}{۲})}\sin t$

۳۴ـ تبدیل لاپلاس $\delta'(t-۲)$ برابر است با: (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۷۹)

۱) $e^{-۲s}$
۲) $se^{-۲s} - ۱$
۳) $se^{-۲s}$
۴) $-۲e^{-۲s}$

۳۵ـ تبدیل لاپلاس $L[x^۳e^{۴x}]$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱}{(s-۴)^۳}$
۲) $\frac{۲}{s}$
۳) $\frac{۵}{(s-۴)^۳}$
۴) $\frac{۶}{(s-۴)^۴}$

۳۶ـ حاصل $\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\frac{\sin ax}{x}dx$ کدام است؟ (مهندسی صنایع ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۱+\alpha^۲}$
۲) $\frac{\alpha}{۱+\alpha^۲}$
۳) $Ln(۱+\alpha^۲)$
۴) $Arctg\alpha$

۳۷ـ اگر $L(t^۲) = \frac{۲}{s^۳}$ باشد. تبدیل لاپلاس $L(t^۲e^{۳t})$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{۲}{(s-۳)^۳}$
۲) $\frac{۲}{(s+۳)^۶}$
۳) $\frac{۲}{(s+۳)^۳}$
۴) $\frac{۲}{(s-۳)^۶}$

۳۸ـ حل انتگرال $y(t) = \int_{۰}^{t} y(u)\sin(t-u)du$ برابر است با: (مهندسی عمران ـ آزاد ۷۹)

۱) $y = ۰$
۲) $y = \frac{۱}{۴}t$
۳) $y = \frac{۱}{۸}t^۳$
۴) $y = \frac{۱}{۱۲}t^۴$

۳۹ـ معکوس تبدیل لاپلاس $\Phi(s) = \frac{۱}{s^۲+۴s+۳}$ چیست؟ (مجموعه مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۲}(e^{-۳t} - e^{-۲t})$
۲) $\frac{۱}{۴}(e^{-t} - e^{-۳t})$
۳) $\frac{۱}{۲}(e^{-t} - e^{-۳t})$
۴) $\frac{۱}{۴}(e^{-۳t} - e^{-۲t})$

۴۰ـ تبدیل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید: (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۷۹)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & (t < \pi) \\ t & (t > \pi) \end{cases}$$

۱) $F(s) = e^{-\pi s}\left[\frac{\pi}{s} + \frac{۱}{s^۲} + \frac{۱}{s^۲+۱}\right]$
۲) $F(s) = \frac{۱}{\pi}tag^{-۱}(\frac{۱}{s/a}) + \frac{\pi}{۲}tag^{-۱}(\frac{\pi}{s})$
۳) $F(s) = \frac{۱}{(s^۲+۱)(۱-e^{-\pi s})}$
۴) $F(s) = \frac{۱}{s^۲+۱} + e^{-\pi s}\left[\frac{\pi}{s} + \frac{۱}{s^۲} + \frac{۱}{s^۲+۱}\right]$

۴۱ـ با بکارگیری تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر را بدست آورید؟ (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۷۹)

$$\ddot{x} + ۵\dot{x} + ۴x = ۳ + ۲\delta(t)$$

۱) $x(t) = (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳}e^{-t} - \frac{۵}{۱۲}e^{-۴t})u(t)$
۲) $x(t) = \frac{۳}{۴}te^{-t} + \frac{۱}{۳}e^{-۴t} - \frac{۲}{۳}e^{-t}$
۳) $x(t) = (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳}e^{-t} - \frac{۵}{۱۲}e^{-۴t})r(t)$
۴) $x(t) = \delta(t) - ۲e^{-t} + \frac{۲}{۵}e^{-۴t}$

۴۲ـ تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{۱}{s^۲+۶۴}$ برابر است با: (مهندسی مواد ـ سراسری ۸۰)

۱) $۸\cos ۸t$
۲) $۸\sin ۸t$
۳) $\frac{۱}{۸}\cos ۸t$
۴) $\frac{۱}{۸}\sin ۸t$

۴۳ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ به صورت $\frac{s^۲+۲s}{(s^۲+۲s+۲)^۲}$ است. $f(x)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۰)

۱) $xe^{-x}\cos x$
۲) $xe^{-x}\sin x$
۳) $xe^{x}\cos x$
۴) $xe^{x}\sin x$

۴۴ـ مبدل لاپلاس تابع $\frac{-۳}{\sqrt{t}}$ را بدست آورید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۶}{\sqrt{s}}$
۲) $\frac{-۳\pi}{\sqrt{s}}$
۳) $-۳\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
۴) $\frac{-۳}{\sqrt{s}}$

۴۵ـ مبدل لاپلاس تابع $t^۲\sin ۲t$ را بدست آورید. (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{۱۲s^۲+۱۶}{(s^۲+۴)^۲}$
۲) $\frac{۱۲s^۲-۱۶}{(s^۲+۴)^۳}$
۳) $\frac{۱۲s^۲-۱۶}{(s^۲-۴)^۳}$
۴) $\frac{۱۲s^۲+۱۶}{(s^۲+۴)^۳}$

۴۶ـ جواب مسأله با مقادیر اولیه $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(۰) = ۰ \ , \ y'(۰) = ۰ \end{cases}$ عبارتست از: (مهندسی عمران ـ سراسری ۷۸ و ۸۰)

۱) $y = \int_{۰}^{x}\cos(x-t)f(t)dt$
۲) $y = \int_{۰}^{x}(x-t)^۲f(t)dt$
۳) $y = \int_{۰}^{x}(x-t)f(t)dt$
۴) $y = \int_{۰}^{x}\sin(x-t)f(t)dt$

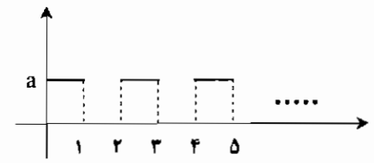
۴۷ـ اگر y جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} y'' + y = \delta(t-۲\pi)\cos t \\ y(۰) = ۰ \ , \ y'(۰) = ۱ \end{cases}$ باشد، که در آن δ «تابع دلتای دیراک» می‌باشد، تبدیل لاپلاس y کدام است؟ (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۰)

۱) $Y(s) = \frac{s + e^{-۲\pi s}}{s^۲+۱}$
۲) $Y(s) = \frac{۱ + e^{-۲\pi s}}{s^۲+۱}$
۳) $Y(s) = \frac{۱ + e^{-۲\pi s}\cos s}{s^۲+۱}$
۴) $Y(s) = \frac{s + e^{-۲\pi s}\cos s}{s^۲+۱}$

۴۸ـ کدامیک از روابط زیر در تبدیل لاپلاس صحیح است؟ (مهندسی پلیمر ـ سراسری ۸۰)

۱) $L(x\frac{d^۲y}{dx^۲}) = -s^۲\frac{dY}{ds} + ۲sY + y(۰)$
۲) $L(x\frac{d^۲y}{dx^۲}) = s^۲\frac{dY}{ds} + ۲sY + y(۰)$
۳) $L(x\frac{d^۲y}{dx^۲}) = s^۲\frac{dY}{ds} - ۲sY + y(۰)$
۴) $L(x\frac{d^۲y}{dx^۲}) = -s^۲\frac{dY}{ds} - ۲sY + y(۰)$

۴۹ـ تبدیل لاپلاس تابع f، با نمودار داده شده زیر کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۰)



۱) $\frac{a}{s}$
۲) $\frac{a(1-e^{-s})}{s}$
۳) $\frac{a}{s(1-e^{-s})}$
۴) $\frac{a}{s(1+e^{-s})}$

۵۰ـ حاصل $L\left[\frac{x}{2a}\sin ax\right]$ برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$
۲) $\frac{a^2-p^2}{(a^2+p^2)^2}$
۳) $-\frac{p}{(a^2+p^2)^2}$
۴) $\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$

۵۱ـ اگر $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع $t^2 e^{-3t}$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{(s+3)^2}$
۲) $\frac{2}{(s-3)^3}$
۳) $\frac{1}{(s-3)^2}$
۴) $\frac{2}{(s+3)^3}$

۵۲ـ تابع f(t) به صورت زیر داده شده است، تبدیل لاپلاس آن کدام است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 2\\ t & 2<t\end{cases}$$

۱) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$
۲) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-s}}{s^2}$
۳) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$
۴) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{e^{-2s}}{s^2}$

۵۳ـ معادله دیفرانسیل زیر در نظر بگیرید؛ اگر تبدیل لاپلاس $y(t)$ را با $Y(s)$ نشان دهیم آنگاه $Y(s)$ با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=1 \quad ; \quad y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

۱) $\frac{1}{s}$
۲) $\frac{2}{s}$
۳) $\frac{3}{s}$
۴) $\frac{2}{s^2}$

۵۴ـ اگر $\begin{cases}y'(t)+2y(t)=f(t)\\ y(0)=1\end{cases}$ که $f(t)=\begin{cases}1 & 1\le t\le 2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$ آنگاه $L[y(t)]$ برابر است با: (مهندسی شیمی ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}+\frac{1}{s+2}$
۲) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}$
۳) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}+1}{s+2}$
۴) $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}+\frac{1}{s+2}$

۵۵ـ تبدیل لاپلاس تابع $h(t)=\int_0^t (t-\lambda)^4\cos\lambda d\lambda$ برابر است با: (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{24}{s^5(s^2+1)}$
۲) $\frac{4}{s^5(s^2+1)}$
۳) $\frac{4}{s^4(s^2+1)}$
۴) $\frac{24}{s^4(s^2+1)}$

۵۶ـ تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\frac{2e^{-2s}}{s^2+4}$ کدامیک از توابع زیر می‌باشد. (مهندسی مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۰)

۱) $u_2(t)\sin(t-4)$
۲) $u_2(t)\sin(2t-2)$
۳) $u_2(t)\sin(2t-4)$
۴) $u_2(t)\sin(t-2)$

۵۷ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{\sin 2t}{t}$ برابر است با: (مهندسی مدیریت نساجی ـ سراسری ۸۰)

۱) $-\tan^{-1}\frac{1}{s}$
۲) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{2}$
۳) $\operatorname{Ln}(1-\frac{4}{s^2})$
۴) $\frac{1}{s}\operatorname{Ln}(1-\frac{4}{s^2})$

۵۸ـ عکس تبدیل لاپلاس تابع $G(s)=e^{-2s}(\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s})$ برابر است با: (مهندسی حفاری ـ سراسری ۸۰)

۱) $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<4\\ 2t-3 & t>4\end{cases}$
۲) $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<4\\ 2t+5 & t>4\end{cases}$
۳) $g(t)=\begin{cases}0 & 0<t<3\\ 2t-3 & t>3\end{cases}$
۴) $g(t)=2t+5$

۵۹ـ هرگاه $f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<3\\ 2 & t>3\end{cases}$ آنگاه تبدیل لاپلاس این تابع برابر است با: (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{2}{s}e^{-2s}$
۲) $\frac{2}{s^2}e^{-3s}$
۳) $2se^{-3s}$
۴) $\frac{2}{s}e^{-3s}$

۶۰ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ -\sin x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$ و $f(x)=f(x+2\pi)$ کدام است؟

(مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{s}{(s^2+1)(e^{\pi s}-1)}$
۲) $\frac{1}{(s^2+1)(e^{\pi s}-1)}$
۳) $\frac{s}{(s^2+1)(e^{\pi s}+1)}$
۴) $\frac{s}{(s^2-1)(e^{\pi s}+1)}$

۶۱ـ تبدیل لاپلاس تابع به صورت $\frac{1}{(s-2)(s-1)}$ است. تابع $f(x)$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) e^{2x}
۲) e^{x}
۳) $e^{2x}-e^{x}$
۴) $e^{2x}+e^{x}$

۶۲ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x\sin 2x$ کدام است؟ (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{s}{(s^2+1)^2}$
۲) $\frac{1}{(s^2+4)^2}$
۳) $\frac{s}{(s^2+4)^2}$
۴) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

۶۳ـ در تبدیل لاپلاس چنانچه $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ و $L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$، آنگاه $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]$ برابر است با: (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\sin 2t\cos t$
۲) $\sin t\cos t$
۳) $\sin 2t\cos 2t$
۴) $\sin t\cos 2t$

۶۴ـ کانولوشن دو تابع 1 و e^{at} برابر است با: (مهندسی مکانیک ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{e^{at}-1}{a^2}-\frac{t}{a}$
۲) $\frac{e^{at}t^2}{2}$
۳) te^{at}
۴) $\frac{e^{at}-1}{t}$

۶۵ـ لاپلاس معکوس تابع $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ برابر است با: (مهندسی مکانیک و پزشکی ـ آزاد ۸۰)

۱) $e^{-t}-e^{-2t}$
۲) $(1-e^{-t})(1-e^{-2t})$
۳) $t-(1-e^{-2t})$
۴) $2(1-e^{-t})-t$

۶۶ـ مقدار عکس ترانسفورم لاپلاس $L^{-1}\left[Ln(1+\frac{1}{s})\right]$ برابر است با:

(مهندسی هوافضا ـ سراسری ۷۹ و مهندسی مکانیک ـ آزاد ۷۷ـ۸۰)

۱) $\frac{1-e^{-t}}{t}$
۲) $\frac{1-e^{t}}{t^2}$
۳) $\frac{1-e^{-t}}{t^2}$
۴) $\frac{1-e^{t}}{t}$

۶۷ـ لاپلاس معکوس تابع $Ln(1+\frac{\omega^2}{s^2})$ برابر است با: (مهندسی مکانیک و پزشکی ـ آزاد ۸۰)

۱) $2t(1-\sin\omega t)$ ۲) $\frac{2}{t}(1-\cos\omega t)$ ۳) $\frac{2}{t}(1-\sin\omega t)$ ۴) $2t(1-\cos\omega t)$

۶۸ـ تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\frac{3s^2-8s+3}{s^3-4s^2+3s}$ را بدست آورید: (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $e^{3x}+e^x+1$ ۲) $e^{3x}+e^x$ ۳) $e^{3x}-e^x-1$ ۴) $e^{3x}-e^x+1$

۶۹ـ تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\frac{s^3+2s^2+4s+18}{s^4+13s^2+36}$ را بدست آورید: (مهندسی عمران ـ آزاد ۸۰)

۱) $\cos 2x+\sin 3x$ ۲) $\cos 2x-\sin 3x$ ۳) $\sin 2x+\cos 3x$ ۴) $\cos 3x-\sin 2x$

۷۰ـ چنانچه تبدیل لاپلاس $L\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]=\frac{1}{s^n}$ باشد آنگاه $L[1+2x+3x^2]$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{s^2+2s+6}{s^3}$ ۲) $\frac{s^2-2s+6}{s^3}$ ۳) $\frac{s^2+2s-6}{s^3}$ ۴) $\frac{s^2-2s-6}{s^3}$

۷۱ـ چنانچه تبدیل لاپلاس $L[\sin bt]=\frac{b}{s^2+b^2}$ باشد. آنگاه $L[t\sin bt]$ برابر است با: (مهندسی برق ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{2b}{(s^2+b^2)}$ ۲) $\frac{2b}{(s^2+b^2)^2}$ ۳) $\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$ ۴) $\frac{2s}{(s^2+b^2)^2}$

۷۲ـ حاصل انتگرال معین $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx=I$ عبارتست از: (مهندسی برق و مهندسی پزشکی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{6!}{2^7}$ ۲) $\frac{6!}{2^6}$ ۳) $-\frac{6!}{2}$ ۴) $6!$

۷۳ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x\sinh(2x)$ برابر است با: (مهندسی پزشکی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{4s}{(s^2-4)^2}$ ۲) $\frac{-4s}{(s^2-4)^2}$ ۳) $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ ۴) $\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$

۷۴ـ چنانچه در تبدیل لاپلاس $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ و $L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$ باشد، آنگاه $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s}\right]$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$ ۲) $\frac{1}{2}(1+e^{2t})$ ۳) $\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$ ۴) $\frac{1}{2}(1-e^{2t})$

۷۵ـ تبدیل لاپلاس عبارت $\int_0^t \sinh 2x\,dx$ کدام است؟ (مجموعه هوافضا ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{2}{s(s^2-4)}$ ۲) $\frac{2}{s^2-4}$ ۳) $\frac{2}{s(s^2+4)}$ ۴) $\frac{2}{s^2+6}$

۷۶ـ مقدار a را طوری تعیین کنید که $\frac{a(s+1)}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $\sin 2t+4\cos 2t$ باشد.

(مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۱ و ۸۰)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۷ـ تابع تبدیل لاپلاس te^{2t} به شرح ذیل است: (مهندسی محیط زیست ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{s}{(s-2)}$ ۲) $\frac{s}{(s-2)^2}$ ۳) $\frac{2}{(s-2)^2}$ ۴) $\frac{1}{(s-2)^2}$

۷۸ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $y''+4y'+3y=0$ با شرایط $y(0)=3$ و $y'(0)=1$ عبارتست از:

(مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۱)

۱) $L(y)=\frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}$ ۲) $L(y)=\frac{3s}{(s+3)(s+1)}$

۳) $L(y)=\frac{3s+2}{(s+3)(s+1)}$ ۴) $L(y)=\frac{s}{(s+3)(s+1)}$

۷۹ـ تبدیل لاپلاس $L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ و $L[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$ مفروض است. تبدیل معکوس $L^{-1}\left[\frac{4s-3}{s^2+4}\right]$ کدام است؟ (مهندسی برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $2\cos 4t-\frac{3}{2}\sin 2t$ ۲) $4\cos 4t-\frac{3}{2}\sin 2t$ ۳) $4\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t$ ۴) $4\cos 4t+\frac{3}{2}\sin 2t$

۸۰ـ تابع $H(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس آن کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{e^{-as}}{s}$ ۲) e^{-as} ۳) $\frac{e^{-as}}{s^2}$ ۴) $\frac{e^{as}}{s}$

۸۱ـ کدام گزینه جواب معادله زیر با توجه به شرایط داده شده می‌باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۸۱)

$$y''+y=\delta(t-\pi)\cos t\ ;\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

۱) $\cos t+\delta(t-\pi)\cos t$ ۲) $\sin t+\delta(t-\pi)\sin t$

۳) $\cos t+u_\pi(t)\cos t$ ۴) $\sin t+u_\pi(t)\sin t$

۸۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ برابر است با: (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۸۳ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=(t+2)te^t$ کدامیک از عبارت زیر است: (مجموعه نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2s}{(s-1)^3}$ ۲) $\frac{s}{(s-1)^3}$ ۳) $\frac{2}{(s-1)^3}$ ۴) $\frac{2s+2}{(s-1)^3}$

۸۴ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x\le 1\\ x & x>1\end{cases}$ چیست؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2s+e^{-s}-se^{-s}}{s^2}$ ۲) $\frac{2s^2+sc^{-s}-e^{-s}}{s^2}$ ۳) $\frac{2s-e^{-s}+se^{-s}}{s^2}$ ۴) $\frac{2}{s}+\frac{c^{-s}}{s^3}+\frac{e^{-s}}{s}$

۸۵ـ تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}$ برابر است با: (مجموعه نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $t\sin t$ ۲) $\frac{t}{2}\sin t$ ۳) $\frac{t}{2}\cos t$ ۴) $t\cos t$

۸۶ـ اگر $f(t)=\int_0^t (u-t)^2 e^u du$ **، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع** $f(t)$ **کدام است؟** (مهندسی شیمی نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{(s-1)s^4}$ ۲) $\frac{2}{(s+1)s^4}$ ۳) $\frac{2}{(s+1)s^3}$ ۴) $\frac{2}{(s-1)s^3}$

۸۷ـ تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=\int_0^t (t-\lambda)^2 \sin \lambda d\lambda$ **برابر است با:** (مهندسی شیمی نساجی ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{2}{s^3(s^2+1)}$ ۲) $\frac{2}{s^3(s^2-1)}$ ۳) $\frac{1}{s^3(s^2+1)}$ ۴) $\frac{1}{s^3(s^2-1)}$

۸۸ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x dx$ **برابر است با:** (مهندسی هوافضا ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{s^2(s-1)^2}$ ۲) $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ ۳) $\frac{1}{s^2(s+1)}$ ۴) $\frac{1}{s(s-1)^2}$

۸۹ـ تبدیل لاپلاس عبارت $y''+xy'$ **کدام گزینه است؟** (مهندسی صنایع رنگ ـ سراسری ۸۱)

۱) $s^2\frac{dY(s)}{ds}-sY(s)$ ۲) $-s^2\frac{dY(s)}{ds}-sY(s)$ ۳) $-s^2\frac{dY(s)}{ds}+sY(s)$ ۴) $s^2\frac{dY(s)}{ds}+sY(s)$

۹۰ـ اگر $F(s)=Ln\frac{s-2}{s+2}$ **تبدیل لاپلاس تابع با ضابطه** $f(t)$ **باشد،** $f(t)$ **کدام است؟** (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۱)

۱) $f(t)=\frac{4\sinh t}{t}$ ۲) $f(t)=\frac{-2\sinh 2t}{t}$ ۳) $f(t)=\frac{4\cosh t}{t}$ ۴) $f(t)=\frac{-4\cosh t}{t}$

۹۱ـ تبدیل لاپلاس $L[\sin \omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ **و** $L[\cos \omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$ **مفروض است. تبدیل لاپلاس** $L[8\sin^2 3t]$ **کدام است؟** (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{24}{s(s^2+36)}$ ۲) $\frac{72}{s(s^2+36)}$ ۳) $\frac{144}{s(s^2+36)}$ ۴) $\frac{18}{s(s^2+36)}$

۹۲ـ تبدیل لاپلاس $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}, n=0,1,\cdots$ **مفروض است. تبدیل معکوس** $L^{-1}\left[\frac{2s-5}{s^2}\right]$ **کدام است؟** (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) $2-5t$ ۲) $-2-5t$ ۳) $-2+5t$ ۴) $2+5t$

۹۳ـ هرگاه $f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<3\\ 2 & t>3\end{cases}$ **آنگاه تبدیل لاپلاس این تابع برابر است با:** (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{2}{s}e^{-3s}$ ۲) $\frac{2}{s^2}e^{-3s}$ ۳) $2se^{-3s}$ ۴) $\frac{2}{s}e^{+3s}$

۹۴ـ در تبدیل لاپلاس چنانچه $L[\sin \omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ **و** $L[\cos \omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$ **آنگاه** $L[\sin t\cos t]$ **برابر است با:** (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۰) و (مهندسی مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{2}{s^2+4}$ ۲) $\frac{1}{2(s^2+4)}$ ۳) $\frac{1}{s^2+4}$ ۴) $\frac{1}{s^2+3}$

۹۵ـ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $L[f]=\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ **عبارتست از:** (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{\omega}(1-\frac{\sin \omega t}{\omega})$ ۲) $\frac{1}{\omega^2}(t-\frac{\sin \omega t}{\omega})$ ۳) $\frac{1}{\omega^2}(1-\sin \omega t)$ ۴) $\frac{1}{\omega^2}(1-\frac{\sin \omega t}{\omega^2})$

۹۶ـ جواب معادله $y=\int_0^t ydt+1$ **عبارت است از:** (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۱)

۱) $y=e^{2t}$ ۲) $y=e^t$ ۳) $y=t+1$ ۴) $y=e^t+1$

۹۷ـ در ضرب convolution، 1*1 خواهیم داشت: (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۱)

۱) $1*1=\frac{t}{2}$ ۲) $1*1=\frac{t^2}{2}$ ۳) $1*1=\frac{t^3}{3}$ ۴) $1*1=t$

۹۸ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ **به صورت** $\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$ **است.** $f(x)$ **کدام است؟** (مهندسی هسته‌ای ـ آزاد ۸۱)

۱) $xe^{-x}\cos x$ ۲) $xe^{-x}\sin x$ ۳) $xe^x\cos x$ ۴) $xe^x\sin x$

۹۹ـ تبدیل لاپلاس معکوس تابع $\frac{s+3}{s^2+5}$ **در** $t=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **برابر است با:** (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) ۲ ۲) -1 ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۱

۱۰۰ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t dt$ **برابر است با:** (مهندسی هوا و فضا ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۱۰۱ـ تبدیل معکوس لاپلاس $L^{-1}\frac{s-1}{s^2(s+1)}$ **برابر است با:** (مهندسی کشاورزی ـ آزاد ۸۱)

۱) $t+e^{-t}-1$ ۲) $e^{-t}-t+1$ ۳) e^t+t-1 ۴) $2-t-2e^{-t}$

۱۰۲ـ با توجه به تبدیل لاپلاس و کانولوشن جواب معادله انتگرال $y(t)-e^t=\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ **کدام است؟**

(مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $y=\frac{1}{2}e^t$ ۲) $y=1+e^t$ ۳) $y=e^{2t}$ ۴) $y=te^{2t}$

۱۰۳ـ اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ **برابر** $F(s)=\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$ **باشد،** $f(t)$ **کدام است؟** (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۲)

۱) $f(t)=\begin{cases}\cos t & t<\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$ ۲) $f(t)=\begin{cases}0 & t<\pi\\ \cos t & t>\pi\end{cases}$

۳) $f(t)=\begin{cases}\sin t & t<\pi\\ \cos t & t>\pi\end{cases}$ ۴) $f(t)=\begin{cases}-\cos t & t<\pi\\ \sin t & t>\pi\end{cases}$

۱۰۴ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=\begin{cases}t^2 & 0<t<2\\ 6 & t>2\end{cases}$ **را پیدا کنید؟** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

(اشاره: $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$ **)**

۱) $F(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2e^{-2s}}{s^3}-\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}$ ۲) $F(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{e^{-2s}}{s^3}-\frac{2e^{-2s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s}$

۳) $F(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2e^{-2s}}{s^3}$ ۴) $F(s)=-\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s}$

۱۰۵ـ هرگاه $f(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ 2 & t\geq 1 \end{cases}$ **، آنگاه تبدیل لاپلاس این تابع عبارت است از:**

(مهندسی مواد، استخراج معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $F(s)=\frac{1}{s}e^{-s}$

۲) $F(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$

۳) $F(s)=\frac{1}{s}(1+e^{s}+se^{-s})$

۴) $F(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s}+se^{-s})$

۱۰۶ـ تبدیل لاپلاس تابع $\frac{e^t-\cos t}{t}$ **کدام است؟** (مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۲)

۱) $\operatorname{Ln}\frac{s+1}{s-1}$

۲) $\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$

۳) $\operatorname{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}$

۴) $\operatorname{Ln}\frac{s-1}{s+1}$

۱۰۷ـ در تبدیل لاپلاس داریم $L(e^{at})=\frac{1}{s-a}$ **و** $L(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ **. تبدیل معکوس** $L^{-1}(\frac{1}{s^4-2s^3})$ **کدام است؟**

(مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{e^{2t}+1+2t+t^2}{8}$

۲) $\frac{e^{-2t}+1+2t-2t^2}{8}$

۳) $\frac{e^{-2t}-1-2t-2t^2}{8}$

۴) $\frac{e^{2t}-1-2t-2t^2}{8}$

۱۰۸ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر کدام است؟ (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

$$ty''+(3t-1)y'-(4t+4)y=0 \quad ; \quad y(0)=0$$

۱) $Y=\frac{c}{(s-1)^3}$

۲) $Y=\frac{c}{(s+1)^3}$

۳) $Y=c(s-1)^3$

۴) $Y=c(s+1)^3$

۱۰۹ـ فرض کنید $y(t)$ **در مسأله مقدار اولیه** $y(0)=0$ **و** $y'(0)=1$ **و** $y''-ty=0$ **صدق کند. اگر** Y **تبدیل لاپلاس** y **باشد یعنی** $Y(s)=\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt$**، کدام معادله‌ای صدق می‌کند؟** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۲)

۱) $Y'+s^2Y=1$

۲) $Y'+s^2Y=s$

۳) $Y'-s^2Y=s$

۴) $Y'-s^2Y=-s$

۱۱۰ـ در خصوص تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل معمولی $x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+y=0$ **کدام گزینه صحیح است؟**

(مهندسی پلیمر ـ سراسری ۸۲)

۱) از این معادله نمی‌توان تبدیل لاپلاس گرفت.

۲) حاصل یک معادله جبری در فضای s است.

۳) حاصل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول در فضای s است.

۴) حاصل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در فضای s است.

۱۱۱ـ تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است؟ (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۲)

$$y''+y'=3x^2 \quad ; \quad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

۱) $\frac{s+6}{s^2(s+1)}$

۲) $\frac{s^3+6}{s^4(s^2+1)}$

۳) $\frac{s^3+6}{s^4(s+1)}$

۴) $\frac{s^2+6}{s^3(s^2+1)}$

۱۱۲ـ معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{1}{s^2+3s+4}$ **برابر است با:** (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۲)

۱) $e^{-\frac{3}{2}t}\sin\sqrt{7}\,t$

۲) $e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

۳) $\frac{\sqrt{7}}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

۴) $\frac{2}{\sqrt{7}}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$

۱۱۳ـ معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$ **کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{3\sqrt{t}}e^{\frac{t}{9}}$

۲) $\frac{1}{3\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{t}{9}}$

۳) $\frac{1}{3}\sqrt{\pi t}\,e^{-\frac{t}{9}}$

۴) $\frac{1}{3\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{9}}$

۱۱۴ـ فرض کنید $L[f(t)]=F(s)$ **وجود داشته باشد، تعیین کنید تبدیل لاپلاس** $f(\frac{t}{\alpha})$ **کدامیک از عبارات زیر می‌باشد؟** (مهندسی معدن ـ سراسری ۸۲)

۱) $F(\alpha s-\beta)$

۲) $F(\beta s-\alpha)$

۳) $F(\alpha s+\beta)$

۴) $F(\beta s+\alpha)$

۱۱۵ـ اگر $y(t)$ **جواب معادله انتگرالی** $y(t)=2+\int_0^t y(u)e^{t-u}\,du$ **باشد، آنگاه** $y(1)$ **برابر است با:**

(مهندسی مواد ـ آزاد ۸۲)

۱) $1+e^2$

۲) e^2

۳) $1+e^{-2}$

۴) 3

۱۱۶ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt$ **برابر است با:** (مهندسی برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{3!}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) 0

۱۱۷ـ حاصل $\int_0^\infty e^{-3t}\sin^2 2t\,dt$ **برابر است با:** (استخراج معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{3}{75}$

۲) $\frac{21}{75}$

۳) $\frac{8}{75}$

۴) $\frac{12}{49}$

۱۱۸ـ با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب معادله انتگرال زیر کدام است؟ (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۳)

$$y(x)=x^2+\int_0^x y(x-t)\sin t\,dt$$

۱) $y=x^2+\frac{x^4}{12}$

۲) $y=x^2+\frac{x^2}{24}$

۳) $y=x^2-\frac{x^4}{12}$

۴) $y=x^2+x^2\sin x$

۱۱۹ـ اگر $u_c(x)=\begin{cases} 0 & 0\leq x<c \\ 1 & x>c \end{cases}$**، تبدیل معکوس لاپلاس** $\frac{1}{s(1-e^{-s})}$ **چیست؟** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n(x)$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-n)u_n(x)$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-n)u_n(x)$

۱۲۰ـ هرگاه L **بیان‌کننده مقدار لاپلاسین** y **باشد، مقدار** L **برای معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر کدامیک از گزینه‌های زیر است؟** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۳)

$$y''+2\int_0^t y(u)\,du=t\sin t \quad ; \quad y(0)=y'(0)=0$$

۱) $L=\frac{2(s^3+2)s}{s(1+s^2)^2}$

۲) $L=\frac{(1+s^2)^2(s^3+2)}{2s^2}$

۳) $L=\frac{s(1+s^2)^2}{2(s^3+2)s}$

۴) $L=\frac{2s^2}{(1+s^2)^2(s^3+2)}$

۱۲۱ـ کدام گزاره در مورد تابع با ضابطه $f(x)=2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})$ درست است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) f از رتبه نمایی است ولی مطلبی در مورد تبدیل لاپلاس آن نمی‌توان گفت.

۲) f از رتبه نمایی نیست، پس تبدیل لاپلاس آن وجود ندارد.

۳) f از رتبه نمایی است.

۴) f از رتبه نمایی نیست، ولی تبدیل لاپلاس آن وجود دارد.

۱۲۲ـ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=s\tan^{-1}\frac{1}{s}-1$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{t^2}(\cos t+\sin t)$ ۲) $\frac{1}{t^2}(\cos t-\sin t)$ ۳) $\frac{1}{t^2}(t\cos t+\sin t)$ ۴) $\frac{1}{t^2}(t\cos t-\sin t)$

۱۲۳ـ جواب معادله انتگرال ـ دیفرانسیل زیر تحت شرایط اولیه داده شده کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۳)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=e^{2x}-\int_0^x e^{2(x-t)}\frac{du}{dt}dt \quad ; u(0)=0\ ,\ u'(0)=0$$

۱) $u(x)=xe^x-e^x+1$ ۲) $u(x)=xe^{-x}-e^{-x}$

۳) $u(x)=e^x-xe^x-1$ ۴) $u(x)=e^{-x}-xe^{-x}-1$

۱۲۴ـ لاپلاس معکوس $\frac{3s+13}{s^2+4s+3}$ عبارت است از: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) $e^{3t}-4e^{2t}$ ۲) $2e^{3t}-4e^{t}$ ۳) $e^{-3t}-5e^{t}$ ۴) $-2e^{-3t}+5e^{-t}$

۱۲۵ـ جواب معادله انتگرالی $y(t)=2+\int_0^t y'(u)e^{t-u}\,du$ در $t=5$ برابر است با: (مهندسی معدن ـ آزاد ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۴-

۱۲۶ـ تبدیل لاپلاس معکوس $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+6s+13}\right)$ مطابق کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟ (مهندسی پلیمر ـ آزاد ۸۳)

۱) $e^{-3t}\sin 2t$ ۲) $e^{-3t}\sin 3t$ ۳) $e^{-3t}\cos 2t$ ۴) $e^{-2t}\cos 3t$

۱۲۷ـ دستگاه معادلات $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+2y\\ \frac{dy}{dt}=2x+y+1\end{cases}$ را تحت شرایط $y(0)=5$ و $x(0)=0$ حل کنید. (مهندسی ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۳)

۱) $y=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$ ۲) $y=2e^{-t}+\frac{1}{3}e^{3t}$ ۳) $y=e^{-3t}+\frac{1}{8}e^{t}$ ۴) $y=e^{-t}+\frac{1}{8}e^{2t}$

۱۲۸ـ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. (مهندسی ژئوفیزیک ـ آزاد ۸۳)

$$\frac{dx}{dt}=2x+y\ ,\quad \frac{dy}{dt}=x+2y\ ,\quad x(0)=1\ ,\quad y(0)=3$$

۱) $\begin{cases}x=e^{2t}-e^{-t}\\ y=e^{3t}-e^{t}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=e^{2t}-e^{t}\\ y=e^{t}+e^{-t}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=2e^{t}+c\\ y=e^{2t}+1\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=2e^{3t}-e^{t}\\ y=2e^{3t}+e^{t}\end{cases}$

۱۲۹ـ اگر $f(t)=L^{-1}(F(s))=L^{-1}(\frac{1}{s(1+e^{-s})})$ باشد، آنگاه $f(t)$ چه شکل موجی دارد؟

(مجموعه مهندسی برق ـ سراسری ۸۴)

۱) پله کانی ۲) دندانه‌ای اره‌ای

۳) مربعی و بالای محور زمان ۴) مربعی و در بالا و پایین محور زمان

۱۳۰ـ اگر y جواب مسأله زیر باشد:

$$y''+4y=\begin{cases}1 & 0\le t<\pi\\ 0 & \pi\le t<\infty\end{cases}\quad ;\ y(0)=1\ \text{و}\ y'(0)=0$$

و Y تبدیل لاپلاس y باشد، آنگاه $Y(s)$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران ـ سراسری ۸۴)

۱) $Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+4}$ ۲) $Y(s)=\frac{1}{s^2+4}+\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+4}$

۳) $Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1+e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$ ۴) $Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$

۱۳۱ـ با دانستن $\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_\alpha(x))=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$ و $L(J_0(x))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ و $J_0(0)=1$، مقدار $L(J_1(x))$ برابر است با: (مجموعه مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$ ۲) $\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}$ ۳) $\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$ ۴) $\frac{s-\sqrt{s^2+1}}{\sqrt{s^2+1}}$

۱۳۲ـ تبدیل لاپلاس $t\sin 2t+e^{2t}$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی هوا فضا ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{s-2}-\frac{s}{(s^2+4)^2}$ ۲) $\frac{1}{s-2}-\frac{4s}{(s^2+4)^2}$ ۳) $\frac{1}{s-2}+\frac{s}{(s^2+4)^2}$ ۴) $\frac{1}{s-2}+\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

۱۳۳ـ با یادآوری آنکه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cos at$ برابر است با: $F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$، تبدیل لاپلاس $g(t)=t\cos at$ برابر کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{2as}{s^2+a^2}$ ۲) $\frac{s^2-a^2}{s^2+a^2}$ ۳) $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ۴) $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

۱۳۴ـ اگر y جواب مسأله $y''+y=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<\infty\end{cases}$ و $y'(0)=0$ و $y(0)=0$ و تبدیل لاپلاس y باشد، آنگاه $Y(s)$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $Y(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}-\frac{e^{-s}(s+1)}{s(s^2+1)}$ ۲) $Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2(s^2+1)}$

۳) $Y(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{e^{-s}}{s^2+1}$ ۴) $Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{e^{-s}(s+1)}{s(s^2+1)}$

۱۳۵ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx\ ,\ m>0$ برابر با چیست؟ (مجموعه مهندسی عمران (نقشه‌برداری) ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{2}e^{m}$ ۲) $\frac{\pi}{4}e^{m}$ ۳) $\frac{\pi}{2}e^{-m}$ ۴) $\frac{\pi}{4}e^{-m}$

۱۳۶ـ اگر $y(0)=y'(0)=0$ جواب معادله دیفرانسیل $y''+y=u_{2\pi}(x)$ کدام است؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $y(x)=1-\cos x$ ۲) $y(x)=1-\cos^2 x$

۳) $y(x)=(\sin x)\,u_{2\pi}(x)$ ۴) $y(x)=(1-\cos x)\,u_{2\pi}(x)$

۱۳۷ـ مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-6t+x}\cos t\,dt\,dx$ چیست؟ (مجموعه ریاضی ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{26}$ ۲) $-\frac{5}{26}$ ۳) $\frac{1}{286}$ ۴) $\frac{5}{286}$

۱۳۸ـ جواب معادله $y(x) = e^{x}(1 + \int_{0}^{x} e^{-t}\, y(t)\, dt)$ کدام است؟ (مجموعه مهندسی نفت ـ سراسری ۸۴)

۱) e^{-x} ۲) e^{2x} ۳) e^{-2x} ۴) $1 + e^{x}$

۱۳۹ـ مقدار انتگرال زیر کدام است؟ (مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, \frac{\sin x}{x}\, dx$$

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۱۴۰ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_{0}^{t} (t-x)^{4} \cos 3x\, dx$ برابر است با:

(مجموعه مهندسی نساجی (تکنولوژی نساجی) ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{24}{s^{6} + 9s^{4}}$ ۲) $\frac{12}{s^{4} + 9s^{2}}$ ۳) $\frac{24}{9s^{6} + s^{4}}$ ۴) $\frac{24}{9s^{5} + s^{7}}$

۱۴۱ـ تبدیل لاپلاس $L(\cos 2x)$ کدام است؟ (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{2s}{s^{2} - 4}$ ۲) $\frac{2s}{s^{2} + 4}$ ۳) $\frac{s}{s^{2} + 4}$ ۴) $\frac{s}{s^{2} - 4}$

۱۴۲ـ تبدیل لاپلاس $L(\frac{\sin 4x}{4})$ کدام است؟ (مجموعه برق (الکترونیک، قدرت، مخابرات، کنترل) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{4}{s^{2} + 16}$ ۲) $\frac{1}{s^{2} + 16}$ ۳) $\frac{4}{s^{2} - 16}$ ۴) $\frac{1}{s^{2} - 16}$

۱۴۳ـ جواب معادله انتگرال $y(t) = 1 + \int_{0}^{t} y(x)\sin(t-x)\, dx$ برابر است با:

(مهندسی عمران (آب، سازه، سازه‌های هیدرولیکی، مکانیک خاک و پی، مدیریت و ساخت) ـ آزاد ۸۴)

۱) $1 + \frac{1}{2}t^{2}$ ۲) $\delta(t) + \frac{1}{2}t^{2}$ ۳) $1 + t^{2}$ ۴) $t + \frac{1}{2}t^{2}$

۱۴۴ـ جواب معادله انتگرال $\phi(t) = 2 + \int_{0}^{t} e^{t-u}\, \phi(u)\, du$ کدام است؟

(مهندسی عمران (آب، سازه، سازه‌های هیدرولیکی، مکانیک خاک و پی، مدیریت و ساخت) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\phi(t) = e^{2t}$ ۲) $\phi(t) = e^{t}$ ۳) $\phi(t) = 1 + e^{t}$ ۴) $\phi(t) = 1 + e^{2t}$

۱۴۵ـ انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2} + 9}\, dx$

(مهندسی مواد (جوشکاری، خوردگی و حفاظت مواد، سرامیک، شناسایی و انتخاب مواد مهندسی) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{e^{2}}$ ۲) $\frac{\pi}{2e^{2}}$ ۳) $\frac{\pi}{3e^{6}}$ ۴) $\frac{\pi}{3e^{3}}$

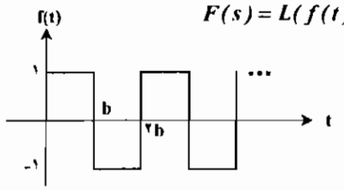
۱۴۶ـ اگر $F(s) = \frac{s^{2} + 2}{s(s+1)(s+2)}$ باشد، $f(t)$ را پیدا کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

۱) $f(t) = 1 - 3e^{t} + 3e^{-2t}$ ۲) $f(t) = 1 - 3e^{t} - 3e^{-t}$

۳) $f(t) = 1 - e^{t} - 2e^{-t}$ ۴) $f(t) = 1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t}$

۱۴۷ـ اگر تابع $f(t)$ به فرم زیر باشد، تابع $F(s)$ را پیدا کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

$$F(s) = L(f(t)) \quad ; \quad f(t) = f(t+2b)$$



۱) $F(s) = \frac{1}{s}\tan h(\frac{bs}{2})$ ۲) $F(s) = \frac{1}{s^{2}}\tan h(\frac{bs^{2}}{2})$

۳) $F(s) = \frac{1}{s}\cot h(\frac{bs}{2})$ ۴) $F(s) = \frac{1}{s}\sin h(\frac{bs}{2})$

۱۴۸ـ انتگرال داده شده را ارزیابی کنید. (مهندسی هوا فضا ـ آزاد ۸۴)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^{4}}\, dx$$

۱) $I = \pi e^{m}$ ۲) $I = \pi e^{-m}$ ۳) $I = 0$ ۴) $I = \pi e^{-im}$

۱۴۹ـ تبدیل لاپلاس $L(\frac{\sin h\, 5x}{5})$ کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{5}{s^{2} - 25}$ ۲) $\frac{1}{s^{2} - 25}$ ۳) $\frac{5}{s^{2} + 25}$ ۴) $\frac{1}{s^{2} + 25}$

۱۵۰ـ تبدیل لاپلاس $L(\frac{x \sin h\, 4x}{4})$ کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{s}{(s^{2} + 4)^{2}}$ ۲) $\frac{4s}{(s^{2} + 4)^{2}}$ ۳) $\frac{4s}{(s^{2} - 4)^{2}}$ ۴) $\frac{s}{(s^{2} - 4)^{2}}$

۱۵۱ـ تبدیل لاپلاس $L(\frac{x \sin 5x}{10})$ کدام است؟ (مهندسی انرژی ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{5s}{(s^{2} + 25)^{2}}$ ۲) $\frac{s}{(s^{2} + 25)^{2}}$ ۳) $\frac{5s}{(s^{2} - 25)^{2}}$ ۴) $\frac{s}{(s^{2} - 25)^{2}}$

۱۵۲ـ $L^{-1}(\frac{s-3}{s^{2} - 6s + 25})$ برابر است با: (مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) $e^{-3t}\sin 4t$ ۲) $e^{-3t}\cos 4t$ ۳) $e^{3t}\cos 4t$ ۴) $e^{3t}\sin 4t$

۱۵۳ـ با یافتن تبدیل لاپلاس $f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < t \end{cases}$ مقدار $\lim_{\varepsilon \to 0} L(f_{\varepsilon}(t))$ برابر است با:

(مهندسی معدن (استخراج و اکتشاف معدن) ـ آزاد ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۱۵۴ـ مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2} + 9}\, dx$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای (پرتو پزشکی و رآکتور) ـ آزاد ۸۴)

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{\pi}{e^{5}}$ ۴) $\frac{\pi}{3e^{6}}$

۱۵۵ـ تبدیل لاپلاس معکوس $L^{-1}\frac{s+1}{s^{3} + s}$ برابر است با: (مهندسی هسته‌ای (پرتو پزشکی و رآکتور) ـ آزاد ۸۴)

۱) $1 - \cos t + \sin t$ ۲) $1 + \cos t + \sin t$ ۳) $1 + \cos t - \sin t$ ۴) $\cos 2t + 1$

۱۵۶ـ هرگاه $y = \delta(x)$ تابع دلتای دیراک باشد، آنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx$ برابر است با:

(مهندسی هسته‌ای (پرتو پزشکی و رآکتور) ـ آزاد ۸۴)

۱) ∞ ۲) ۱- ۳) $-\infty$ ۴) ۱

۱۵۷ـ مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx$. (ژنوفیزیک (کلیه گرایش‌ها) ـ آزاد ۸۴)

۱) $e^{-\omega}$ ۲) $2\pi e^{-\omega^2}$ ۳) $\frac{\pi}{2} e^{\omega}$ ۴) $\pi e^{-\omega}$

۱۵۸ـ اگر $y(0)=1$ **و** $y(t)+2y(t)+\int_0^t y(x)\,dx=0$, $y'(0)=1$ **آنگاه** $y(t)$ **برابر است با:** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^{-t}(1-t)$ ۲) $e^{-t}(1+t)$ ۳) $e^{t}(1-t)$ ۴) $e^{t}(1+t)$

۱۵۹ـ در دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}+x-y=5\sin t \\ 2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}+x-y=e^t \end{cases}$ **با شرایط** $x(0)=0$ **و** $y(0)=0$ **کدام عبارت** $y(t)$ **را بیان می‌کند؟** (مهندسی برق ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^t-5\sin t+2e^{2t}-3$ ۲) $2e^t-5\sin t+e^{2t}-3$

۳) $5\sin t+5\cos t-e^t-e^{2t}$ ۴) $5\sin t-5\cos t+e^t+e^{2t}+3$

۱۶۰ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t$ **کدام یک از توابع زیر است؟** (مهندسی عمران ـ سراسری ۸۵)

۱) $e^{-\frac{s\pi}{2}}$ ۲) $e^{-\pi s}$ ۳) $\frac{s}{s^2+1}$ ۴) $(\sin 1)e^{-s}$

۱۶۱ـ تبدیل لاپلاس $e^{t+1}(\sin t)$ **کدام است؟** (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{e}{(s-1)^2+1}$ ۲) $\frac{c}{(s+1)^2-1}$ ۳) $\frac{e}{(s-1)^2-1}$ ۴) $\frac{e}{(s+1)^2+1}$

۱۶۲ـ تبدیل لاپلاس $\cos(3t+\frac{\pi}{2})$ **کدام است؟** (مهندسی هسته‌ای ـ سراسری ۸۵)

۱) $-\frac{1}{s^2+9}$ ۲) $\frac{1}{s^2+9}$ ۳) $-\frac{3}{s^2+9}$ ۴) $\frac{3}{s^2+9}$

۱۶۳ـ تبدیل معکوس تابع $F(s)$، $F(s)=L[F]=\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2+1}$ **کدام است؟** (مهندسی نفت ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(t)=e^{-(t-\pi)}u_\pi(t)\sin t$ ۲) $f(t)=e^{(t-\pi)}u_\pi(t)\sin(t)$

۳) $f(t)=e^{-(t-\pi)}u_\pi(t)\sin(t-\pi)$ ۴) $f(t)=e^{(t-\pi)}u_\pi(t)\sin(t-\pi)$

۱۶۴ـ اگر $y(t)$ **جواب مسأله با مقدار اولیه:**

$$y''+4y=\begin{cases}1 & ;0\le t<\pi\\ 0 & ;t>\pi\end{cases}$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

و $Y(s)$ **تبدیل لاپلاس** $y(t)$ **باشد،** $Y(s)$ **کدام است؟** (مهندسی مکانیک ـ سراسری ۸۵)

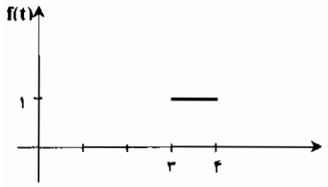
۱) $\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+1}$ ۲) $\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$ ۳) $\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$ ۴) $\frac{1+e^{-2\pi s}}{s^2+4}$

۱۶۵ـ اگر $F(s)=\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ **تبدیل لاپلاس تابع** $f(t)$ **باشد و** $u_a(t)$ **تابع واحد پله‌ای نسبت به نقطه** a **باشد. آنگاه:** (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)

۱) $f(t)=u_2(t)\sinh(t-4)$ ۲) $f(t)=u_2(t)\sinh(t-2)$

۳) $f(t)=u_2(t)\sinh(2t-2)$ ۴) $f(t)=u_2(t)\sinh(2t-4)$

۱۶۶ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ **با نمودار زیر عبارت است از:** (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ سراسری ۸۵)



۱) $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-4s}-e^{-3s})$ ۲) $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-4s}+e^{-3s})$

۳) $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-3s}-e^{-4s})$ ۴) $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-3s}+e^{-4s})$

۱۶۷ـ مقدار تابع که در معادله $f(t)=t+\int_0^t \sin(t-x)f(x)dx$ **صدق می‌کند. کدام است؟** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $t+\frac{t^3}{6}$ ۲) $t-\frac{1}{6}t^3$ ۳) $\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{12}t^4$ ۴) $\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{12}t^4$

۱۶۸ـ تبدیل لاپلاس $2e^x\int_0^x e^{-t}\cos^2 t\,dt$ **عبارت است از:** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{2s^2-4}{2(s-1)(s^2+4)}$ ۲) $\frac{2s^2+4}{s(s-1)(s^2+4)}$ ۳) $\frac{-s^2+4}{s(s-1)(s^2+4)}$ ۴) $\frac{s^2-4}{s(s-1)(s^2+4)}$

۱۶۹ـ معکوس تبدیل لاپلاس $\frac{3s+7}{s^2-2s-3}$ **برابر است با:** (مهندسی نساجی ـ سراسری ۸۵)

۱) $4e^{3t}-e^{t}$ ۲) $4e^{-3t}+e^{-t}$ ۳) $4e^{-3t}-e^{-t}$ ۴) $4e^{3t}-e^{-t}$

۱۷۰ـ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=Arc\cot g(s+4)$ **کدام است؟** (مهندسی معماری کشتی ـ سراسری ۸۵)

۱) $\frac{e^{-4t}\sin t}{t}$ ۲) $e^{-4t}\sin t$ ۳) $\frac{\sin t}{t+4}$ ۴) $e^{-4t}\cot g\, t$

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] \xrightarrow{\frac{1}{s^{n+1}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t^n}{n!}} f(t)=\frac{t^3}{3!}$$

۲ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+25}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(5)^2}\right] \xrightarrow{\frac{1}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{a}\sin at} f(t)=\frac{1}{5}\sin 5t$$

۳ـ گزینه «۴»

$$f(x)=L^{-1}\left[\frac{3}{s+4}\right]=3L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \xrightarrow{\frac{1}{s-a} \xrightarrow{L^{-1}} e^{ax}} f(x)=3e^{-4x}$$

۴ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$2\sin 2t+4\cos 2t=L^{-1}\left[\frac{as+b}{s^2+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{as}{s^2+4}+\frac{b}{s^2+4}\right]=aL^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]+bL^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2^2}\right]$$

$$\left(\frac{s}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \cos at\right)\&\left(\frac{1}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{a}\sin at\right) \Rightarrow 2\sin 2t+4\cos 2t=a\cos 2t+\frac{b}{2}\sin 2t \Rightarrow a=4\ \&\ b=4$$

۵ـ گزینه «۱»

$$\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]\big|_{s=s} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-2t}\sin 2t\,dt=(L[\sin 2t])\big|_{s=2}=\frac{2}{s^2+4}\Big|_{s=2}=\frac{2}{13}$$

۶ـ گزینه «۲»

$$I=\int_0^\infty e^{-sx}(x\cos\beta x)dx \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]} I=L[x\cos\beta x]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} I=-(L[\cos\beta x])'=-\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)'=\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

۷ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^{1/2}}\right]$$

$$\frac{1}{s^{\alpha+1}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \Rightarrow f(t)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} f(t)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

۸ـ گزینه «۴»

$$\varphi(t)=2+\int_0^t e^{t-u}\varphi(u)du \Rightarrow \Phi(s)=L[\varphi(t)]=L[2+\int_0^t e^{t-u}\varphi(u)du]=L[2]+L[\int_0^t e^{t-u}\varphi(u)\,du]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} \Phi(s)=L[2]+L[e^t*\varphi(t)] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} \Phi(s)=2L[1]+L[e^t]L[\varphi(t)] \Rightarrow$$

$$\Phi(s)=2\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}\Phi(s) \Rightarrow (1-\frac{1}{s-1})\Phi(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow \frac{s-2}{s-1}\Phi(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow \Phi(s)=\frac{2(s-1)}{s(s-2)} \Rightarrow$$

$$\varphi(t)=L^{-1}[\Phi(s)]=L^{-1}\left[\frac{2s-2}{s(s-2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{s+(s-2)}{s(s-2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s}\right] \Rightarrow \varphi(t)=e^{2t}+1$$

۹ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-1}(\frac{1}{s^2+3s+\frac{13}{4}})=L^{-1}(\frac{1}{s^2+3s+\frac{9}{4}+1})=L^{-1}(\frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+1})$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^{-\frac{3}{2}t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=e^{-\frac{3}{2}t}\sin t$$

۱۰ـ گزینه «۳»

$$y(t)=1+\int_0^t y(x)\sin(t-x)dx \Rightarrow Y(s)=L[y(t)]=L[1]+L[\int_0^t y(x)\sin(t-x)dx]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} Y(s)=L[1]+L[y(t)*\sin t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} Y(s)=\frac{1}{s}+L[y(t)]L[\sin t] \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}+Y(s)\cdot\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow (1-\frac{1}{s^2+1})Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow (1-\frac{1}{s^2+1})Y(s)=\frac{1}{s}\frac{s^2}{s^2+1}\cdot Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1+s^2}{s^3}=\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s} \Rightarrow y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \Rightarrow y(t)=\frac{t^2}{2!}+1$$

۱۱ـ گزینه «۲»

$$F(p)=L\left[\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] \xrightarrow{2\sin\sqrt{x} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}} F(p)=L[(2\sin\sqrt{x})']=2L[(\sin\sqrt{x})']$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} F(p)=2(pL[\sin\sqrt{x}]-\sin\sqrt{0})=2pL[\sin\sqrt{x}]$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض مسأله}} F(p)=2p(\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}) \Rightarrow F(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{4p}}$$

۱۲ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}\left[\text{Arccotag}\,\frac{s}{\omega}\right]\xrightarrow{L^{-1}[f]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']}f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[(\text{Arccotg}\,\frac{s}{\omega})'\right]\Rightarrow$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{\omega}}{1+(\frac{s}{\omega})^2}\right]=\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]\Rightarrow f(t)=\frac{1}{t}\sin\omega t$$

۱۳ـ گزینه «۴» حل اول:

$$F(s)=L[e^t t]\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=L[t]\big|_{s\mapsto s-1}=\frac{1}{s^2}\Big|_{s\mapsto s-1}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

حل دوم:

$$F(s)=L[t.e^t]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}F(s)=-(L[e^t])'=-(\frac{1}{s-1})'\Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

۱۴ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[e^t\sin t]\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=L[\sin t]\Big|_{s\mapsto s-1}=\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s\mapsto s-1}\Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

۱۵ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right]=L^{-1}\left[\frac{3s+3-1}{s^2+2s+1+9}\right]=L^{-1}\left[\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+9}\right]\Rightarrow$$

$$f(t)=3L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3^2}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمولهای ارائه شده به ازاء }(a=-1\ \&\ b=3)}f(t)=3e^{-t}\cos 3t-\frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

۱۶ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right]=L^{-1}\left(\frac{-\frac{4}{3}}{s-2}+\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}+\frac{\frac{7}{2}}{s-3}\right)\Rightarrow$$

$$f(t)=-\frac{4}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{7}{2}\left[\frac{1}{s-3}\right]\xrightarrow{\frac{1}{s-a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{at}}f(t)=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

یادآوری. با توجه به روش تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}=\frac{A(s+1)(s-3)+B(s-2)(s-3)+C(s-2)(s+1)}{(s-2)(s+1)(s-3)}\Rightarrow$$

$$\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}=\frac{(A+B+C)s^2-(2A+5B+C)s+(-3A+6B-2C)}{(s-2)(s+1)(s-3)}\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=2\\2A+5B+C=0\\-3A+6B-2C=-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$A=-\frac{4}{3}\ \&\ B=-\frac{1}{6}\ \&\ C=\frac{7}{2}$$

۱۷ـ گزینه «۳»

$$u(t)=\cos bt+c\int_0^t u(t-z)e^{-cz}dz\Rightarrow U(s)=L[u(t)]=L[\cos bt]+cL[\int_0^t u(t-z)e^{-cz}dz]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g}U(s)=L[u(t)]=L[\cos bt]+cL[u(t)*e^{-ct}]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]*L[g]}U(s)=\frac{s}{s^2+b^2}+cL[u(t)]L[e^{-ct}]\Rightarrow U(s)=\frac{s}{s^2+b^2}+cU(s)\frac{1}{s+c}\Rightarrow$$

$$(1-\frac{c}{s+c})U(s)=\frac{s}{s^2+b^2}=\frac{s}{s+c}\cdot U(s)\Rightarrow U(s)=\frac{s+c}{s^2+b^2}\Rightarrow$$

$$u(t)=L^{-1}[U(s)]=L^{-1}\left[\frac{s+c}{s^2+b^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]+cL^{-1}\left[\frac{1}{s^2+b^2}\right]\Rightarrow u(t)=\cos bt+c\frac{1}{b}\sin bt$$

۱۸ـ گزینه «۲»

$$z''+z'-2z=0\Rightarrow L[z'']+L[z']-2L[z]=0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{n-1}(0)}(s^2L[z]-sz(0)-z'(0))+(sL[z]-z(0))-2L[z]=0$$

$$\xrightarrow{z(0)=4\ \&\ z'(0)=1}s^2L[z]-4s-1+sL[z]-4-2L[z]=0\Rightarrow(s^2+s-2)L[z]=4s+5\Rightarrow$$

$$L[z]=\frac{4s+5}{s^2+s-2}\Rightarrow z=L^{-1}\left[\frac{4s+5}{s^2+s-2}\right]\Rightarrow z=L^{-1}\left[\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+2}\right]\Rightarrow$$

$$z=L^{-1}\left[\frac{4s+5}{(s-1)(s-2)}\right]3L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Rightarrow z=3e^x+e^{-2x}$$

۱۹ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx}1*g(t)=\int_0^t 1\times g(x)dx=\int_0^t xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^t=\frac{t^2}{2}$$

۲۰ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{L[f]=\int_0^\infty e^{-st}f\,dt}L[e^{iat}]=\int_0^\infty e^{-st}e^{iat}dt=\int_0^\infty e^{-(s-ia)t}dt\Rightarrow L[e^{iat}]=-\frac{1}{s-ia}e^{-(s-ia)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s-ia}$$

۲۱ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{8-6s}{16s^2+9}\right]=L^{-1}\left[\frac{8-6s}{16(s^2+(\frac{3}{4})^2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{2(s^2+(\frac{3}{4})^2)}-\frac{3s}{8(s^2+(\frac{3}{4})^2)}\right]\Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\frac{3}{4})^2}\right]-\frac{3}{8}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\frac{3}{4})^2}\right]\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\sin\frac{3}{4}t-\frac{3}{8}\cos\frac{3}{4}t\Rightarrow f(0)=-\frac{3}{8}$$

۲۲ـ گزینه «۲»

$$I=\int_0^{\infty}e^{-2t}\sin t\cos t\,dt=\int_0^{\infty}e^{-2t}(\sin t\cos t)dt\xrightarrow{\int_0^{\infty}e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}}I=L[\sin t\cos t]\Big|_{s=2}$$

$$\xrightarrow{2\sin t\cos t=\sin 2t}I=L\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]\Big|_{s=2}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s=2}=\frac{1}{13}$$

۲۳ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{4-5s}{s^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{4}{s^2}-\frac{5s}{s^2}\right]=4L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-5L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}f(t)=4\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}-5\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\xrightarrow{\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \&\ \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}f(t)=4\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}-5\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{8t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

۲۴ـ گزینه «۱»

$$I=\int_0^{\infty}te^{-4t}\cos 2t\,dt=\int_0^{\infty}e^{-4t}(t\cos 2t)dt\xrightarrow{\int_0^{\infty}e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}}I=L[t\cos 2t]\Big|_{s=4}$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}I=-\left(L[\cos 2t]\right)'\Big|_{s=4}=-\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\Big|_{s=4}=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\Big|_{s=4}=\frac{3}{100}$$

۲۵ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[2e^{-2t}\sin 2t]=2L[e^{-2t}\sin 2t]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=2L[\sin 2t]\Big|_{s\mapsto s+2}=2\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s\mapsto s+2}\Rightarrow F(s)=\frac{4}{(s+2)^2+4}$$

۲۶ـ گزینه «۱» با توجه به تعریف $\delta(x-\pi)=\begin{cases}\infty & ;\ x=\pi\\ 0 & ;\ x\neq\pi\end{cases}$ می‌توان انتگرال مفروض را بصورت زیر گسترش داد:

$$I=\int_0^{2\pi}\sin x e^{2ix}\frac{x^2}{x-1}\delta(x-\pi)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sin x e^{2ix}\frac{x^2}{x-1}\delta(x-\pi)dx\Rightarrow I=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\pi)(\sin x e^{2ix}\frac{x^2}{x-1})dx$$

$$\xrightarrow{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)g(t)dt=g(a)}I=(\sin x e^{2ix}\frac{x^2}{x-1})\Big|_{x=\pi}\xrightarrow{\sin\pi=0}I=0$$

۲۷ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)}f(t)=(u_0(t)-u_2(t))\times t+u_2(t)\times 2\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[t.(u_0(t)-u_2(t))]+L[2u_2(t)]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}F(s)=-(L[u_0(t)-u_2(t)])'+2L[u_2(t)]\xrightarrow{u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as}}F(s)=-(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s})'+\frac{2}{s}e^{-2s}$$

$$F(s)=-(-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}e^{-2s}+\frac{2}{s}e^{-2s})+\frac{2}{s}e^{-2s}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{2}{s}e^{-2s}\Rightarrow F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

۲۸ـ گزینه «۲»

$$L[g(t)]=L[t^2\sin t]\xrightarrow{L[t^2f]=(L[f])''}L[g(t)]=(L[\sin t])''=(\frac{1}{s^2+1})''\Rightarrow L[g(t)]=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

۲۹ـ گزینه «۱»

$$y''-2y'+y=xe^x+4\Rightarrow L[y'']-2L[y']+L[y]=L[xe^x]+4L[1]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)}s^2Y-sy(0)-y'(0)-2(sY-y(0))+Y=L[e^x.x]+4(\frac{1}{s})\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=1\ \&\ L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}s^2Y-s-1-2sY+2+Y=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{4}{s}\Rightarrow$$

$$(s^2-2s+1)Y-s+1=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{4}{s}\Rightarrow(s-1)^2Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{4}{s}+(s-1)\Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^4}+\frac{4}{s(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}\Rightarrow y(x)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]+4L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]\Rightarrow$$

$$y(x)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]+4L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right]+e^x$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}y(x)=e^xL^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]+4(1-e^x+e^xL^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right])+e^x\Rightarrow$$

$$y(x)=e^x.\frac{x^3}{3!}+4-4e^x+4e^x.x+e^x\Rightarrow y(x)=\frac{1}{6}x^3e^x-3e^x+4xe^x+4$$

یادآوری.

$$\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}=\frac{A(s-1)^2+Bs(s-1)+Cs}{s(s-1)^2}\Rightarrow$$

$$1=A(s-1)^2+Bs(s-1)+Cs\Rightarrow\begin{cases}s=0\ ; & 1=A+0+0\Rightarrow A=1\\ s=1\ ; & 1=0+0+C\Rightarrow C=1\\ s=2\ ; & 1=A+2B+2C\Rightarrow B=-1\end{cases}$$

۳۰ـ گزینه «۱» برای نوشتن تابع $f(t)$ برحسب توابع وی ساید، باید توجه داشت در فاصله $0 < t < 1$، $f(t)$ در واقع خط واصل نقاط $(0,3)$ و $(1,4)$ و در بقیه بازه‌ها مقداری ثابت است. به عبارت دیگر؛

$$f(t)=\begin{cases} t+3 & 0<t<1 \\ 4 & 1<t<2 \\ 2 & 2<t<3 \\ 3 & 3<t \end{cases}$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع برحسب}} f(t)=(t+3)+u_1(t)(4-(t+3))+u_2(t)(2-4)+u_3(t)(3-2) \Rightarrow$$

$$f(t)=t+3+u_1(t)(1-t)-2u_2(t)+u_3(t) \Rightarrow$$

$$F(s)=L[f(t)]=L[t]+3L[1]+L[u_1(t)(1-t)]-2L[u_2(t)]+L[u_3(t)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=\frac{1}{s^2}+3\frac{1}{s}+e^{-s}L[1-(t+1)]-2\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s} \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}+e^{-s}\times-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-3s} \Rightarrow F(s)=\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{2e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}$$

۳۱ـ گزینه «۴»

$$f(x)=L^{-1}\left[\operatorname{Ln}\frac{p+1}{p+3}\right]=L^{-1}\left[\operatorname{Ln}(p+1)-\operatorname{Ln}(p+3)\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']} f(x)=-\frac{1}{x}L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+3}\right]=-\frac{1}{x}(e^{-x}-e^{-3x}) \Rightarrow f(x)=\frac{e^{-3x}-e^{-x}}{x}$$

۳۲ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع بر حسب}} f(t)=\big(u_0(t)-u_2(t)\big)\times 2t+u_2(t)\times t^2=2t+u_2(t)\cdot(t^2-2t) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{u_0(t)=1} F(s)=L[f(t)]=2L[t]+L[u_2(t)(t^2-2t)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=\frac{2}{s^2}+e^{-2s}L[(t+2)^2-2(t+2)]=\frac{2}{s^2}+e^{-2s}L[t^2+4t+2] \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{2}{s^2}+e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

۳۳ـ گزینه «۱»

$$y''+2y'+2y=\delta(t-\tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow L[y'']+2L[y']+2L[y]=L[\delta(t-\tfrac{\pi}{2})]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+2(sY(s)-y(0))+2Y=L[\delta(t-\tfrac{\pi}{2})]$$

$$\xrightarrow{(y(0)=y'(0)=0)\ \&\ (\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as})} s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=e^{-\frac{\pi}{2}s} \Rightarrow (s^2+2s+2)Y(s)=e^{-\frac{\pi}{2}s} \Rightarrow$$

$$Y(s)=e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1} \Rightarrow y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} y(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]\Big|_{t\mapsto t-\frac{\pi}{2}}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}} y(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left(e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]\right)\Big|_{t\mapsto t-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow y(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin(t-\frac{\pi}{2})$$

$$\xrightarrow{\sin(t-\frac{\pi}{2})=-\cos t} y(t)=-u_{\frac{\pi}{2}}(t)e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\cos t$$

۳۴ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L[\delta'(t-2)] \xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} F(s)=sL[\delta(t-2)]-\delta(0-2)$$

$$\xrightarrow{t\neq a \Rightarrow \delta(t-a)=0} F(s)=sL[\delta(t-2)] \xrightarrow{\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}} F(s)=se^{-2s}$$

۳۵ـ گزینه «۴» حل اول:

$$F(s)=L[x^3.e^{4x}] \xrightarrow{L[x^nf]=(-1)^n(L[f])^n} F(s)=-(L[e^{4x}])'''=-(\frac{1}{s^2+1})'''=\frac{6}{(s-4)^4}$$

حل دوم:

$$F(s)=L[x^3e^{4x}]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s)=L[x^3]\big|_{s\mapsto s-4}=\frac{3!}{s^4}\Big|_{s\mapsto s-4} \Rightarrow F(s)=\frac{6}{(s-4)^4}$$

۳۶ـ گزینه «۴»

$$I=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=(L[f])|_{s=s}} I=L\left[\frac{\sin\alpha x}{x}\right]\Big|_{s=1} \quad ;(1)$$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha<\infty$ می‌باشد، داریم:

$$L[\tfrac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]ds \quad L\left[\frac{\sin\alpha x}{x}\right]=\int_s^\infty L[\sin\alpha x]ds=\int_s^\infty\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}ds=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{Arctg}\frac{s}{\alpha}\right)\Big|_s^\infty \Rightarrow$$

$$L\left[\frac{\sin\alpha x}{x}\right]=\operatorname{Arctg}\infty-\operatorname{Arctg}\frac{s}{a} \Rightarrow L\left[\frac{\sin\alpha x}{x}\right]=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{s}{\alpha}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}} I=L\left[\frac{\sin\alpha x}{x}\right]\Big|_{s=1}=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{s}{\alpha}\right)\Big|_{s=1}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\frac{1}{\alpha}=\operatorname{Arctg}\alpha$$

یادآوری.

$$\begin{cases}\text{Arctg}\alpha+\text{Arccotg}\,\alpha=\dfrac{\pi}{2}\\ \text{Arctg}\dfrac{1}{\alpha}=\text{Arccotg}\,\alpha\end{cases}\Rightarrow \frac{\pi}{2}-\text{Arctg}\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{2}-\text{Arccotg}\,\alpha=\text{Arctag}\alpha$$

۳۷ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[e^{3t}.t^2]\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=L[t^2]\Big|_{s\mapsto s-3}=\frac{2}{s^3}\Big|_{s\mapsto s-3}\Rightarrow F(s)=\frac{2}{(s-3)^3}$$

۳۸ـ گزینه «۱»

$$y(t)=\int_0^t y(u)\sin(t-u)du\Rightarrow Y(s)=L[y(t)]=L[\int_0^t y(u)\sin(t-u)du]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-u)dx=f*g}Y(s)=L[y(t)*\sin t]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}Y(s)=L[y(t)]L[\sin t]\Rightarrow$$

$$Y(s)=Y(s)(\frac{1}{s^2+1})\Rightarrow(1-\frac{1}{s^2+1})Y(s)=0\Rightarrow Y(s)=0\Rightarrow y(t)=L^{-1}[Y(s)]=0$$

۳۹ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+3}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2-1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]=e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})\right]\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{s-a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{at}}f(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}(e^t-e^{-t})=\frac{e^{-1}-e^{-3t}}{2}$$

۴۰ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع بر حسب}}f(t)=\big(u_0(t)-u_\pi(t)\big)\times\sin t+u_\pi(t)\times t\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{u_0(t)=1}F(s)=L[f(t)]=L[\sin t-u_\pi(t)\sin t+u_\pi(t)t]=L[\sin t]-L[u_\pi(t)(\sin t-t)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f(t)]=e^{-as}L[f(t+a)]}F(s)=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}L[\sin(t+\pi)-(t+\pi)]\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}-e^{-\pi s}L[-\sin t-(t+\pi)]=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}(L[\sin t]+L[t]+\pi L[1])\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}(\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}+\pi\frac{1}{s})$$

۴۱ـ گزینه «۱»

$$\ddot{x}+5\dot{x}+4x=3+2\delta(t)\Rightarrow L[\ddot{x}]+5L[\dot{x}]+4L[x]=L[3]+2L[\delta(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)}(s^2X(s)-sx(0)-x'(0))+5(sX(s)-x(0))+4X(s)=\frac{3}{s}+2L[\delta(t)]$$

$$\xrightarrow{(x(0)=x'(0)=0)\ \&\ (\delta(t)\xrightarrow{L}1)}s^2X(s)+5sX(s)+4X(s)=\frac{3}{s}+2\Rightarrow X(s)=\frac{3}{s(s+1)(s+4)}+\frac{2}{(s+1)(s+4)}\Rightarrow$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{3}{s(s+1)(s+4)}+\frac{2}{(s+1)(s+4)}\right]\Rightarrow x(t)=L^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{1}{4}}{s+4}+\frac{\frac{2}{3}}{s+1}-\frac{\frac{2}{3}}{s+4}\right)\Rightarrow$$

$$x(t)=\frac{3}{4}-e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-4t}+\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}\Rightarrow x(t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{5}{12}e^{-4t}$$

۴۲ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4^2}\right]\xrightarrow{\frac{1}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{a}\sin at}f(t)=\frac{1}{4}\sin 4t$$

۴۳ـ گزینه «۱» حل اول:

$$f(x)=L^{-1}\left[\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s^2+2s+1-1}{(s^2+2s+1+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+1)^2-1}{((s+1)^2+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(x)=e^{-x}L^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right]\quad;(1)$$

در اینصورت با توجه به حضور تابع e^{-x}، تنها گزینه‌های (۱) و (۲) می‌توانند صحیح باشند. اکنون برای انتخاب گزینه صحیح از بین گزینه‌های (۱) و (۲)، با توجه به تساوی $L[tf(t)]=-(L[f(t)])'$ بدست می‌آوریم:

$$I_1)\ L[x\sin x]=-(L[\sin x])'=-(\frac{1}{s^2+1})'=\frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$I_2)\ L[x\cos x]=-(L[\cos x])'=-(\frac{s}{s^2+1})'=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

در نتیجه با توجه به تساوی (۱) گزینه «۱» صحیح است.

حل دوم: به تست شماره ۹۸ مراجعه شود.

۴۴ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L\left[\frac{-3}{\sqrt{t}}\right]=-3L[t^{-\frac{1}{2}}]$$

$$\xrightarrow{t^\alpha\xrightarrow{L}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}}F(s)=-3\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}}F(s)=-3\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=-3\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

۴۵ـ گزینه «۲»

$$F(s)=L[t^{2}\sin 2t]\xrightarrow{L[t^{n}f]=(-1)^{n}(L[f])^{(n)}\ ;n=2}F(s)=(-1)^{2}(L[\sin 2t])''\ \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^{2}+a^{2}}}F(s)=(\frac{2}{s^{2}+4})''=\frac{12s^{2}-16}{(s^{2}+4)^{3}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۶ـ گزینه «۴»

$$y''+y=f(x)\ \Rightarrow\ L[y'']+L[y]=L[f(x)]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^{2}L[f]-sf(0)-f'(0)}(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0))+Y(s)=L[f(x)]$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0}s^{2}Y(s)+Y(s)=L[f(x)]\ \Rightarrow\ (s^{2}+1)Y(s)=[f(x)]\ \Rightarrow\ Y(s)=L[f(x)]\cdot\frac{1}{s^{2}+1}\ \Rightarrow$$

$$y(x)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[L[f(x)].\frac{1}{s^{2}+1}\right]\xrightarrow{L^{-1}[F\cdot G]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]}y(x)=L^{-1}\left[L[f(x)]\right]*L^{-1}\left[\frac{1}{s^{2}+1}\right]\ \Rightarrow$$

$$y(x)=f(x)*\sin x\xrightarrow{f*g=\int_{0}^{t}f(t)g(t-x)dx}y(x)=\int_{0}^{x}f(t)\sin(x-t)dt$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۷ـ گزینه «۲»

$$y''+y=\delta(t-2\pi)\cos t\ \Rightarrow\ L[y'']+L[y]=L[\delta(t-2\pi)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^{2}L[f]-sf(0)-f'(0)}(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0))+Y(s)=L[\delta(t-2\pi)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)\ \&\ (y(0)=0\ :\ y'(0)=1)}s^{2}Y(s)-1+Y(s)=e^{-2\pi s}\cos 2\pi$$

$$\xrightarrow{\cos 2\pi=1}(s^{2}+1)Y(s)-1=e^{-2\pi s}\ \Rightarrow\ Y(s)=\frac{1+e^{-2\pi s}}{s^{2}+1}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۸ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}L[xy'']=-\left(L[y'']\right)'$$

$$\xrightarrow{L[y'']=s^{2}L[y]-sy(0)-y'(0)}L[xy'']=-(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0))'\ \Rightarrow$$

$$L[xy'']=-(2s\times Y(s)+s^{2}\times\frac{dY}{ds}-y(0))\ \Rightarrow\ L[xy'']=-2sY-s^{2}\frac{dY}{ds}+y(0)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴۹ـ گزینه «۴» تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2$ است، که در یک دوره تناوب $[0,2]$ ضابطه آن عبارتست از:

$$f(t)=\begin{cases}a & ;\ 0\le t<1\\ 0 & ;\ 1\le t<2\end{cases}$$

در اینصورت؛

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب، }T=2}L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_{0}^{2}e^{-st}f(t)dt\qquad ;(1)$$

بنابراین ابتدا به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_{0}^{2}e^{-st}f(t)dt=\int_{0}^{1}e^{-st}f(t)dt+\int_{1}^{2}e^{-st}f(t)dt$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع }f(t)}J=\int_{0}^{1}e^{-st}\times a\,dt=a\int_{0}^{1}e^{-st}dt\ \Rightarrow\ J=a(\frac{-1}{s}e^{-st})\Big|_{0}^{1}\ \Rightarrow\ J=\frac{a(1-e^{-s})}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}}L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{a(1-e^{-s})}{s}=\frac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\cdot\frac{a(1-e^{-s})}{s}\ \Rightarrow\ L[f(t)]=\frac{a}{s(1+e^{-s})}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۰ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L\left[\frac{x}{2a}\sin ax\right]=\frac{1}{2a}L[x\sin ax]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}F(s)=\frac{1}{2a}(-L[\sin ax])'=\frac{-1}{2a}(\frac{a}{s^{2}+a^{2}})'\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{s}{(s^{2}+a^{2})^{2}}$$

با جایگذاری $s\mapsto p$ گزینه (۱) صحیح است.

◆ ◆ ◆ ◆

۵۱ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[t^{2}.e^{-3t}]\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول مطرح شده به ازاء }n=2;}F(s)=(-1)^{2}(L[e^{-3t}])''=(\frac{1}{s+3})''=\frac{2}{(s+3)^{3}}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۲ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب }u_a(t)}f(t)=\big(u_0(t)-u_2(t)\big)\times 1+u_2(t)\times t\ \Rightarrow$$

$$F(s)=L[f(t)]=L[u_0(t)-u_2(t)+tu_2(t)]=L[u_0(t)]-L[u_2(t)]+L[tu_2(t)]$$

$$\xrightarrow{(u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as})\ \&\ (L[tf]=-(L[f])')}F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}-(\frac{1}{s}e^{-2s})'\ \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}-(\frac{-1}{s^{2}}\times e^{-2s}+\frac{-2}{s}\times e^{-2s})\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-2s}+\frac{1}{s^{2}}e^{-2s}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۳ـ گزینه «۱»

$$y''=1\ \Rightarrow\ L[y'']+L[y]=L[1]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^{2}L[f]-sf(0)-f'(0)}(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0))+Y(s)=\frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=0}s^{2}Y(s)-s+Y(s)=\frac{1}{s}\ \Rightarrow\ (s^{2}+1)Y(s)=\frac{1}{s}+s=\frac{1+s^{2}}{s}\ \Rightarrow\ Y(s)=\frac{1}{s}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵۴ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$f(t)=\begin{cases}1 & 1\le t\le 2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع برحسب }u_a(t)}f(t)=(u_1(t)-u_2(t))\times(1)+0\ \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=L[u_1(t)-u_2(t)]\ \Rightarrow\ L[f(t)]=\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}\qquad ;(1)$$

در اینصورت؛

$$y'(t)+2y(t)=f(t) \Rightarrow L[y'(t)]+2L[y(t)]=L[f(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)} (sL[y]-y(0))+2L[y]=L[f(t)]$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \text{ و با توجه به تساوی (1)}} sL[y]-1+2L[y]=\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s}) \Rightarrow (s+2)L[y]=\frac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})+1 \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s(s+2)}+\frac{1}{s+2}$$

۵۵ـ گزینه «۴»

$$h(t)=\int_0^t (t-\lambda)^4\cos\lambda\, d\lambda \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} h(t)=t^4*\cos t \Rightarrow$$

$$H(s)=L[h(t)]=L[t^4*\cos t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} H(s)=L[t^4]L[\cos t] \Rightarrow H(s)=\frac{4!}{s^5}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

۵۶ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2e^{-2s}}{s^2+4}\right]=2L^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s^2+4}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]\big|_{t\mapsto t-a}} f(t)=(u_2(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2^2}\right]\Big|_{t\mapsto t-2})$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{a}\sin at} f(t)=2u_2(t)(\frac{1}{2}\sin 2t\big|_{t\mapsto t-2})=u_2(t)\sin 2(t-2) \Rightarrow f(t)=u_2(t)\sin(2t-4)$$

۵۷ـ گزینه «۲» از آنجائیکه $\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 2t}{t}=2$ موجود و متناهی است، در نتیجه داریم:

$$\xrightarrow{L\left[\frac{f}{t}\right]=\int_s^\infty L[f]ds} L\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]=\int_s^\infty L[\sin 2t]ds=\int_s^\infty \frac{2}{s^2+2^2}ds \Rightarrow$$

$$L\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]=2\left(\frac{1}{2}\text{Arctg}\frac{s}{2}\right)\Big|_s^\infty=\text{Arctag}\infty-\text{Arctag}\frac{s}{2}=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{s}{2}$$

۵۸ـ گزینه «۱»

$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[e^{-4s}(\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s})\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]\big|_{t\mapsto t-a}} g(t)=u_4(t)L^{-1}\left[\frac{2}{s^2}+\frac{5}{s}\right]\Big|_{t\mapsto t-4}=u_4(t)(2L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+5L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right])\Big|_{t\mapsto t-4} \Rightarrow$$

$$g(t)=u_4(t)(2t+5)\Big|_{t\mapsto t-4} \Rightarrow g(t)=u_4(t)(2t-3)$$

با توجه به تعریف $u_a(t)=\begin{cases}0 & ;0<t<a\\ 1 & ;\ t>a\end{cases}$ می‌توان تابع $g(t)$ حاصل را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$u_a(t)=\begin{cases}0 & ;0<t<4\\ 2t-3 & ;\ t>4\end{cases}$$

۵۹ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=\big(u_0(t)-u_3(t)\big)\times 0+u_3(t)\times 2=2u_3(t) \Rightarrow$$

$$F(s)=L[f(t)]=L[2u_3(t)]=2L[u_3(t)] \xrightarrow{u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as}} F(s)=\frac{2}{s}e^{-3s}$$

۶۰ـ گزینه «۲»

$$\xrightarrow{\text{تبدیل لاپلاس تابع متناوب با } T=2\pi} L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi}e^{-sx}f(x)dx \quad ;(1)$$

در اینصورت ابتدا با توجه به ضابطه $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ -\sin x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$ به محاسبه انتگرال فوق می‌پردازیم:

$$J=\int_0^{2\pi}e^{-sx}f(x)dx=\int_0^{\pi}e^{-sx}f(x)dx+\int_\pi^{2\pi}e^{-sx}f(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع } f(t)} J=0+\int_\pi^{2\pi}e^{-sx}\times-\sin x\,dx \Rightarrow J=-\int_\pi^{2\pi}\underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{e^{-sx}dx}_{dv} \quad ;(2)$$

$$\begin{cases}du=\cos x dx\\ v=-\frac{1}{s}e^{-sx}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=uv-\int vdu} J=(\sin x\frac{e^{-sx}}{s})\Big|_\pi^{2\pi}-\frac{1}{s}\int_\pi^{2\pi}\cos x e^{-sx}dx \xrightarrow{\sin k\pi=0\ ;k\in Z} J=-\frac{1}{s}\int_\pi^{2\pi}\underbrace{\cos x}_{u}\underbrace{e^{-sx}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases}du=-\sin x dx\\ v=-\frac{1}{s}e^{-sx}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int uv=uv-\int vdu} J=-\frac{1}{s}\Big((\cos x\frac{-e^{-sx}}{s})\Big|_\pi^{2\pi}+\frac{1}{s}\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)e^{-sx}dx\Big)$$

$$J=\frac{1}{s^2}(e^{-sx}\cos x)\Big|_\pi^{2\pi}-\frac{1}{s}\int_\pi^{2\pi}(-\sin x)e^{-sx}dx \Rightarrow J=\frac{1}{s^2}(e^{-2\pi s}+e^{-\pi s})-\frac{1}{s^2}(-\int_\pi^{2\pi}\sin x e^{-sx}dx)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به تساوی (2)}} J=\frac{1}{s^2}(e^{-2\pi s}+e^{-\pi s})-\frac{1}{s^2}J \Rightarrow (1+\frac{1}{s^2})J=\frac{1}{s^2}(e^{-2\pi s}+e^{-\pi s}) \Rightarrow$$

$$\frac{s^2+1}{s^2}J=\frac{e^{-\pi s}(e^{-\pi s}+1)}{s^2} \Rightarrow J=\frac{e^{-\pi s}(e^{-\pi s}+1)}{s^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}} L[f(t)]=\frac{۱}{۱-e^{-۲\pi s}}\cdot\frac{e^{-\pi s}(e^{-\pi s}+۱)}{s^۲+۱}=\frac{۱}{(۱-e^{-\pi s})(۱+e^{-\pi s})}\cdot\frac{e^{-\pi s}(e^{-\pi s}+۱)}{s^۲+۱} \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{e^{-\pi s}}{(s^۲+۱)(۱-e^{-\pi s})}=\frac{e^{\pi s}}{e^{\pi s}}\times\frac{e^{-\pi s}}{(s^۲+۱)(۱-e^{-\pi s})} \Rightarrow L[f(t)]=\frac{۱}{(s^۲+۱)(e^{\pi s}-۱)}$$

تذکر. با دو بار استفاده از روش جزء به جزء می‌توان بدست آورد:

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^۲+b^۲}(a\cos bx+b\sin bx)+c$$

اگر با توجه به تساوی اول به محاسبه انتگرال $J=-\int_{\pi}^{۲\pi}e^{-sx}\sin x dx$ بپردازیم:

$$\xrightarrow{a=-s\ \&\ b=۱} J=\frac{-۱}{s^۲+۱}(e^{-sx}(-\sin x-\cos x))\Big|_{\pi}^{۲\pi}=-\frac{۱}{s^۲+۱}(-e^{-۲\pi s}-e^{-\pi s}) \Rightarrow J=\frac{e^{-\pi s}(e^{-\pi s}+۱)}{s^۲+۱}$$

۶۱ـ گزینه «۳»

$$f(x)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-۲)(s-۱)}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s-۲}-\frac{۱}{s-۱}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{s-a}\xrightarrow{L^{-۱}}e^{at}} f(x)=e^{۲x}-e^{x}$$

۶۲ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[x\sin ۲x]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'}F(s)=-(L[\sin ۲x])'=-(\frac{۲}{s^۲+۴})' \Rightarrow F(s)=\frac{۴s}{(s^۲+۴)^۲}$$

۶۳ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲+۲^۲}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{s^۲+\omega^۲}\xrightarrow{L^{-۱}}\frac{۱}{\omega}\sin\omega t} f(t)=\frac{۱}{۲}\sin ۲t=\frac{۱}{۲}(۲\sin t\cos t) \Rightarrow f(t)=\sin t\cos t$$

۶۴ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{f*g=\int_{۰}^{t}f(t-x)g(x)dx} t*e^{at}=\int_{۰}^{t}(t-x)e^{ax}dx$$

$$\begin{cases}u=t-x\\dv=e^{ax}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=-dx\\v=\frac{۱}{a}e^{ax}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=uv-\int vdu} t*e^{at}=\left[(t-x)\frac{۱}{a}e^{ax}\right]\Big|_{۰}^{t}-\int_{۰}^{t}\frac{۱}{a}e^{ax}(-dx) \Rightarrow$$

$$t*e^{at}=(۰-\frac{t}{a})+\frac{۱}{a}(\frac{۱}{a}e^{ax})\Big|_{۰}^{t} \Rightarrow t*e^{at}=-\frac{t}{a}+\frac{۱}{a^۲}(e^{at}-۱)$$

۶۵ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s+۱)(s+۲)}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s+۲}\right]\xrightarrow{\frac{۱}{s+a}\xrightarrow{L^{-۱}}e^{at}} f(t)=e^{-t}-e^{-۲t}$$

۶۶ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-۱}\left[Ln(\frac{s+۱}{s})\right]=L^{-۱}[Ln(s+۱)-Ln(s)]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s)]=-\frac{۱}{t}L^{-۱}[F'(s)]} f(t)=-\frac{۱}{t}L^{-۱}\left[\frac{۱}{s+۱}-\frac{۱}{s}\right]=-\frac{۱}{t}(e^{-t}-۱) \Rightarrow f(t)=\frac{۱-e^{-t}}{t}$$

۶۷ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-۱}\left[Ln(۱+\frac{\omega^۲}{s^۲})\right]=L^{-۱}\left[Ln(\frac{s^۲+\omega^۲}{s^۲})\right]=L^{-۱}[Ln(s^۲+\omega^۲)-Lns^۲]$$

$$\xrightarrow{L^{-۱}[F]=-\frac{۱}{t}L^{-۱}[F']} f(t)=-\frac{۱}{t}L^{-۱}\left[\frac{۲s}{s^۲+\omega^۲}-\frac{۲}{s}\right]=-\frac{۲}{t}(\cos\omega t-۱) \Rightarrow f(t)=\frac{۲}{t}(۱-\cos\omega t)$$

۶۸ـ گزینه «۱»

$$f(x)=L^{-۱}\left[\frac{۳s^۲-۸s+۳}{s^۳-۴s^۲+۳s}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۳s^۲-۸s+۳}{s(s-۳)(s-۱)}\right] \Rightarrow$$

$$f(s)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s-۳}+\frac{۱}{s-۱}\right] \Rightarrow f(x)=۱+e^{۳x}+e^{x}$$

یادآوری.

$$\frac{۳s^۲-۸s+۳}{s^۳-۴s^۲+۳s}=\frac{۳s^۲-۸s+۳}{s(s-۳)(s-۱)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-۳}+\frac{C}{s-۱} \Rightarrow$$

$$۳s^۲-۸s+۳=A(s-۳)(s-۱)+Bs(s-۱)+Cs(s-۳) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{\text{با جایگذاری } s=۰\text{ در طرفین تساوی}} ۳=۳A \Rightarrow A=۱\\ \xrightarrow{\text{با جایگذاری } s=۳\text{ در طرفین تساوی}} ۶=۶B \Rightarrow B=۱\\ \xrightarrow{\text{با جایگذاری } s=۱\text{ در طرفین تساوی}} -۲=-۲C \Rightarrow C=۱\end{cases} \Rightarrow \frac{۳s^۲-۸s+۳}{s^۳-۴s^۲+۳s}=\frac{۱}{s}+\frac{۱}{s-۳}+\frac{۱}{s-۱}$$

۶۹ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{s^۳+۲s^۲+۴s+۱۸}{s^۴+۱۳s^۲+۳۶}\right]=L^{-۱}\left[\frac{s(s^۲+۴)+۲(s^۲+۹)}{(s^۲+۴)(s^۲+۹)}\right] \Rightarrow$$

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۹}+\frac{۲}{s^۲+۴}\right]=L^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲+۳^۲}\right]+L^{-۱}\left[\frac{۲}{s^۲+۲^۲}\right] \Rightarrow f(t)=\cos ۳x+\sin ۲x$$

۷۰ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[1+2x+3x^2]=L[1]+2L[x]+3L[x^2]$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول ارائه شده}} F(s)=\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^2}+3\frac{2!}{s^3} \Rightarrow F(s)=\frac{s^2+2s+6}{s^3}$$

۷۱ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L[t\sin bt]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s)=-\big(L[\sin bt]\big)'=-\Big(\frac{b}{s^2+b^2}\Big)' \Rightarrow F(s)=\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$$

۷۲ـ گزینه «۱»

$$I=\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx=\int_0^\infty e^{-2x}x^6\,dx\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=L[f]\big|_{s=s}} I=L[x^6]\Big|_{s=2}\xrightarrow{t^n\xrightarrow{L}\frac{n!}{s^{n+1}}} I=\frac{6!}{s^7}\Big|_{s=2}=\frac{6!}{2^7}$$

۷۳ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[x\sinh(2x)]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s)=-\big(L[\sinh(2x)]\big)'=-\Big(\frac{2}{s^2-4}\Big)' \Rightarrow F(s)=\frac{4s}{(s^2-4)^2}$$

۷۴ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+2s}\Big]=L^{-1}\Big[\frac{1}{s(s+2)}\Big]=L^{-1}\Big(\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+2}\Big)\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}L^{-1}\Big[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\Big]=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

یادآوری.

$$\frac{1}{s^2+2s}=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}=\frac{(A+B)s+2A}{s(s+2)} \Rightarrow$$

$$1=(A+B)s+2A \Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\2A=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\ \&\ B=-\frac{1}{2}$$

۷۵ـ گزینه «۱»

$$I=\int_0^t \sinh 2x\,dx\xrightarrow{L[\int_0^t f dx]=\frac{1}{s}L[f(t)]} I=\frac{1}{s}L[\sinh 2t] \Rightarrow I=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2-4}$$

۷۶ـ گزینه «۲»

$$2\sin 2t+4\cos 2t=L^{-1}\Big[\frac{a(s+1)}{s^2+4}\Big]=aL^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{2}{s^2+2^2}\Big]$$

$$\xrightarrow{(\frac{s}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\cos at)\ \&\ (\frac{a}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\sin at)} 2\sin 2t+4\cos 2t=a(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t) \Rightarrow a=4$$

۷۷ـ گزینه «۴» حل اول:

$$F(s)=L[te^{2t}]\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s)=-(L[e^{2t}])'=-(\frac{1}{s-2})' \Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s-2)^2}$$

حل دوم:

$$F(s)=L[e^{2t}t]\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} F(s)=L[t]\Big|_{s\mapsto s-2}=\frac{1}{s^2}\Big|_{s\mapsto s-2} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s-2)^2}$$

۷۸ـ گزینه «۱»

$$y''+4y'+3y=0 \Rightarrow L[y'']+4L[y']+3L[y]=0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+4(sL[y]-y(0))+3L[y]=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=3\ \&\ y'(0)=1} (s^2L[y]-3s-1)+4(sL[y]-3)+3L[y]=0 \Rightarrow (s^2+4s+3)L[y]=3s+13 \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{3s+13}{(s+1)(s+3)}$$

۷۹ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\Big[\frac{4s-3}{s^2+4}\Big]=L^{-1}\Big[4\frac{s}{s^2+4}-3\frac{1}{s^2+4}\Big]=4L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+2^2}\Big]-3L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+2^2}\Big]$$

$$\xrightarrow{(\frac{s}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\cos at)\ \&\ (\frac{1}{s^2+a^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{a}\sin at)} f(t)=4\cos 2t-3\times\frac{1}{2}\sin 2t$$

۸۰ـ گزینه «۱»

$$H(t-a)=u_a(t)\xrightarrow{u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as}} L[H(t-a)]=\frac{1}{s}e^{-as}$$

۸۱ـ گزینه «۴»

$$y''+y=\delta(t-\pi)\cos t \Rightarrow L[y'']+L[y]=L[\delta(t-\pi)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} (s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))+Y(s)=L[\delta(t-\pi)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[\delta(t-a)f]=e^{-as}f(a)\ \&\ (y(0)=0\ ;\ y'(0)=1)} s^2Y(s)-1+Y(s)=e^{-\pi s}\cos\pi$$

$$\xrightarrow{\cos\pi=-1} (s^2+1)Y(s)-1=-e^{-\pi s} \Rightarrow Y(s)=\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\Big[\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+1}\Big]=L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+1}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\Big] \Rightarrow y(t)=L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+1}\Big]-L^{-1}\Big[e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\Big]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} y(t)=\sin t-u_\pi(t)L^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+1}\Big]\Big|_{t\mapsto t-\pi} \Rightarrow y(t)=\sin t-u_\pi(t)\sin(t-\pi)$$

$$\xrightarrow{\sin(t-\pi)=-\sin t} y(t)=\sin t+u_\pi(t)\sin t$$

۸۲ـ گزینه «۳»

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-2t}\cos t\,dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}} I=L[\cos t]\Big|_{s=2}=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2} \Rightarrow I=\frac{2}{5}$$

۸۳ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[(t+2)te^t]=L[e^t(t^2+2t)] \xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\to s-a}} F(s)=L[t^2+2t]\Big|_{s\to s-1}=\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}\right)\Big|_{s\to s-1} \Rightarrow$$

$$F(s)=2\left(\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{(s-1)^2}\right)=2\left(\frac{1+s-1}{(s-1)^3}\right) \Rightarrow F(s)=\frac{2s}{(s-1)^3}$$

۸۴ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع بر حسب}} f(x)=\big(u_0(x)-u_1(x)\big)\times 2+u_1(x)\times x \Rightarrow$$

$$F(s)=L[f(x)]=L[2(u_0(x)-u_1(x))+xu_1(x)]=2\big(L[u_0(x)]-L[u_1(x)]\big)+L[xu_1(x)]$$

$$\xrightarrow{(u_a(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{s}e^{-as})\ \&\ L[tf]=-(L[f])'} F(s)=2\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right)-\left(\frac{1}{s}e^{-s}\right)'=\frac{2}{s}-\frac{2}{s}e^{-s}+\left(\frac{1}{s^2}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-s}\right) \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}=\frac{2s-se^{-s}+e^{-s}}{s^2}$$

۸۵ـ گزینه «۲» حل اول:

$$\xrightarrow{f(t)=tL^{-1}[\int_s^\infty F\,ds]} f(t)=tL^{-1}\left[\int_s^\infty\frac{s}{(s^2+1)^2}ds\right]=tL^{-1}\left[\frac{1}{2}\int_s^\infty\frac{2s}{(s^2+1)^2}ds\right]$$

$$\xrightarrow{\int\frac{u'}{u^r}=\frac{u^{-r+1}}{-r+1}} f(t)=\frac{t}{2}L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\Big|_s^\infty\right]=\frac{t}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \Rightarrow f(t)=\frac{t}{2}\sin t$$

حل دوم:

$$f(t)=L^{-1}\left[-\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] \xrightarrow{L^{-1}[F]=-tL^{-1}[\int F\,ds]} f(t)=-tL^{-1}\left[\int\frac{s}{(s^2+1)^2}ds\right]=-tL^{-1}\left[\frac{-1}{2(s^2+1)}\right] \Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{t}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\frac{t}{2}\sin t$$

یادآوری.

$$I=\int\frac{s}{(s^2+1)^2}ds=\frac{-1}{2}\int\frac{2s}{(s^2+1)^2}ds \xrightarrow{\int\frac{u'}{u^r}=\frac{u^{-r+1}}{-r+1}} I=\frac{-1}{2(s^2+1)}$$

۸۶ـ گزینه «۴»

$$f(t)=\int_0^t(u-t)^2e^u\,du \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L\left[\int_0^t(t-u)^2e^u\,du\right]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} F(s)=L[t^2*e^t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=L[t^2]L[e^t] \Rightarrow F(s)=\frac{2!}{s^3}\cdot\frac{1}{s-1}$$

۸۷ـ گزینه «۱»

$$g(t)=\int_0^t(t-\lambda)^2\sin\lambda\,d\lambda \Rightarrow G(s)=L[g(t)]=L\left[\int_0^t(t-\lambda)^2\sin\lambda\,d\lambda\right]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} G(s)=L[t^2*\sin t]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} G(s)=L[t^2]L[\sin t] \Rightarrow G(s)=\frac{2!}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

۸۸ـ گزینه «۳» حل اول:

$$f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x dx \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L\left[e^{-t}\int_0^t xe^x dx\right]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\to s-a}} F(s)=L\left[\int_0^t xe^x dx\right]\Big|_{s\to s+1}$$

$$\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dx]=\frac{1}{s}L[f(t)]} F(s)=\left(\frac{1}{s}L[te^t]\Big|_{s\to s+1}\right) \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s+1}L[e^t t]\Big|_{s\to s+1} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\to s-a}} F(s)=\frac{1}{s+1}(L[t]|_{s\to s-1})\Big|_{s\to s+1} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2}$$

حل دوم:

$$f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x dx=\int_0^t xe^{-(t-x)}dx \Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L\left[\int_0^t xe^{-(t-x)}dx\right]$$

$$\xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} F(s)=L[t*e^{-t}] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} F(s)=L[t]L[e^{-t}] \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}$$

۸۹ـ گزینه «۲»

$$A=L[xy''+y']=L[xy'']+L[y']$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} A=-\big(L[y'']\big)'+L[y']$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} A=-\big(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\big)'+\big(sY(s)-y(0)\big) \Rightarrow$$

$$A=-\left(2sY(s)+s^2\times\frac{dY(s)}{ds}-y(0)\right)'+sY(s)-y(0) \Rightarrow A=-s^2\frac{dY(s)}{ds}-sY(s)$$

۹۰ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-1}\left[\operatorname{Ln}\frac{s-2}{s+2}\right]=L^{-1}[\operatorname{Ln}(s-2)-\operatorname{Ln}(s+2)]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']} f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}\right]=-\frac{1}{t}(e^{2t}-e^{-2t}) \xrightarrow{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}=\sinh at} f(t)=\frac{-1}{t}(2\sinh 2t)$$

۹۱ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L[8\sin^2 3t]=8L[\sin^2 3t] \xrightarrow{\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}} F(s)=8L\left[\frac{1-\cos 6t}{2}\right]=\frac{8}{2}L[1-\cos 6t] \Rightarrow$$

$$F(s)=4\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+6^2}\right)=\frac{144}{s(s^2+36)}$$

۹۲ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2s-5}{s^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{5}{s^2}\right]=2L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-5L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \xrightarrow{\frac{1}{s^{n+1}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t^n}{n!}} f(t)=2\times 1-5t=2-5t$$

۹۳ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع بر حسب}} f(t)=\big(u_{\cdot}(t)-u_3(t)\big)\times\cdot+u_3(t)\times 2=2u_3(t) \Rightarrow$$

$$F(s)=L[f(t)]=2L[u_3(t)] \xrightarrow{u_a(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}e^{-as}} F(s)=2\frac{1}{s}e^{-3s}$$

۹۴ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L[\sin t\cos t] \xrightarrow{\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t} F(s)=L\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]=\frac{1}{2}L[\sin 2t] \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{1}{s^2+4}$$

۹۵ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right]=\frac{1}{\omega^2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{s^{n+1}} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t^n}{n!}\right)\&\left(\frac{1}{s^2+\omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)} f(t)=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

یادآوری.

$$\frac{1}{s(s+a)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

۹۶ـ گزینه «۲»

$$y=\int_0^t y\,dt+1 \Rightarrow Y(s)=L[y]=L\left[\int_0^t y\,dt+1\right] \Rightarrow Y(s)=L\left[\int_0^t y\,dt\right]+L[1]$$

$$\xrightarrow{L\left[\int_0^t f(x)dx\right]=\frac{1}{s}L[f(t)]} Y(s)=\frac{1}{s}L[y(t)]+\frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}Y(s)+\frac{1}{s} \Rightarrow \left(1-\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \Rightarrow y(t)=e^t$$

۹۷ـ گزینه «۴»

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)dx} 1*1=\int_0^t dx=x\Big|_0^t \Rightarrow 1*1=t$$

۹۸ـ گزینه «۱» حل اول:

$$f(x)=L^{-1}\left[-\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s^2+2s+1-1}{(s^2+2s+1+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+1)^2-1}{((s+1)^2+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(x)=e^{-x}L^{-1}\left[\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F]=-tL^{-1}[\int F ds]} f'(x)=e^{-x}\left(-xL^{-1}\left[\int\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}ds\right]\right)=e^{-x}\left(-xL^{-1}\left[\frac{-s}{s^2+1}\right]\right) \Rightarrow f(x)=e^{-x}(x\cos x)$$

یادآوری.

$$I=\int\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}ds \xrightarrow{s=\tan t \Rightarrow ds=(1+\tan^2 t)dt} I=\int\frac{\tan^2 t-1}{(\tan^2 t+1)^2}(1+\tan^2 t)dt \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{\tan^2 t-1}{\tan^2 t+1}dt=\int\frac{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}-1}{\frac{1}{\cos^2 t}}dt=\int\frac{\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}dt=\int(\sin^2 t-\cos^2 t)dt \Rightarrow I=-\int\cos 2t\,dt=-\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$\xrightarrow{s=\tan t \Rightarrow t=\text{Arctg}s} I=-\frac{1}{2}\sin 2(\text{Arctg}s) \xrightarrow{\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}} I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan(\text{Arctg}s)}{1+\tan^2(\text{Arctg}s)} \Rightarrow I=\frac{-s}{1+s^2}$$

حل دوم: به تست شماره ۴۳ مراجعه شود.

۹۹ـ گزینه «۲»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5}\right]+L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right]+3L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{s}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \cos at\right)\&\left(\frac{1}{s^2+a^2} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{a}\sin at\right)} f(t)=\cos\sqrt{5}t+3\times\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$$

$$\xrightarrow{t=\frac{\pi}{\sqrt{5}}} f\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}\right)=\cos\pi+\frac{3}{\sqrt{5}}\sin\pi=-1$$

۱۰۰ـ گزینه «۳»

$$I=\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]\big|_{s=s}} I=L[\cos t]\Big|_{s=2}=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2} \Rightarrow I=\frac{2}{5}$$

۱۰۱ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s+1}\right]=2L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-2L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{s^{n+1}}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{t^n}{n!}\right)\&\left(\frac{1}{s-a}\xrightarrow{L^{-1}}e^{at}\right)} f(t)=2-t-2e^{-t}$$

یادآوری.

$$\frac{s-1}{s^2(s+1)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{C}{s+1}=\frac{(A+C)s^2+(A+B)s+B}{s^2(s+1)}\Rightarrow$$

$$s-1=(A+C)s^2+(A+B)s+B\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A+B=1\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-2\\A=2\\B=-1\end{cases}$$

۱۰۲ـ گزینه «۳»

$$y(t)-e^t=\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau\xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} y-e^t=y*e^t\Rightarrow L[y]-\frac{1}{s-1}=L[y*e^t]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]*L[g]} L[y]-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s-1}L[y]\Rightarrow\left(1-\frac{1}{s-1}\right)L[y]=\frac{1}{s-1}\Rightarrow\frac{s-2}{s-1}L[y]=\frac{1}{s-1}\Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{1}{s-2}\Rightarrow y=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]\Rightarrow y=e^{2t}$$

۱۰۳ـ گزینه «۱»

$$F(s)=\frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}\Rightarrow F(s)=\frac{s}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}\Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+L^{-1}\left[e^{-\pi s}.\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} f(t)=\cos t+u_\pi(t)L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]\Big|_{t\mapsto t-\pi}\Rightarrow f(t)=\cos t+u_\pi(t)\cos(t-\pi)\Rightarrow$$

$$f(t)=\cos t-u_\pi(t)\cos t=(1-u_\pi(t))\cos t\xrightarrow{u_0(t)=1} f(t)=(u_0(t)-u_\pi(t))\cos t$$

$$\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=\begin{cases}\cos t & t<\pi\\0 & t>\pi\end{cases}$$

۱۰۴ـ گزینه «۱»

$$f(t)=\begin{cases}t^2 & 0<t<2\\6 & t>2\end{cases}\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=(u_0(t)-u_2(t))\times t^2+u_2(t)\times 6$$

$$\xrightarrow{u_0(t)=1} f(t)=t^2+u_2(t)(6-t^2)\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=\frac{2}{s^3}+L[u_2(t)(6-t^2)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=\frac{2}{s^3}+e^{-2s}L[6-(t+2)^2]=\frac{2}{s^3}+e^{-2s}L[-t^2-4t+2]\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{2}{s^3}+e^{-2s}\left(-\frac{2}{s^3}-\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

۱۰۵ـ گزینه «۴»

$$f(t)=\begin{cases}t & 0<t<1\\2 & t\geq 1\end{cases}\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)} f(t)=(u_0(t)-u_1(t))\times t+u_1(t)\times 2$$

$$\xrightarrow{u_0(t)=1} f(t)=t+u_1(t)(2-t)\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{s^2}+L[u_1(t)(2-t)]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} F(s)=\frac{1}{s^2}+e^{-s}L[2-(t+1)]=\frac{1}{s^2}+e^{-s}L[1-t]\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}+e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}(1+se^{-s}-e^{-s})$$

۱۰۶ـ گزینه «۲»

$$f(t)=\frac{e^t-\cos t}{t}\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L\left[\frac{e^t-\cos t}{t}\right]$$

$$\xrightarrow{L\left[\frac{f}{t}\right]=\int_s^\infty L[f]ds} F(s)=\int_s^\infty L[e^t-\cos t]ds=\int_s^\infty\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s^2+1}\right)ds\Rightarrow$$

$$F(s)=\left(\operatorname{Ln}(s-1)-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(s^2+1)\right)\Big|_s^\infty\Rightarrow F(s)=\left(\operatorname{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Big|_s^\infty=\operatorname{Ln}1-\operatorname{Ln}\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}\Rightarrow F(s)=\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1}$$

۱۰۷ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^4-2s^3}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s-2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}.\frac{1}{s-2}\right]$$

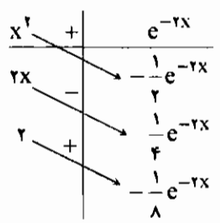
$$\xrightarrow{L^{-1}[FG]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]*L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]\Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{2}*e^{2t}$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(x)g(t-x)dx} f(t)=\int_0^t\frac{x^2}{2}e^{2(t-x)}dx=\frac{e^{2t}}{2}\int_0^t x^2e^{-2x}dx=\frac{e^{2t}}{2}\left(\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right)\Big|_0^t\Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{e^{2t}}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right)\Big|_0^t$$

$$f(t)=\frac{e^{2t}}{2}\left(\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{-2t}+\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(t)=\frac{1}{8}(e^{2t}-2t^2-2t-1)$$

یادآوری.



$$\Rightarrow\int x^2e^{-2x}\,dx=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

۱۰۸ـ گزینه «۱»

$$t\,y'' + (3t-1)\,y' - (4t+9)\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad L[t\,y''] + 3L[t\,y'] - L[y'] - 4L[t\,y] - 9L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -(L[y'])' - 3(L[y'])' + 4(L[y])' - L[y'] - 9L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[t^n f]=s^n L[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -\big(s^2Y - sy(0) - y'(0)\big)' - 3\big(sY - y(0)\big)' + 4Y' - (sY - y(0)) - 9Y = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=(y'(0))'=0} -2sY - s^2Y' - 3Y - 3sY' + 4Y' - sY - 9Y = 0$$

$$Y'(s^2 + 3s - 4) + Y(3s + 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Y'}{Y} = -\frac{3s+12}{s^2+3s-4} = -\frac{3(s+4)}{(s-1)(s+4)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Y}\cdot\frac{dY}{ds} = -\frac{3}{s-1}$$

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{3}{s-1}ds \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{، جدا شونده}} \operatorname{Ln} Y = -3\operatorname{L}(s-1) + \operatorname{Ln} c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ln} Y = \operatorname{Ln}\frac{1}{(s-1)^3} + \operatorname{Ln} c \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ln} Y = \operatorname{Ln}\frac{c}{(s-1)^3} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{c}{(s-1)^3}$$

۱۰۹ـ گزینه «۲»

$$y'' - t\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad L[y''] - L[t\,y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[y'']=s^2L[y]-s\,y(0)-y'(0)} (s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0)) - L[t\,y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])' \;\&\; (y'(0)=1\,;\,y'(0)=0)} s^2Y - s + Y' = 0 \quad \Rightarrow \quad Y' + s^2Y = s$$

۱۱۰ـ گزینه «۳» نکته. اگر در معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب متغیر $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)\,y = f(x)$، ضرائب $a_0(x)$، ...، $a_n(x)$ چند جمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر k باشند، پس از اعمال تبدیل لاپلاس، در فضای لاپلاس یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه k بدست می‌آید.

۱۱۱ـ گزینه «۳»

$$y'' + y' = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad L[y''] + L[y'] = L[3x^2]$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} (s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0)) + (s\,L[y] - y(0)) = 3\frac{2}{s^3}$$

$$\xrightarrow{y(0)=0 \;\&\; y'(0)=1} s^2L[y] - 1 + sL[y] = \frac{6}{s^2} \quad \Rightarrow \quad (s^2+s)L[y] = 1 + \frac{6}{s^3} \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{s^3+6}{s^4(s+1)}$$

۱۱۲ـ گزینه «۴»

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} F(s) = e^{-\frac{3}{2}t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}\right] \quad \Rightarrow \quad F(s) = e^{-\frac{3}{2}t}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

۱۱۳ـ گزینه «۴»

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{9s-1}}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{3\sqrt{s-\frac{1}{9}}}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right] \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$\xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}} f(t) = \frac{1}{3\sqrt{\pi t}}e^{\frac{t}{9}}$$

۱۱۴ـ گزینه «۳»

$$\overline{F}(s) = L[\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\beta t}{\alpha}}f(\frac{t}{\alpha})] = \frac{1}{\alpha}L[e^{-\frac{\beta t}{\alpha}}f(\frac{t}{\alpha})] \xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}} \overline{F}(s) = \frac{1}{\alpha}L[f(\frac{t}{\alpha})]\Big|_{s\mapsto s+\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\xrightarrow{L[f(kt)]=\frac{1}{k}L[f]|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} \overline{F}(s) = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}L[f]\Big|_{s\mapsto\frac{s}{\frac{1}{\alpha}}}\Big)\Big|_{s\mapsto s+\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\xrightarrow{L[f]=F(s)} \overline{F}(s) = \Big(F(s)\Big|_{s\mapsto\alpha s}\Big)\Big|_{s\mapsto s+\frac{\beta}{\alpha}} = F(\alpha s)\Big|_{s\mapsto s+\frac{\beta}{\alpha}} = F(\alpha(s+\frac{\beta}{\alpha})) \quad \Rightarrow \quad \overline{F}(s) = F(\alpha s+\beta)$$

۱۱۵ـ گزینه «۱»

$$y(t) = 2 + \int_0^t y(u)e^{t-u}\,du \xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} y = 2 + y*e^t \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{2}{s} + L[y*e^t]$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[y] = \frac{2}{s} + L[y]L[e^t] \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}L[y] \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{1}{s-1})L[y] = \frac{2}{s} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{s-2}{s-1}L[y] = \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{2(s-1)}{s(s-2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = 1 + e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y(1) = 1 + e^2$$

۱۱۶ـ گزینه «۴»

$$I = \int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t\,dt = \int_0^\infty e^{-t}(t^3\sin t)\,dt \xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}} I = (L[t^3\sin t])\Big|_{s=1}$$

$$\xrightarrow{L[t^nf]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[f]} I = ((-1)^3\frac{d^3}{ds^3}.L[\sin t])\Big|_{s=1} \quad \Rightarrow \quad I = -(\frac{d^3}{ds^3}(\frac{1}{s^2+1}))\Big|_{s=1} \quad \Rightarrow$$

$$I = -\left(\frac{12s(s^2+1)^3 - 6s(s^2+1)^2(6s^2-2)}{(s^2+1)^6}\right)\Big|_{s=1} \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{(12\times8) - (6\times4\times4)}{2^6} \quad \Rightarrow \quad I = 0$$

۱۱۷ـ گزینه «۳»

$$I=\int_{0}^{\infty} e^{-۳t}\sin^{۲}(۲t)\,dt \xrightarrow{\int_{0}^{\infty} e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}} I=L[\sin^{۲}(۲t)]\big|_{s=۳} \Rightarrow$$

$$I=L\left[\frac{۱-\cos(۴t)}{۲}\right]\Big|_{s=۳}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^{۲}+۱۶}\right)\Big|_{s=۳} \Rightarrow I=\frac{۸}{۷۵}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۸ـ گزینه «۱»

$$y(x)=x^{۲}+\int_{0}^{x} y(x-t)\sin t\,dt \xrightarrow{\int_{0}^{t} f(t-x)g(x)dx=f*g} y=x^{۲}+y*\sin t \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{۲}{s^{۳}}+\frac{۱}{s^{۲}+۱}L[y] \Rightarrow (۱-\frac{۱}{s^{۲}+۱})L[y]=\frac{۲}{s^{۳}} \Rightarrow L[y]=\frac{۲(s^{۲}+۱)}{s^{۵}} \Rightarrow$$

$$y=۲L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^{۳}}+\frac{۱}{s^{۵}}\right] \Rightarrow y=۲(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۴!}) \Rightarrow y(x)=x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۱۲}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۱۹ـ گزینه «۱» یادآوری. سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^{n}$ با شرط $|q|<۱$، یک سری همگراست و حد مجموع آن برابر $\frac{a}{۱-q}$ است، که در آن a جمله اول و q قدر نسبت سری مفروض می‌باشد.

بنابراین، با توجه به اینکه به ازاء $s>۰$ مقدار $|e^{-s}|<۱$ است، می‌توان حاصل $\frac{۱}{s(۱-e^{-s})}=\frac{\frac{۱}{s}}{۱-e^{-s}}$ را بعنوان حد مجموع یک سری هندسی با جمله اول $a=\frac{۱}{s}$ و قدر نسبت $q=e^{-s}$ در نظر گرفت. در نتیجه؛

$$\frac{۱}{s(۱-e^{-s})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{۱}{s}(e^{-s})^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{s}$$

در اینصورت؛

$$f(t)=L^{-۱}\left[\frac{۱}{s(۱-e^{-s})}\right]=L^{-۱}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-ns}}{s}\right] \xrightarrow{\frac{۱}{s}e^{-as}\xrightarrow{L^{-۱}}u_a(t)} f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۰ـ گزینه «۴» حل اول:

$$y''+۲\int_{0}^{t} y(u)\,du=t\sin t \Rightarrow L[y'']+۲L[\int_{0}^{t} y(u)\,du]=L[t\sin t]$$

$$\xrightarrow{L[\int_{0}^{t} f\,dx]=\frac{۱}{s}L[f]} (s^{۲}Y(s)-s\,y(۰)-y'(۰))+۲\frac{Y(s)}{s}=-(L[\sin t])' \Rightarrow s^{۲}Y(s)+\frac{۲}{s}Y(s)=-(\frac{۱}{s^{۲}+۱})' \Rightarrow$$

$$(s^{۲}+\frac{۲}{s})Y(s)=\frac{۲s}{(s^{۲}+۱)^{۲}} \Rightarrow Y(s)=\frac{۲s^{۲}}{(s^{۳}+۲)(s^{۲}+۱)^{۲}}$$

حل دوم:

i ـ با توجه به قضیه حد در بی‌نهایت تبدیل لاپلاس ($\lim_{s\to+\infty} F(s)=۰$)، باید تبدیل لاپلاس در ∞ صفر شود. در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند صحیح باشند.

ii ـ با توجه به قضیه مقدار ابتدائی تبدیل لاپلاس $\lim_{s\to+\infty} sF(s)=f(۰)$، گزینه (۱) نیز نادرست است.

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۱ـ گزینه «۴» الف ـ با توجه به حضور $e^{x^{۲}}$ در ضابطه تابع $f(x)$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲xe^{x^{۲}}\cos(e^{x^{۲}})}{e^{ax}}=\infty \qquad ;\ \forall a>۰$$

در نتیجه، تابع مفروض $f(x)$ از مرتبه نمایی نیست.

ب ـ

$$F(s)=L[۲x\,e^{x^{۲}}\cos(e^{x^{۲}})]=\int_{0}^{\infty}\underbrace{e^{-sx}}_{u}\times\underbrace{۲x\,e^{x^{۲}}\cos(e^{x^{۲}})\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases}du=-\frac{۱}{s}e^{-sx}dx\\ v=\sin(e^{x^{۲}})\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\int udv=uv-\int vdu} F(s)=\left(e^{-sx}\times\sin(e^{x^{۲}})\right)\Big|_{0}^{\infty}+\frac{۱}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}})\,dx \Rightarrow$$

$$F(s)=\lim_{T\to\infty}(e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}}))\Big|_{0}^{T}+\frac{۱}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-sx}(e^{x^{۲}})\,dx$$

$$\xrightarrow{(x\to+\infty\Rightarrow\lim e^{-x}=۰)} F(s)=-\sin(۱)+\frac{۱}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}})\,dx \qquad ;\ (۱)$$

از طرف دیگر؛

$$|e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}})|\le e^{-sx} \qquad ;\ s\ge۰ \Rightarrow \int_{0}^{\infty}e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}})\,dx\le\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx<\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\sin(e^{x^{۲}})\,dx<\infty$$

در اینصورت با توجه به تساوی (۱) تبدیل لاپلاس $F(s)=L[۲x\,e^{x^{۲}}\cos(e^{x^{۲}})]$ وجود دارد.

راهنمایی.

$$-۱\le\sin(e^{T^{۲}})\le۱ \Rightarrow -e^{-ST}\le e^{-ST}\sin(e^{T^{۲}})\le e^{-ST} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[(x\to+\infty\Rightarrow\lim e^{-x}=۰);\ \text{با توجه به قضیه ساندویچ}]{} \lim_{T\to+\infty}(e^{-ST}\sin(e^{T^{۲}}))=۰$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۲ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[s\tan^{-1}\frac{1}{s}-1\right]$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[(s\tan^{-1}\frac{1}{s}-1)'\right]=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\tan^{-1}\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]\Rightarrow$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}(L^{-1}\left[\tan^{-1}\frac{1}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right])\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']}f(t)=-\frac{1}{t}(-\frac{1}{t}L^{-1}\left[(\tan^{-1}\frac{1}{s})'\right]-\cos t)\Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2}(L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right]+t\cos t)\Rightarrow f(t)=\frac{1}{t^2}(t\cos t-\sin t)$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۳ـ گزینه «۱»

$$u''=e^{2x}-\int_0^x e^{2(x-t)}u'(t)\,dt\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g}u''=e^{2x}-e^{2x}*u'\Rightarrow$$

$$L[u'']=\frac{1}{s-2}-L[e^{2x}]L[u']\Rightarrow(s^2L[u]-s\,u(0)-u'(0))=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-2}(sL[u]-u(0))$$

$$\xrightarrow{u(0)=u'(0)=0}s^2L[u]=\frac{1}{s-2}-\frac{s}{s-2}L[u]\Rightarrow(s^2+\frac{s}{s-2})L[u]=\frac{1}{s-2}\Rightarrow L[u]=\frac{1}{s(s-1)^2}\Rightarrow$$

$$u=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\right]\Rightarrow u=e^xL^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-e^x+1\Rightarrow u(x)=e^x.x-e^x+1$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۴ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}[\frac{3s+13}{s^2+4s+3}]=L^{-1}[\frac{3(s+2)+7}{(s+2)^2-1}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=e^{-2t}L^{-1}[\frac{3s+7}{s^2-1}]=e^{-2t}(3L^{-1}[\frac{s}{s^2-1}]+7L^{-1}[\frac{1}{s^2-1}])\Rightarrow$$

$$f(t)=e^{-2t}(3\cosh t+7\sinh t)=e^{-2t}(3\frac{e^t+e^{-t}}{2}+7\frac{e^t-e^{-t}}{2})\Rightarrow f(t)=5e^{-t}-2e^{-3t}$$

یادآوری.

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۵ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$y(t)=2+\int_0^t y'(u)e^{t-u}\,du\xrightarrow{t=0}y(0)=2\qquad(1)$$

در اینصورت؛

$$y=2+\int_0^t y'(u)e^{t-u}du\xrightarrow{\int_0^t f(x)\,g(t-x)dx=f*g}y=2+y'*e^t\Rightarrow$$

$$L[y(t)]=L[2]+L[y'*e^t]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}L[y]=\frac{2}{s}+L[y']\cdot\frac{1}{s-1}$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)}L[y]=\frac{2}{s}+(sL[y]-y(0))\cdot\frac{1}{s-1}\xrightarrow{\text{تساوی (1)}}L[y]=\frac{2}{s}+\frac{s}{s-1}\cdot L[y]-\frac{2}{s-1}\Rightarrow$$

$$(1-\frac{s}{s-1})\cdot L[y]=\frac{2}{s}-\frac{2}{s-1}\Rightarrow\frac{-1}{s-1}\cdot L[y]=\frac{-2}{s(s-1)}\Rightarrow L[y]=\frac{2}{s}\Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}[\frac{2}{s}]\Rightarrow y(t)=2\xrightarrow{t=5}y(5)=2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۶ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}[\frac{2}{s^2+6s+13}]=L^{-1}[\frac{2}{(s+3)^2+4}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=e^{-3t}L^{-1}[\frac{2}{s^2+4}]\Rightarrow f(t)=e^{-3t}\sin 2t$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۲۷ـ گزینه «۱» با فرض $X=L[x]$ و $Y=L[y]$ داریم:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+2y\\ \frac{dy}{dt}=2x+y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L[\frac{dx}{dt}]=X+2Y\\ L[\frac{dy}{dt}]=2X+Y+\frac{1}{s}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(0)\ \&\ (x(0)=0\ ;\ y(0)=5)}\begin{cases}sX-0=X+2Y\\ sY-5=2X+Y+\frac{1}{s}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(s-1)X=2Y=0\\ (s-1)Y-2X=5+\frac{1}{s}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}X=\frac{2}{s-1}Y\\ (s-1)Y-2X=\frac{5s+1}{s}\end{cases}\Rightarrow(s-1)Y-2(\frac{2}{s-1})Y=\frac{5s+1}{s}\Rightarrow\frac{(s-1)^2-4}{s-1}\cdot Y=\frac{5s+1}{s}\Rightarrow$$

$$Y=\frac{(5s+1)(s-1)}{s((s-1)^2-4)}=\frac{(5s+1)(s-1)}{s(s+1)(s-3)}=\frac{\frac{1}{3}}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{\frac{8}{3}}{s-3}\Rightarrow$$

$$y(t)=L^{-1}[Y]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{3}}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{\frac{8}{3}}{s-3}]=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}$$

یادآوری.

$$\frac{(۵s+۱)(s+۱)}{s(s+۱)(s-۳)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+۱}+\frac{c}{s-۳}=\frac{A(s+۱)(s-۳)+Bs(s-۳)+cs(s+۱)}{s(s+۱)(s-۳)} \quad \Rightarrow$$

$$A(s+۱)(s-۳)+Bs(s-۳)+Cs(s+۱)=(۵s+۱)(s+۱) \Rightarrow \begin{cases} s=۰ ; & -۳A=-۱ \Rightarrow A=\frac{۱}{۳} \\ s=-۱ ; & ۴A=۸ \Rightarrow B=۲ \\ s=۳ ; & ۱۲C=۳۲ \Rightarrow C=\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

لازم بذکر است، فقط گزینه (۱) در شرط $y(۰)=۵$ صدق می‌کند.

۱۲۸ـ گزینه «۴» با فرض $X=L[x]$ و $Y=L[y]$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=۲x+y \\ \frac{dy}{dt}=x+۲y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L[\frac{dx}{dt}]=۲X+Y \\ L[\frac{dy}{dt}]=X+۲Y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L[f']=sL[f]-f(۰) \ \& \ (x(۰)=۱ \ ; \ y(۰)=۲)} \begin{cases} sX-۱=۲X+Y \\ sY-۲=X+۲Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-۲)X-Y=۱ \\ (s-۲)Y-X=۲ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-۲ & -۱ \\ -۱ & s-۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}=\frac{۱}{(s-۲)^۲-۱}\begin{bmatrix} s-۲ & ۱ \\ ۱ & s-۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X=\frac{s+۱}{(s-۱)(s-۳)} \\ Y=\frac{۲s-۵}{(s-۱)(s-۳)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=L^{-۱}[X]=L^{-۱}[\frac{s+۱}{(s-۱)(s-۳)}]=L^{-۱}[\frac{-۱}{s-۱}+\frac{۲}{s-۳}] \\ y=L^{-۱}[Y]=L^{-۱}[\frac{۲s-۵}{(s-۱)(s-۳)}]=L^{-۱}[\frac{۱}{s-۱}+\frac{۲}{s-۳}] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-e^{t}+۲e^{۳t} \\ y=e^{t}+۲e^{۳t} \end{matrix}$$

لازم بذکر است، فقط گزینه (۴) در شرط $x(۰)=۱$ صدق می‌کند.

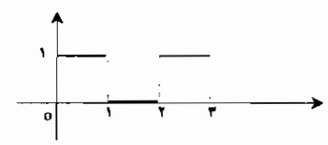
۱۲۹ـ گزینه «۳»

$$F(s)=\frac{۱}{s(۱+e^{-s})}=\frac{\frac{۱}{s}}{۱-(-e^{-s})} \xrightarrow{|q|<۱ \Rightarrow \frac{a}{۱-q}=\sum aq^{n}} F(s)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{s}(-e^{-s})^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{e^{-ns}}{s} \Rightarrow$$

$$f(t)=L^{-۱}[F(s)]=L^{-۱}[\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{e^{-ns}}{s}]=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}L^{-۱}[\frac{e^{-ns}}{s}] \Rightarrow f(t)=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}u_{n}(t) \Rightarrow$$

$$f(t)=۱-u_{۱}(t)+u_{۲}(t)-u_{۳}(t)+\cdots=(u_{۰}(t)-u_{۱}(t))+(u_{۲}(t)-u_{۳}(t)+\cdots \Rightarrow$$

$$f(t)=\begin{cases} ۱ & ;۰<t<۱ \\ ۰ & ;۱<t<۲ \\ ۱ & ;۲<t<۳ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



۱۳۰ـ گزینه «۴»

$$y''+۴y=\begin{cases} ۱ & ۰\le t<\pi \\ ۰ & \pi\le t<\infty \end{cases} \xrightarrow{u_a(t) \text{ بازنویسی توابع بر حسب}} y''+۴y=(۱-u_{\pi}(t))\times ۱+u_{\pi}(t)\times ۰ \Rightarrow$$

$$L[y'']+۴L[y]=L[۱-u_{\pi}(t)] \Rightarrow (s^{۲}L[y]-sy(۰)-y'(۰))+۴L[y]=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s}e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۱ \ \& \ y'(۰)=۰} (s^{۲}+۴)L[y]=s+\frac{۱-e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow L[y]=\frac{s}{s^{۲}+۴}+\frac{۱-e^{-\pi s}}{s(s^{۲}+۴)}$$

۱۳۱ـ گزینه «۳»

$$\frac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x))=-x^{-\alpha}J_{\alpha+۱}(x) \xrightarrow{\alpha=۰} \frac{d}{dx}(J_{۰}(x))=-J_{۱}(x) \Rightarrow J_{۱}(x)=-J'_{۰}(x) \Rightarrow$$

$$L[J_{۱}(x)]=-L[J'_{۰}(x)]=-(sL[J_{۰}(x)]-J_{۰}(۰)) \Rightarrow L[J_{۱}(x)]=J_{۰}(۰)-sL[J_{۰}(x)]$$

$$\xrightarrow{L[J_{۰}]=\frac{۱}{\sqrt{s^{۲}+۱}} \ \& \ J_{۰}(۰)=۱} L[J_{۱}(x)]=۱-\frac{s}{\sqrt{s^{۲}+۱}}=\frac{\sqrt{s^{۲}+۱}-s}{\sqrt{s^{۲}+۱}}$$

۱۳۲ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[t\sin ۲t+e^{۲t}]=L[t\sin ۲t]+L[e^{۲t}] \Rightarrow F(s)=\frac{۱}{s-۲} \Rightarrow$$

$$F(s)=-(\frac{۲}{s^{۲}+۴})'+\frac{۱}{s-۲} \Rightarrow F(s)=\frac{۴s}{(s^{۲}+۴)^{۲}}+\frac{۱}{s-۲}$$

۱۳۳ـ گزینه «۳»

$$g(t)=t\cos at \Rightarrow G(s)=L[t\cos at]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} G(s)=(L[\cos at])'=-(\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}})' \Rightarrow G(s)=\frac{s^{۲}-a^{۲}}{(s^{۲}+a^{۲})^{۲}}$$

۱۳۴ـ گزینه «۲»

$$y''+y=\begin{cases} t & ۰\le t<۱ \\ ۰ & ۱\le t<\infty \end{cases} \xrightarrow{u_a(t) \text{ بازنویسی توابع بر حسب}} y''+y=(۱-u_{۱}(t))\times t+u_{۱}(t)\times ۰ \Rightarrow$$

$$L[y'']+L[y]=L[t]-L[tu_{۱}(t)] \Rightarrow (s^{۲}Y(s)-sy(۰)-y'(۰))+Y(s)=\frac{۱}{s^{۲}}+(L[u_{۱}(t)])'$$

$$\xrightarrow{y(۰)=y'(۰)=۰} s^{۲}Y(s)+Y(s)=\frac{۱}{s^{۲}}+(\frac{۱}{s}e^{-s})' \Rightarrow (s^{۲}+۱)Y(s)=\frac{۱}{s^{۲}}+(-\frac{۱}{s^{۲}}e^{-s}-\frac{۱}{s}e^{-s}) \Rightarrow$$

$$(s^{۲}+۱)Y(s)=\frac{۱}{s^{۲}}-\frac{(s+۱)e^{-s}}{s^{۲}} \Rightarrow Y(s)=\frac{۱}{s^{۲}(s^{۲}+۱)}-\frac{(s+۱)e^{-s}}{s^{۲}(s^{۲}+۱)}$$

۱۳۵ـ گزینه «۳» با فرض $f(m)=\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$ ، به حل مسأله در حالت کلی می‌پردازیم:

$$\xrightarrow{L[f]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt} L[f(m)]=\int_0^\infty e^{-sm}f(m)dm=\int_0^\infty e^{-sm}(\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx)\,dm \quad \Rightarrow$$

$$L[f(m)]=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sm}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx\,dm$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض ترتیب انتگرالگیری}} L[f(m)]=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}(\int_0^\infty e^{-sm}\cos mx\,dm)\,dx$$

$$L[f(m)]=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}(\int_0^\infty e^{-sm}\cos mx\,dm)\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]} L[f(m)]=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\cdot L[\cos mx]\,dx=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+x^2}dx \quad \Rightarrow$$

$$L[f(m)]=\frac{s}{s^2-a^2}\int_0^\infty(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{s^2+x^2})\,dx=\frac{s}{s^2-a^2}(\frac{1}{a}\text{Arctag}\frac{x}{a}-\frac{1}{s}\text{Arctag}\frac{x}{s})\Big|_0^\infty \quad \Rightarrow$$

$$L[f(m)]=\frac{s}{s^2-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}(\frac{1}{a}-\frac{1}{s})=\frac{\pi}{2}(\frac{s}{s^2-a^2}\cdot\frac{s-a}{as}) \quad \Rightarrow \quad L[f(m)]=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a} \quad \Rightarrow$$

$$f(m)=L^{-1}\left[\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}\right]=\frac{\pi}{2a}L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] \quad \Rightarrow \quad f(m)=\frac{\pi}{2a}e^{-am}$$

در اینصورت، مسأله مفروض با جایگذاری $a=1$ حل می‌گردد.

۱۳۶ـ گزینه «۴»

$$y''+y=u_{2\pi}(x) \quad \Rightarrow \quad L[y'']+L[y]=\frac{1}{s}e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow \quad s^2L[y]+L[y]=\frac{1}{s}e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y=L^{-1}[e^{-2\pi s}\cdot\frac{1}{s(s^2+1)}]=L^{-1}[e^{-2\pi s}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1})]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}} y=u_{2\pi}(x)L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]\Big|_{x\mapsto x-2\pi} \quad \Rightarrow$$

$$y=u_{2\pi}(x)\,(1-\cos x)\Big|_{x\mapsto x-2\pi}=u_{2\pi}(x)(1-\cos(x-2\pi)) \quad \Rightarrow \quad y=u_{2\pi}(x)(1-\cos x)$$

۱۳۷ـ گزینه «۲»

$$I=\int_0^\infty\int_0^x e^{-6t+x}\cos t\,dt\,dx=\int_0^\infty\int_0^x e^{6(t-x)}e^{-5x}\cos t\,dt\,dx \quad \Rightarrow$$

$$I=\int_0^\infty e^{-5x}(\int_0^x e^{6(t-x)}\cos t\,dt)\,dx \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx=f*g} I=\int_0^\infty e^{-5x}(e^{6x}*\cos x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\int_0^\infty e^{-st}f\,dt=L[f]|_{s=s}} I=L[e^{6x}*\cos x]\Big|_{s=5} \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} I=(\frac{1}{s-6}\cdot\frac{s}{s^2+1})\Big|_{s=5} \quad \Rightarrow$$

$$I=\int_0^\infty\int_0^x e^{-6t+x}\cos t\,dt\,dx=\frac{1}{-1}\cdot\frac{5}{26}=\frac{-5}{26}$$

۱۳۸ـ گزینه «۲»

$$y(x)=e^x(1+\int_0^x e^{-t}y(t)\,dt) \quad \Rightarrow \quad y=e^x+\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad y=e^x+e^x*y \quad \Rightarrow$$

$$L[y]=L[e^x]+L[e^x]L[y] \quad \Rightarrow \quad L[y]=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}L[y] \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{1}{s-1})L[y]=\frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{s-2}{s-1}L[y]=\frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad L[y]=\frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad y=L^{-1}[\frac{1}{s-2}]=e^{2x}$$

۱۳۹ـ گزینه «۲» با فرض $I_a=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin ax}{x}dx$ ، به محاسبه انتگرال مورد نظر در حالت کلی می‌پردازیم:

$$I_a=\int_0^\infty e^{-x}.\frac{\sin ax}{x}dx=(\int_0^\infty e^{-sx}.\frac{\sin ax}{x})\Big|_{s=1}=L[\frac{\sin ax}{x}]\Big|_{s=1}$$

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^\infty L[f]\,ds} I_a=(\int_S^\infty L[\sin at]\,ds)\Big|_{s=1}=(\int_S^\infty \frac{a}{s^2+a^2}ds)\Big|_{s=1}=(\lim_{T\to\infty}\int_S^T \frac{a}{s^2+a^2}ds)\Big|_{s=1}$$

$$I_a=(\lim_{T\to\infty}(\text{Arctag}\frac{s}{a})\Big|_s^T)\Big|_{s=1}=\lim_{T\to\infty}(\text{Arctag}\frac{T}{a}-\text{Arctag}\frac{s}{a})\Big|_{s=1}=(\frac{\pi}{2}-\text{Arctag}\frac{s}{a})\Big|_{s=1} \quad \Rightarrow$$

$$I_a=\frac{\pi}{2}-\text{Arctag}\frac{1}{a}$$

در اینصورت مسأله مفروض با جایگذاری $a=1$ در تساوی فوق بدست می‌آید:

$$I_a=\frac{\pi}{2}-\text{Arctag}\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad I_1=\frac{\pi}{2}-\text{Arctag}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

۱۴۰ـ گزینه «۱»

$$f(t)=\int_0^t (t-x)^4\cos 3x\,dx \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)\,g(x)dx=f*g} f(t)=t^4*\cos 3t$$

$$\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[f(t)]=L[t^4]L[\cos 3t]=\frac{4!}{s^5}\cdot\frac{s}{s^2+9} \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=\frac{24}{s^6+9s^4}$$

۱۴۱ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{\cos at\xrightarrow{L}\frac{s}{s^2+a^2}} L[\cos 2x]=\frac{s}{s^2+4}$$

۱۴۲ـ گزینه «۲»

$$F(s)=L[\frac{\sin 4x}{4}]=\frac{1}{4}L[\sin 4x] \xrightarrow{\sin at\xrightarrow{L}\frac{a}{s^2+a^2}} F(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{s^2+16}=\frac{1}{s^2+16}$$

۱۴۳ـ گزینه «۱»

$$y(t)=1+\int_0^t y(x)\sin(t-x)dx \xrightarrow{\int_0^t f(x)g(t-x)dx=f*g} y=1+y*\sin t \quad \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{1}{s}+L[y*\sin t]=\frac{1}{s}+L[y].\frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{1}{s^2+1})L[y]=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{s^2}{s^2+1}L[y]=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{s^2+1}{s^3} \quad \Rightarrow \quad y=L^{-1}[\frac{s^2+1}{s^3}]=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}] \quad \Rightarrow \quad y(t)=1+\frac{t^2}{2}$$

۱۴۴ـ گزینه «۴»

$$\phi(t)=2+\int_0^t e^{t-u}\phi(u)\,du \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} \phi=2+e^t*\phi \quad \Rightarrow$$

$$L[\phi]=\frac{2}{s}+L[e^t*\phi]=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}L[\phi] \quad \Rightarrow \quad (1-\frac{1}{s-1})L[\phi]=\frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{s-2}{s-1}L[\phi]=\frac{2}{s} \quad \Rightarrow$$

$$L[\phi]=\frac{2s-2}{s(s-2)} \quad \Rightarrow \quad \phi=L^{-1}[\frac{2s-2}{s(s-2)}]=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}] \quad \Rightarrow \quad \phi(t)=1+e^{2t}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۵ـ گزینه «۳» با توجه به تست شماره ۱۳۵ . داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\cdot e^{-am} \xrightarrow{(m=2\ \&\ a=3)} \int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+9}=\frac{\pi}{2\times 3}\cdot e^{-6}=\frac{\pi}{6e^6} \qquad ;(1)$$

از طرف دیگر؛

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}\,dx \xrightarrow{f\ \text{تابعی زوج}\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx=2\int_0^a f\,dx} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}\,dx=2\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+9}\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}\,dx=2\times\frac{\pi}{6e^6}=\frac{\pi}{3e^6}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۶ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}]=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{3}{s+2}] \quad \Rightarrow \quad f(t)=1-3e^{-t}+3e^{-2t}$$

یادآوری.

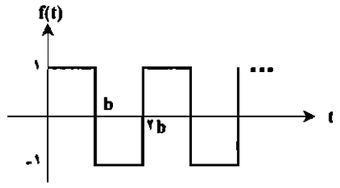
$$\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}=\frac{A(s+1)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s+1)}{s(s+1)(s+2)} \quad \Rightarrow$$

$$A(s+1)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s+1)=s^2+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s=0 \ ; & 2A=2 \ \Rightarrow \ A=1 \\ s=-1 \ ; & -B=3 \ \Rightarrow \ B=-3 \\ s=-2 \ ; & 2C=6 \ \Rightarrow \ C=3 \end{cases}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۷ـ گزینه «۱» تابع مفروض یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=2b$ است،

که در یک دوره تناوب دارای ضابطه زیر است:



$$f(t)=\begin{cases} 1 & ;0<t<b \\ -1 & ;b<t<2b \end{cases}$$

در نتیجه، طبق تعریف لاپلاس تابع متناوب با فرض $T=2b$ داریم:

$$L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-s(2b)}}\int_0^{2b} e^{-st}f(t)\,dt \qquad ;(1)$$

در اینصورت ابتدا به محاسبه انتگرال فوق بپردازیم:

$$J=\int_0^{2b} e^{-st}f(t)dt=\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt+\int_b^{2b} e^{-st}f(t)dt$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع } f(t)} J=\int_0^b e^{-st}\times 1\,dt+\int_b^{2b} e^{-st}\times(-1)\,dt=\int_0^b e^{-st}\,dt-\int_b^{2b} e^{-st}\,dt \quad \Rightarrow$$

$$J=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^b+\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_b^{2b}=-\frac{1}{s}(e^{-bs}-1)+\frac{1}{s}(e^{-2bs}-e^{-bs})=\frac{1}{s}(1-2e^{-bs}+e^{-2bs})$$

$$J=\int_0^{2b} e^{-st}f(t)\,dt=\frac{1}{s}(e^{-bs}-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2bs}}\cdot\frac{(1-e^{-bs})^2}{s}=\frac{(1-e^{-bs})(1-e^{-bs})}{s(1-e^{-bs})(1+e^{-bs})} \quad \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{1-e^{-bs}}{e^{\frac{bs}{2}}}}{\frac{1+e^{-bs}}{e^{-\frac{bs}{2}}}}=\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{bs}{2}}-e^{-\frac{bs}{2}}}{e^{\frac{bs}{2}}+e^{-\frac{bs}{2}}} \quad \Rightarrow \quad L[f(t)]=\frac{1}{s}\cdot\tanh(\frac{bs}{2})$$

یادآوری.

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} .$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۸ـ گزینه «۲» با توجه به راه حل ارائه شده در حل تست ۱۳۵ ، داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-am} \qquad ;(1)$$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه $f(x)=\frac{\cos mx}{1+x^2}$ تابعی زوج است، بدست می‌آوریم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=2\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx \xrightarrow{\text{با جایگذاری } a=1 \text{ در تساوی (1)}} I=2\frac{\pi}{2}e^{-m}=\pi e^{-m}$$

یادآوری. اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، در اینصورت؛

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx .$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۴۹ـ گزینه «۲»

$$F(s)=L[\frac{\sinh 5x}{5}]=\frac{1}{5}L[\sinh 5x] \xrightarrow{\sinh at \xrightarrow{L} \frac{a}{s^2-a^2}} F(s)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{s^2-25}=\frac{1}{s^2-25}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۰ـ گزینه «۴»

$$F(s)=L[\frac{x\sinh 2x}{4}]=\frac{1}{4}L[x\sinh 2x]$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s)=\frac{1}{4}\times-(L[\sinh 2x])'=-\frac{1}{4}(\frac{2}{s^2-4})' \quad \Rightarrow \quad F(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۱۵۱ـ گزینه «۲»

$$F(s)=L[\frac{x\sin 5x}{10}]=\frac{1}{10}L[x\sin 5x]$$

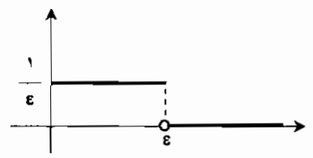
$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} F(s)=\frac{1}{10}\times-(L[\sin 5x])'=-\frac{1}{10}(\frac{5}{s^2+25})' \quad\Rightarrow\quad F(s)=\frac{s}{(s^2+25)^2}$$

۱۵۲ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}[\frac{s-3}{s^2-6s+25}]=L^{-1}[\frac{s-3}{(s^2-6s+9)+16}]=L^{-1}[\frac{s-3}{(s-3)^2+16}]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^{3t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+4^2}] \quad\Rightarrow\quad f(t)=e^{3t}\cos 4t$$

۱۵۳ـ گزینه «۲» با توجه به ضابطه $f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & ;0\le t\le\varepsilon\\ 0 & ;\varepsilon<t\end{cases}$، تابع



مفروض در واقع تابع ضربه حول $a=0$ است. در نتیجه $\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)$

نیز همان تابع دلتای دیراک حول نقطه $a=0$ می‌باشد. در اینصورت؛

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0} L[f_\varepsilon(t)]=L[\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)]=L[\delta(t)] \xrightarrow{L[\delta(t-a)]=e^{-as}\,:a=0} A=e^0=1$$

۱۵۴ـ گزینه «۴» با توجه به راه حل ارائه شده در حل تست ۱۳۵، داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-am} \qquad ;(1)$$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2+9}$ تابعی زوج است، بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(f:\text{ تابعی زوج }) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx=2\int_0^{\infty} f\,dx} I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}\,dx=2\int_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+3^2}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱) } (a=3\ \&\ m=2)} I=2\frac{\pi}{2\times 3}e^{-3\times 2}=\frac{\pi}{3}e^{-6}$$

۱۵۵ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}[\frac{s+1}{s^3+s}]=L^{-1}[\frac{s+1}{s(s^2+1)}]=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1-s}{s^2+1}] \quad\Rightarrow\quad f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}]$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=1+\sin t-\cos t$$

یادآوری.

$$\frac{s+1}{s(s^2+1)}=\frac{A}{S}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{(A+B)s^2+Cs+A}{s(s^2+1)} \quad\Rightarrow\quad s+1=(A+B)s^2+Cs+A \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ C=1\\ A=1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad (A=1\ \&\ B=-1\ \&\ C=1) \quad\Rightarrow\quad \frac{s+1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}+\frac{-s+1}{s^2+1}$$

۱۵۶ـ گزینه «۴» اگر $\delta(t-a)$ نمایش تابع دلتای دیراک حول نقطه a باشد، در اینصورت؛

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)\,dt=1 \xrightarrow{a=0} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

۱۵۷ـ گزینه «۴» با توجه به راه حل ارائه شده در حل تست ۱۳۵، داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-am} \qquad ;(1)$$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه $f(x)=\frac{\cos\omega x}{1+x^2}$ تابعی زوج است، بدست می‌آوریم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}dx=2\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\,dx \xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱) } (m=\omega\ \&\ a=1)} I=2\frac{\pi}{2}e^{-\omega}=\pi e^{-\omega}$$

۱۵۸ـ گزینه «۱»

$$y'+2y+\int_0^t y(x)\,dx=0 \quad\Rightarrow\quad L[y']+2L[y]+L[\int_0^t y(x)\,dx]=0$$

$$\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dx]=\frac{1}{s}L[f]} (sL[y]-y(0))+2L[y]+\frac{1}{s}L[y]=0 \xrightarrow{y(0)=1} (s+2+\frac{1}{s})L[y]=1 \quad\Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{s}{s^2+2s+1}=\frac{s}{(s+1)^2} \quad\Rightarrow\quad y(t)=L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} y(t)=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2}\right]=e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right] \quad\Rightarrow\quad y(t)=e^{-t}(1-t)$$

۱۵۹ـ گزینه «۲» با فرض $X=L[x]$ و $Y=L[y]$ داریم:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}+x-y=5\sin t\\ \frac{dy}{dt}+3\frac{dy}{dt}+x-y=e^t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}L[\frac{dx}{dt}]+2L[\frac{dy}{dt}]+X-Y=5\frac{1}{s^2+1}\\ L[\frac{dy}{dt}]+3L[\frac{dy}{dt}]+X-Y=\frac{1}{s-1}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{L[f']=sF(s)-f(0)\ \&\ x(0)=y(0)=0} \begin{cases}sX+2sY+X-Y=\frac{5}{s^2+1}\\ 2sX+3sY+X-Y=\frac{1}{s-1}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}(s+1)X+(2s-1)Y=\frac{5}{s+1}\\ (2s+1)X+(3s-1)Y=\frac{1}{s-1}\end{cases}$$

با حل دستگاه فوق به روش کرامر بدست می‌آوریم:

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}s+1 & \frac{5}{s^2+1}\\ 2s+1 & \frac{1}{s-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+1 & 2s-1\\ 2s+1 & 3s-1\end{vmatrix}}=-\frac{(s+1)(s^2+1)-5(2s+1)(s-1)}{s(s-2)(s-1)(s^2+1)}=\frac{(2s+1)}{s(s-2)(s^2+1)}-\frac{s+1}{s(s-2)(s-1)} \quad\Rightarrow$$

$$y=L^{-1}[Y]=L^{-1}\left[5\frac{(2s+1)}{s(s-2)(s^2+1)}-\frac{s+1}{s(s-2)(s-1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{-3}{s}+\frac{1}{s-2}+\frac{2}{s-1}+\frac{-5}{s^2+1}\right] \quad\Rightarrow$$

$$y=-3+e^{2t}+2e^t-5\sin t$$

۱۶۰ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[\delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t]\xrightarrow{L[(t-a)f(t)]=f(a)e^{-as}}F(s)=\sin(\frac{\pi}{2})\cdot e^{-\frac{\pi s}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

۱۶۱ـ گزینه «۱»

$$F(s)=L[(\sin t)e^{t+1}]=L[e.e^{t}(\sin t)]=eL[e^{t}.\sin t]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=e.L[\sin t]|_{s\mapsto s-1}=e\cdot\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s\mapsto s-1}\Rightarrow F(s)=\frac{e}{(s-1)^2+1}$$

۱۶۲ـ گزینه «۳»

$$F(s)=L[\cos(2t+\frac{\pi}{2})]\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha}F(s)=L[-\sin 2t]=-\frac{2}{s^2+4}$$

۱۶۳ـ گزینه «۳»

$$f(t)=L^{-1}\left[e^{-\pi s}.\frac{1}{(1+s)^2+1}\right]\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_\pi(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}}f(t)=u_\pi(t)L^{-1}\left[\frac{1}{(1+s)^2+1}\right]\Big|_{t\mapsto t-\pi}\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=u_\pi(t)(e^{-t}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right])\Big|_{t\mapsto t-\pi}\Rightarrow$$

$$f(t)=u_\pi(t)\ e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

۱۶۴ـ گزینه «۳»

$$y''+4y=\begin{cases}1 & ;0\le t<\pi\\ 0 & ;\ t>\pi\end{cases}\xrightarrow{\text{بازنویسی توابع بر حسب } u_a(t)}y''+4y=(u_0(t)-u_\pi(t))\times 1+0\Rightarrow$$

$$L[y'']+4L[y]=L[u_0(t)-u_\pi(t)]\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)}(s^2L[y]-sy(0)-y'(0))+4L[y]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\pi s}$$

$$\xrightarrow{y(0)=y'(0)=0}s^2L[y]+4L[y]=\frac{1-e^{\pi s}}{s}\Rightarrow(s^2+4)L[y]=\frac{1-e^{-\pi s}}{s}\Rightarrow L[y]=\frac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$$

۱۶۵ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}\right]=L^{-1}\left[e^{-2s}.\frac{2}{s^2-4}\right]\xrightarrow{L^{-1}[e^{-as}F]=u_a(t)L^{-1}[F]|_{t\mapsto t-a}}f(t)=u_2(t)L^{-1}\left[\frac{2}{s^2-4}\right]\Big|_{t\mapsto t-2}\Rightarrow$$

$$f(t)=u_2(t)(\sinh 2t)\Big|_{t\mapsto t-2}=u_2(t)\sinh 2(t-2)\Rightarrow f(t)=u_2(t)\ \sinh(2t-4)$$

۱۶۶ـ گزینه «۳» با توجه به نمودار تابع $f(t)$ داریم:

$$f(t)=(u_2(t)-u_4(t))\times 1\Rightarrow F(s)=L[f(t)]=L[u_2(t)-u_4(t)]=\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-4s}$$

۱۶۷ـ گزینه «۱»

$$f(t)=t+\int_0^t\sin(t-x)f(x)\,dx\xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=f*g}f(t)=t+\sin t*f(t)\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=L[t]+L[\sin t*f(t)]\xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]}L[f(t)]=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{1+s^2}\cdot L[f(t)]\Rightarrow$$

$$(1-\frac{1}{s^2+1})L[f(t)]=\frac{1}{s^2}\Rightarrow L[f(t)]=\frac{s^2+1}{s^4}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right]=t+\frac{t^3}{6}$$

۱۶۸ـ گزینه «۲»

$$F(s)=L[2e^{x}\int_0^x e^{-t}\cos^2 t\,dt]=2L[e^{x}.\int_0^x e^{-t}\cos^2 t\,dt]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=2L[\int_0^x e^{-t}\cos^2 x]\Big|_{s\mapsto s-1}$$

$$\xrightarrow{L[\int_0^t f\,dx]=\frac{1}{s}L[f]}F(s)=2(\frac{1}{s}L[e^{-x}\cos^2 x])\Big|_{s\mapsto s-1}=2\frac{1}{s-1}\cdot L[e^{-x}.\cos x]\Big|_{s\mapsto s-1}$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]|_{s\mapsto s-a}}F(s)=\frac{2}{s-1}(L[\cos^2 x]\Big|_{s\mapsto s+1})\Big|_{s\mapsto s-1}=\frac{2}{s-1}L[\cos^2 x]$$

$$\xrightarrow{\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}F(s)=\frac{2}{s-1}\cdot L\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]=\frac{2}{s-1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4})=\frac{1}{s-1}\cdot\frac{2s^2+4}{s(s^2+4)}\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{2s^2+4}{s(s-1)(s^2+4)}$$

۱۶۹ـ گزینه «۴»

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right]=L^{-1}\left[\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F]}f(t)=e^{t}L^{-1}\left[\frac{3s+10}{s^2-4}\right]=e^{t}\left[\frac{4}{s-2}+\frac{-1}{s+2}\right]=e^{t}(4e^{2t}-e^{-2t})\Rightarrow f(t)=4e^{2t}-e^{-t}$$

۱۷۰ـ گزینه «۱»

$$f(t)=L^{-1}[\text{Arc cotg}(s+4)]\xrightarrow{L^{-1}[F]=-\frac{1}{t}L^{-1}[F']}f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{-1}{1+(s+4)^2}\right]\Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{1}{t}L^{-1}\left[\frac{1}{1+(s+4)^2}\right]\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]}f(t)=\frac{1}{t}\cdot e^{-4t}L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]\Rightarrow f(t)=\frac{e^{-4t}}{t}\sin t$$

تست‌های تکمیلی فصل چهارم

۱ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=|\cos t|$ ، $t \geq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sinh \frac{\pi s}{2}} + s$

۲) $\frac{1}{(s^2+1)}(s-\cosh \frac{\pi s}{2})$

۳) $\frac{1}{s^2+1}(s+1)$

۴) $\frac{1}{(s^2+1)}(s+\frac{1}{\sinh \frac{\pi s}{2}})$

۲ـ جواب مسأله $y''+2y'-3y=\delta(t-2)$ ، $y'(0)=0$ ، $y(0)=0$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}u_2(t)(e^{t-2}-e^{-3(t-2)})$

۲) $\frac{1}{3}u_2(t)e^{-3t+6}$

۳) $\frac{1}{4}u_2(t)e^{t-2}$

۴) $\frac{1}{4}u_2(t)e^{t}$

۳ـ اگر $y(t)$ جواب معادله $y''-3y'-2y=0$ باشد در اینصورت تبدیل لاپلاس $y(t)$ در صورتی که $y(0)=1$ و $y'(0)=7$ کدام است؟

۱) $\frac{s+5}{s^2+2s+3}$

۲) $\frac{s-5}{s^2-2s-3}$

۳) $\frac{s+5}{s^2-2s-3}$

۴) $\frac{s-5}{s^2-2s+3}$

۴ـ اگر $y(t)$ جواب معادله $y''-3y'+2y=2e^{-t}$ باشد درصورتی که $y'(0)=-1$ و $y(0)=2$ مقدار تبدیل لاپلاس $y(t)$ به ازای $s=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$

۲) $\frac{2}{5}$

۳) $-\frac{2}{5}$

۴) $\frac{5}{2}$

۵ـ جواب مسأله زیر کدام است؟

$$y''-4y'=1 \; ; \; y(0)=0 \; , \; y'(0)=0$$

۱) $\frac{1}{6}(e^{4t}-4t)$

۲) $\frac{1}{16}(e^{4t}+1)$

۳) $\frac{1}{16}(e^{4t}+\frac{1}{4}t)$

۴) $\frac{1}{16}(e^{4t}-4t-1)$

۶ـ اگر $y(t)$ جواب معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+ty=0$ دارای تبدیل لاپلاس $Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ باشد آنگاه:

۱) $Y(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$

۲) $Y(s)=\frac{-y(0)}{s^2+1}$

۳) $Y(s)=c-y(0)\tan^{-1}s$

۴) $Y(s)=y(0)\frac{\pi}{2}\tan^{-1}s$

۷ـ جواب معادله انتگرال $\sin t=\int_0^t e^{t-x}f(u)du$ به ازای $t=\pi$ کدام است؟

۱) ۱

۲) صفر

۳) ۲-

۴) ۱-

۸ـ اگر $y(t)$ جوابی از معادله $y(t)-2=\int_0^t e^{t-u}y'(u)du$ باشد مقدار $y(t)$ در نقطهٔ $t=5$ برابر است با:

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) ۰

۹ـ مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-t}\sin 2t\,dt$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{2}$

۲) $-\frac{3}{5}$

۳) $\frac{2}{5}$

۴) $-\frac{2}{5}$

۱۰ـ جواب دستگاه $\begin{cases} y_1'+y_2'=\cos t+2\cos 2t \\ y_1''+y_1-y_2''-4y_2=0 \end{cases}$ با شرایط $y_1(0)=y_2(0)=0$ و $y_1'(0)=1$ و $y_2'(0)=2$ کدام است؟

۱) $y_2=\cos t \; , \; y_1=\sin t$

۲) $y_2=\sin 3t \; , \; y_1=\sin 2t$

۳) $y_2=\sin t \; , \; y_1=\cosh t$

۴) $y_2=\sin 2t \; , \; y_1=\sin t$

۱۱ـ اگر $y(t)$ جواب مسأله $ty''-y=0$ ، $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ ($L\{y\}$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ است.)

۱) $\big(L\{y\}\big)'-sL\{y\}=2$

۲) $s^2-L\{y\}=s-\big(L\{y\}\big)'$

۳) $s^2\big(\{y\}\big)'=1$

۴) $L\{y\}-\big(L\{y\}\big)'=-s$

۱۲ـ لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s-1}{(s+2)^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{\sqrt{t}}-6\sqrt{t})$

۲) $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{t}-3t^{\frac{3}{2}})$

۳) $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{\sqrt{t}}-3\sqrt{t})$

۴) هیچکدام

۱۳ـ پاسخ مسأله مقدار اولیه $y''-2y'+y=xe^x+e^x$ و $y'(0)=1$ و $y(0)=1$ کدام است؟

۱) $y=e^x(1+x^2+\frac{x^3}{3})$

۲) $y=e^x(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})$

۳) $y=e^x(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})$

۴) $y=e^x(1+x+\frac{x^2}{2})$

۱۴ـ اگر $f(t)=L^{-1}(\frac{1}{s^2(s-5)})$ مقدار $f''(0)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{5}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ۰

۱۵ـ اگر $L(f(t))=F(s)=\frac{e^{-s}-1}{s^2}$ ، $f(t)$ پیوسته قطعه‌ای و از مرتبه نمایی باشد کدام گزاره زیر در مورد f الزاماً درست است؟

۱) نقطه $(0,0)$ برای f نقطهٔ می‌نیمم است.

۲) $y=-1$ مجانب افقی f است.

۳) نقطهٔ $(0,0)$ برای f نقطه ماکزیمم است.

۴) معادله خط مماس بر نمودار f در مبدأ $y=t$ است.

۱۶ـ اگر $A=L(e^t\sin t)$ تبدیل لاپلاس $f(t)=\frac{t}{2}e^t\sin t$ کدام است؟

۱) $(s-1)A$

۲) $(s+1)A$

۳) $(s-1)A^2$

۴) $(s+1)A^2$

۱۷ـ مقدار انتگرال $I=\int_0^\infty te^{-2t}\cos^2 t\,dt$ برابر است با:

۱) صفر

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{3}$

۱۸ـ حاصل $I = \int_0^\infty te^{-t}\sin^2 t\,dt$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{25}$ ۲) $\frac{6}{25}$ ۳) $\frac{14}{25}$ ۴) $\frac{28}{25}$

۱۹ـ حاصل لاپلاس معکوس $F(s) = Ln\frac{s^2+4s}{s^2+9}$ برابر است با:

۱) $\frac{2(\cos 3t - e^{-2t}\cosh(2t)}{t}$ ۲) $\frac{1+e^{-4t}-\cos 3t}{t}$

۳) $\frac{2\cos 3t - e^{-4t}-1}{t}$ ۴) $\frac{2\sin 3t - 1 - e^{-4t}}{t}$

۲۰ـ لاپلاس معکوس تابع $F(s) = Ln\frac{s^2+s}{s^2+2s+2}$ برابر است با:

۱) $\frac{e^{-t}\cos t - e^{-t} - 1}{t}$ ۲) $\frac{2e^{-t}\cos t - e^{-t} - 1}{t}$

۳) $\frac{2e^{t}\cos t - e^{-t} - 1}{t}$ ۴) $\frac{2e^{-t}\sin t - e^{-t} - 1}{t}$

۲۱ـ تبدیل لاپلاس معکوس $sLn\frac{s}{s-1} - 1$ برابر است با:

۱) $\frac{1+te^t-e^t}{t}$ ۲) $\frac{-1-te^t+e^t}{t^2}$

۳) $\frac{1+te^t-e^t}{t^2}$ ۴) وجود ندارد.

۲۲ـ مسأله مقدار اولیه $2x'' = -8x + F_0\cos 2t$ و $x'(0) = 0$ و $x(0) = 10$ را حل کنید.

$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{\sin at}{a}$, $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos at$

۱) $x(t) = 5\sin 2t + \frac{F_0}{4}\cos 2t$ ۲) $x(t) = 5\cos 2t + \frac{F_0}{4}t\sin 2t$

۳) $x(t) = 10\sin 2t + \frac{F_0}{8}t\cos 2t$ ۴) $x(t) = 10\cos 2t + \frac{F_0}{8}t\sin 2t$

۲۳ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله $ty'' + (1-3t)y' - 3y = 0$ با شرط $y(0) = 2$ عبارتست از:

۱) $\frac{2}{s+3}$ ۲) $\frac{2}{s-3}$ ۳) $2(s-3)$ ۴) $\frac{2}{s}$

۲۴ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله $ty'' - ty' - y = 0$ با شرایط $y'(0) = 4$ و $y(0) = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{c}{(s+1)^2}$ ۲) $\frac{c}{(s-1)^2}$ ۳) $\frac{4}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{4}{(s-1)^2}$

۲۵ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله زیر عبارتست از:

$ty'' + (2t+3)y' + (t+3)y = 3e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

۱) $\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}$ ۲) $\frac{1}{(s+1)^2} + (s+1)$ ۳) $\frac{1}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{(s+1)^3}$

۲۶ـ تبدیل لاپلاس $f(t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$ برای $a,b > 0$ برابر است با:

۱) $Ln\frac{s-b}{s-a}$ ۲) $Ln\frac{s-a}{s-b}$ ۳) $Ln\frac{s+a}{s+b}$ ۴) $Ln\frac{s+b}{s+a}$

۲۷ـ لاپلاس معکوس $F(s) = \frac{1}{s-1}Ln\frac{s+1}{s-1}$ برابر است با:

۱) $\int_0^t \frac{e^t - e^{-t}}{u}\,du$ ۲) $\int_0^t \frac{e^{t-2u} - e^t}{u}\,du$ ۳) $\int_0^t \frac{e^{-t} - e^t}{u}\,dt$ ۴) $\int_0^t \frac{e^t - e^{-t}}{u}\,dt$

۲۸ـ تبدیل لاپلاس $\frac{\sin^2 t}{t}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}Ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$ ۲) $Ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$ ۳) $\frac{1}{2}Ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$ ۴) $\frac{1}{2}Ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$

۲۹ـ تبدیل لاپلاس $\frac{2\cos^2 t - 2e^{-t}}{t} = f(t)$ در $s = 2$ برابر است با:

۱) $Ln\frac{9}{2\sqrt{5}}$ ۲) $Ln\frac{9}{4\sqrt{2}}$ ۳) $Ln\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ۴) $Ln\frac{1}{4\sqrt{2}}$

۳۰ـ تبدیل لاپلاس $F(s) = L\left(\int_0^t \frac{\cos x - e^x}{x}dx\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{s+2}\tan^{-1}\frac{1}{s+2}$ ۲) $\frac{1}{s-2}\tan^{-1}\frac{1}{s-2}$ ۳) $\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s-2}$ ۴) $\frac{1}{s-2}\cot^{-1}$

۳۱ـ اگر $F(s) = L\left(\int_0^t \frac{\cos x - e^x}{x}dx\right)$ باشد مقدار $F(2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}Ln5$ ۲) $\frac{1}{2}Ln5$ ۳) $-\frac{1}{2}Ln5$ ۴) $-\frac{1}{4}Ln5$

۳۲ـ حاصل $\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}t}\frac{\sin t}{t}dt$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۳ـ مقدار $\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ برابر است با:

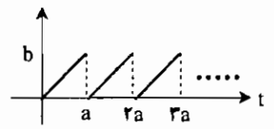
۱) $\frac{1}{4}Ln5$ ۲) $Ln2$ ۳) $-\frac{1}{2}Ln2$ ۴) $-\frac{1}{4}Ln5$

۳۴ـ تبدیل لاپلاس تابع متناوب زیر عبارتست از:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 2 \\ 1 & 2 < t < 4 \end{cases} \quad ; \quad f(t+4) = f(t)$$

۱) $\frac{e^{-2s}}{s(1+e^{-2s})}$ ۲) $\frac{1}{s(1-e^{-2s})}$ ۳) $\frac{1}{s(1+e^{-2s})}$ ۴) $\frac{e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})}$

۳۵ـ موج دندانه‌ای دارای نمودار مقابل است.



تبدیل لاپلاس آن عبارتست از:

۱) $\frac{b}{s^2}-\frac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$
۲) $\frac{b}{as^2}+\frac{be^{-as}}{s(1+e^{-as})}$
۳) $\frac{b}{as^2}-\frac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$
۴) $\frac{b}{as^2}+\frac{be^{-as}}{s(1-e^{-as})}$

۳۶ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t$ برابر است با:

۱) $-\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$
۲) $\frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$
۳) $-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$
۴) $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$

۳۷ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=u_\pi(t)\sin(t-\pi)$ برابر است با:

۱) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}e^{-\pi s}$
۲) $\frac{2s}{(s^2+1)^2}e^{-\pi s}$
۳) $\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}e^{-\pi s}$
۴) $-\frac{2s}{(s^2+1)^2}e^{-\pi s}$

۳۸ـ حاصل $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}e^{-t}\cos(2t)\,dt$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}$
۲) $\frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}}$
۳) $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$
۴) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

۳۹ـ لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{s-2}{s^2-4s+3}e^{-s}$ برابر است با:

۱) $u_1(t)e^{2t}\cosh t$
۲) $u_1(t)e^{2t-2}\cosh(t-1)$
۳) $u_1(t)e^{2(t+1)}\cosh(t+1)$
۴) $u_1(t)e^{2(t-1)}\cosh(t-1)$

۴۰ـ لاپلاس معکوس $F(s)=\frac{1-e^{-2s}}{(s-2)^2}$ برابر است با:

۱) $te^{2t}-u_2(t)(t-2)e^{2t-4}$
۲) $\frac{t}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}u_2(t)(t-2)e^{2t-4}$
۳) $te^{2t}-u_2(t)(t+2)e^{2t+4}$
۴) $te^{2t}+u_2(t)(t-2)e^{2t-4}$

۴۱ـ حاصل $L^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2-1)}\right)$ برابر است با:

۱) $u_1(t)(1-\cosh(t-1))$
۲) $-u_1(t)(1-\cosh(t-1))$
۳) $u_1(t)(1-\cosh(t+1))$
۴) $-u_1(t)(1-\cosh(t+1))$

۴۲ـ اگر $y''+2y'+2y=\begin{cases}1 & 0<t<\pi\\ 0 & \pi<t\end{cases}$ و $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ حاصل $\int_0^{\infty}5e^{-t}y(t)\,dt$ کدام است؟

۱) $-e^{-\pi}(1+\pi)$
۲) $4-e^{-\pi}(\pi+1)$
۳) $4+e^{-\pi}(1-\pi)$
۴) $4+e^{-\pi}(\pi-1)$

۴۳ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله $y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$ با شرایط اولیه $y'(0)=0$ و $y(0)=1$ عبارتست از:

۱) $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$
۲) $\frac{s+2+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$
۳) $\frac{s+2e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$
۴) $\frac{2+e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}$

۴۴ـ اگر y جواب معادله $y''+y'+2y=(2+\sin t)\delta(t-\frac{\pi}{2})$ و $y(0)=y'(0)=1$ باشد حاصل $\int_0^{\infty}y(t)\,dt$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $\frac{7}{4}$

۴۵ـ جواب معادله $y''+2y'+2y=(\sin t+2)\delta(t-\frac{\pi}{2})$ با شرایط $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ به ازای $t=\pi$ برابر است با:

۱) $-e^{-\pi}+3e^{-\frac{\pi}{2}}$
۲) $e^{-\pi}+3e^{-\frac{\pi}{2}}$
۳) $-e^{-\pi}$
۴) $-e^{-\pi}+2e^{-\frac{\pi}{2}}$

۴۶ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{s(s-1)^2}$
۲) $\frac{1}{s^2(s-1)}$
۳) $\frac{1}{s^2(s+1)}$
۴) $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$

۴۷ـ تبدیل لاپلاس $e^{-t}\cdot\frac{d}{dt}(\sin t*\cos t)$ کدام است؟

۱) $\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}$
۲) $\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)^2$
۳) $\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2$
۴) $\left(\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right)^2$

۴۸ـ معکوس لاپلاس $F(s)=\sinh^{-1}(\frac{1}{s})$ عبارتست از:

۱) $\int_0^t J_0(t)\,dt$
۲) $-\int_0^t J_0(t)\,dt$
۳) $\frac{1}{t}\int_0^t J_0(t)\,dt$
۴) $-\frac{1}{t}\int_0^t J_0(t)\,dt$

۴۹ـ اگر $f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<2\\ 1 & 2\le t<4\end{cases}$ و $f(t+4)=f(t)$ ، جواب مسأله مقدار اولیه زیر کدام است؟

$y''-y=f(t)*(1+u_2(t))\quad,\quad y(0)=y'(0)=0$

۱) $u_2(t)(2+\cosh(t-2)-t)$
۲) $u_2(t)(2+\sinh(t-2)-t)$
۳) $u_2(t)(\sinh t-t)$
۴) $u_2(t)(t-2-\sinh(t-2))$

۵۰ـ کدام گزینه در مورد تابع $f(t)=\sin\frac{1}{t}$ در بازه $(0,+\infty)$ درست است؟

۱) قطعه‌ای پیوسته است ولی از مرتبه نمایی نیست.
۲) قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه نمایی است.
۳) قطعه‌ای پیوسته نیست ولی از مرتبه نمایی است.
۴) نه قطعه‌ای پیوسته و نه از مرتبه نمایی است.

۵۱ـ اگر $L\big(f(t)\big)=\frac{4-2s^2}{s^3+s^2+1}$ مقدار $f'(0)$ برابر است با:

۱) -2
۲) 0
۳) 2
۴) 4

۵۲ـ اگر $F(s)=\frac{s^2+6}{s^3+4s^2+3s}$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد معادله مجانب افقی f کدام است؟

۱) $y=6$
۲) $y=0$
۳) $y=1$
۴) $y=2$

۵۳ـ لاپلاس معکوس $\frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$ عبارتست از:

۱) $t\sinh 2t$ ۲) $t\cosh 2t$ ۳) $-t\cosh 2t$ ۴) $-t\sinh 2t$

۵۴ـ لاپلاس معکوس $Ln\frac{s^2+1}{s^2+3s}$ عبارتست از:

۱) $\frac{1+e^{-3t}-2\cos t}{t}$ ۲) $\frac{2\cos t-3-e^{-3t}}{t}$ ۳) $\frac{1+e^{-3t}-\cos t}{t}$ ۴) $\frac{1+e^{3t}-2\cos t}{t}$

۵۵ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله $ty''-ty'+y=0$ و $y(0)=0$ و $y'(0)=5$ عبارتست از:

۱) $\frac{5}{s(s+1)}$ ۲) $\frac{5}{s^2}$ ۳) $\frac{c}{s^2}$ ۴) $\frac{5}{s(s-1)}$

۵۶ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=\int_0^t u\cos 2u\,du$ برابر است با:

۱) $\frac{4+2s^2}{s(s^2+4)^2}$ ۲) $\frac{2-s^2}{s(s^2+4)^2}$ ۳) $\frac{s^2-4}{s(s^2+4)^2}$ ۴) $\frac{4-s^2}{s(s^2+4)^2}$

۵۷ـ حاصل $L(\frac{\sin 3t}{t})$ برابر است با:

۱) $\tan^{-1}\frac{3}{s}$ ۲) $\cot^{-1}3s$ ۳) $\tan^{-1}\frac{s}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{3}{s}$

۵۸ـ اگر $F(s)=L(\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x})$ باشد مقدار $F(2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{2}{5}$ ۲) $\text{Ln}\frac{2}{5}$ ۳) $\text{Ln}\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}\frac{5}{2}$

۵۹ـ حاصل $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ برای $a>0$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2a}$ ۳) $a\pi$ ۴) $\frac{\pi}{2}a$

۶۰ـ اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $F(s)=\tan^{-1}\frac{s+1}{s^2+1}$ باشد، تبدیل لاپلاس $(\frac{t}{2})f$ عبارتست از:

۱) $2\tan^{-1}\frac{2s+4}{s^2+4}$ ۲) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2s+1}{4s^2+1}$ ۳) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2s+4}{s^2+4}$ ۴) $2\tan^{-1}\frac{2s+1}{4s^2+1}$

۶۱ـ اگر $f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<2\end{cases}$ و $f(t+2)=f(t)$ ، تبدیل لاپلاس f عبارتست از:

۱) $\frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$ ۲) $\frac{1}{s(1+e^{-s})}$ ۳) $\frac{1}{s(1-e^{-s})}$ ۴) $\frac{1}{s(1-e^{-2s})}$

۶۲ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ t^2-2t+2 & t\ge 1\end{cases}$ برابر است با:

۱) $(\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s})e^{-s}$ ۲) $(\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s})e^{-s}$ ۳) $(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2})e^{-s}$ ۴) هیچکدام

۶۳ـ حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}e^{-2t}\cos 2t\,dt$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{-\pi}}{4}$ ۲) $-\frac{e^{-\pi}}{8}$ ۳) $\frac{e^{-\pi}}{8}$ ۴) $-\frac{e^{-\pi}}{4}$

۶۴ـ لاپلاس معکوس $\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ کدام است؟

۱) $u_2(t)\sinh(t-4)$ ۲) $u_2(t)\sinh(2t-4)$ ۳) $u_2(t)\sinh(t-2)$ ۴) $u_2(t)\sinh(2t-4)$

۶۵ـ جواب معادله $y''-2y'+y=u_1(t)e^{t-1}$ با شرایط $y(0)=y'(0)=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}u_1(t)(t+1)^2$ ۲) $u_1(t)(t-1)^2$ ۳) $\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)^2$ ۴) $u_1(t)\frac{t^2}{2}$

۶۶ـ حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\,\delta(t-\frac{\pi}{4})dt$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۶۷ـ تبدیل لاپلاس $t\,\delta(t-3)$ برابر است با:

۱) $\frac{e^{-3s}}{s}$ ۲) $\frac{e^{-3s}}{s^2}$ ۳) $3e^{-3s}$ ۴) e^{-3s}

۶۸ـ جواب مسأله مقدار اولیه زیر کدام است؟

$$y''-4y'+4y=t^2\delta(t-2)\quad,\quad y(0)=y'(0)=0$$

۱) $4u_2(t)(t-2)e^{t-2}$ ۲) $4u_2(t)(t-2)e^{2t-4}$ ۳) $u_2(t)(t-2)e^{2t-4}$ ۴) $u_2(t)(t-2)e^{t-2}$

۶۹ـ لاپلاس معکوس $\frac{1}{s^2}\tan^{-1}\frac{1}{s}$ برابر است با:

۱) $t*\frac{\cos t}{t}$ ۲) $2t*\frac{\sin t}{t}$ ۳) $t*\frac{\sin t}{t}$ ۴) $1*\frac{\sin t}{t}$

۷۰ـ حاصل $t^{-\frac{1}{2}}*\sqrt{t}$ برابر است با:

۱) t ۲) πt ۳) $\frac{\pi}{2}t$ ۴) $\frac{\pi}{2}t^2$

آزمون (۱)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: C**

۱ـ جواب معادله دیفرانسیل $(x+y)dx+(2x+y)dy=0$ حول $x=0$:

۱) اکیداً صعودی است. ۲) اکیداً نزولی است. ۳) صعودی است. ۴) نزولی است.

۲ـ معادله دیفرانسیلی که $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ جواب عمومی آن باشد کدام است؟

۱) $y''+y'-2y=0$ ۲) $y''+2y'-y=0$ ۳) $y''-2y'+y=0$ ۴) $y''-y'-2y=0$

۳ـ معادله دیفرانسیلی که جواب عمومی آن به صورت $x=A\sin(\omega t+\alpha)$ باشد کدام است؟
(α و A پارامترهای اختیاری هستند.)

۱) $x''+\omega^2x'=0$ ۲) $x''-\omega^2x'=0$

۳) $x''+\omega^2x=0$ ۴) $x''+\omega^2x'=0$

۴ـ در معادله دیفرانسیل $y''+2xy'^2=0$ اگر $x\to\infty$ آنگاه y' به سمت کدام عدد میل خواهد کرد؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''-(x+1)y'+y=0$ عبارتست از:

۱) $y=e^x(c_1x+c_2)$ ۲) $y=c_1e^x+c_2(x+1)$ ۳) $y=e^{-x}(c_1x+c_2)$ ۴) $y=c_1e^x+c_2(x^2+1)$

۶ـ اگر معادله $(x^2-4)y''+(x+1)y'+y=0$ را به روش سری توان حول $x=0$ حل کنیم آنگاه شعاع همگرایی سری جواب، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ∞

۷ـ کران پایین شعاع همگرایی سری جواب معادله دیفرانسیل $y''+xy'-3y=0$ حول نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ∞

۸ـ اگر معادله دیفرانسیل $x^2(x+2)y''+xy'-3y=0$ دارای جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ باشد، آنگاه:

۱) شعاع همگرایی سری برابر ۲ است.

۲) شعاع همگرایی سری برابر $\sqrt{2}$ است.

۳) شعاع همگرایی سری برابر یک است.

۴) چنین جوابی را برای معادله دیفرانسیل مفروض نمی‌توان در نظر گرفت.

۹ـ کدامیک از توابع زیر دارای تبدیل لاپلاس نیست؟

۱) t^{2n} ۲) $\frac{1}{\sqrt[n]{t}}$ ۳) $\sin at$ ۴) $\cosh t$

۱۰ـ تبدیل لاپلاس $e^{2t}(t^2-t)$ کدام است؟

۱) $\frac{s}{(s-2)^3}$ ۲) $\frac{s}{(s-2)^2}$ ۳) $\frac{4-s}{(s-2)^3}$ ۴) $\frac{4}{(s-2)^3}$

آزمون (۲)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: C**

۱ـ معادله دیفرانسیلی که تابع $y=x^2+cx$ که در آن c پارامتر دلخواه است جواب آن باشد کدام است؟

۱) $xy'-y=x^2$ ۲) $y'-y=x$ ۳) $xy'+y=1$ ۴) $x^2y'+xy=1$

۲ـ تابع $y=c_1+c_2x^2+x^3$ جواب کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر است؟

۱) $y''+xy'=3x^2$ ۲) $xy''-y'=3x^2$ ۳) $x^2y''+y'=3x^2$ ۴) $y''-y'=3x$

۳ـ معادله دیفرانسیلی که جواب عمومی آن $y^2=3c(x+c)$ باشد عبارتست از:

۱) $y(y')^2+2y'-y^2=0$ ۲) $y(y')^2-2y'+y=0$

۳) $y^2(y')^2-2xy'+y^2=0$ ۴) $y(y')^2+2xy'-y=0$

۴ـ با توجه به اینکه $y_1=x$ یک جواب معادله $x^3y''+xy'-y=0$ است جواب دیگر معادله وقتی که $x\to\infty$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۵ـ رونسکین سه تابع $t+3$ و $t-1$ و $2t$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) $2t$

۶ـ شعاع همگرایی، جواب از نوع سری توانی حول نقطه $x=-1$ برای معادله دیفرانسیل $(9-x^2)y''+xy'-y=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ـ ضریب x^2 در جواب از نوع سری $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ برای معادله دیفرانسیل $(x^2+1)y''+e^xy'+(x-1)y=0$ با شرایط اولیه $y(0)=1=y'(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۸ـ مقدار a چه باشد تا معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+a(3x-1)y'+y=0$ دارای ریشه مضاعف صفر باشد؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۹ـ تبدیل لاپلاس تابع $e^{-2t}(\cos3t-2\sin3t)$ کدام است؟

۱) $\frac{s-4}{s^2+4s+13}$ ۲) $\frac{3-s}{s^2+4s}$ ۳) $\frac{s-2}{s^2+13}$ ۴) $\frac{s}{s^2+4s+13}$

۱۰ـ هرگاه $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ و $y''-y'+y=t$ آنگاه $L\{y\}$ برابر است با:

۱) $\frac{s}{(s^2-s+1)}$ ۲) $\frac{1}{s^2(s^2-s)}$ ۳) $\frac{1}{s^2(s^2-s+1)}$ ۴) $\frac{s-1}{s^2(s^2-s+1)}$

آزمون (۳)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: B**

۱ـ کدامیک از معادلات زیر دارای جوابی به صورت $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ است.

۱) $y'' + 9y = 0$ ۲) $y'' - 9y = 0$ ۳) $y'' + 3y = 0$ ۴) $y'' - 3y = 0$

۲ـ به ازای کدام مقدار a تابع $y = e^{ax}$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' - 3y = 0$ خواهد بود؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) -1 ۴) صفر

۳ـ اگر $y = x^m$ جواب معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ باشد m کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

۴ـ اگر e^{-x} و e^{2x} جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ باشد مقدار $a - b$ برابر است با:

۱) -3 ۲) -1 ۳) 3 ۴) 1

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y = \cos x$ عبارتست از:

۱) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 \sin x$

۲) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{2}(\sin x + \cos x)$

۳) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x$

۴) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$

۶ـ هرگاه معادله دیفرانسیل $y'' + (x-1)y' - y = 0$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ دارای جوابی به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ باشد آنگاه a_3 کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۷ـ اگر $P_n(x)$ و $P_m(x)$ دو چند جمله‌ای لژاندر باشند آنگاه:

۱) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\sin x) P_m(\sin x)\, dx = 0 \quad (n \neq m)$

۲) $\int_{-1}^{1} P_n(\sin x) P_m(\sin x)\, dx = 0 \quad (n \neq m)$

۳) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n^2(\sin x)\cos x\, dx = \frac{2}{2n+1}$

۴) $\int_{-1}^{1} P_n^2(\sin x)\cos x\, dx = \frac{2}{2n+1}$

۸ـ معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ با کدام تغییر متغیر به یک معادله بسل تبدیل می‌شود؟

۱) $t = 2x$ ۲) $t = \frac{1}{4}x$ ۳) $t = 4x$ ۴) $t = \frac{1}{2}x$

۹ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' = 1$ ، $y'(0) = 0$ ، $y(0) = 0$ کدام است؟

۱) $e^{4t} - 4t - 1$ ۲) $\frac{1}{16}e^{4t} - 1$ ۳) $\frac{1}{4}(e^{4t} - 4t - 1)$ ۴) $\frac{1}{16}(e^{4t} - 4t - 1)$

۱۰ـ تبدیل لاپلاس جواب مسأله $y'(0) = -1$ ، $y(0) = 1$ و $y'' + y' + y = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{s-1}{s^2}$ ۲) $\frac{1}{s^2 - 1}$ ۳) $\frac{s(s-1)}{s+2}$ ۴) $\frac{2s}{s^2+1}$

آزمون (۴)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: B**

۱ـ معادله دیفرانسیلی که جواب آن $y = c \sin x + x$ باشد کدام است؟

۱) $y' = (y-1)\tan x + x$ ۲) $y = (y'+1)\tan x + x$

۳) $y = (y'-1)\tan x + x$ ۴) $y = (y+1)\tan x + x$

۲ـ معادله دیفرانسیل خانواده ۲ـ پارامتری $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ عبارتست از:

۱) $y'' + 2y' - 3y = 0$ ۲) $y'' - 2y' + 3y = 0$

۳) $y'' + 2y' + 3y = 0$ ۴) $y'' - 2y' - 3y = 0$

۳ـ معادله دیفرانسیل خانواده دایره‌هایی که مرکزشان در مبداء واقع باشد عبارتست از:

۱) $xy' - y = 0$ ۲) $x + yy' = 0$

۳) $xy' + y = 0$ ۴) $x - yy' = 0$

۴ـ جواب خصوصی معادله $(D^3 + D^2 - 4)y = 8\sin(2x-1)$

۱) $\cos(2x-1) + \sin(2x-1)$ ۲) $2\cos(2x-1) - 3\sin(2x-1)$

۳) $\frac{1}{4}\cos(2x-1) + \frac{1}{2}\sin(2x-1)$ ۴) $\frac{1}{2}\cos(2x-1) + \frac{1}{2}\sin(2x-1)$

۵ـ در معادله دیفرانسیل $y'' + by' + cy = Ae^{ax}$ هرگاه $a \in R$ و $b^2 - 4c < 0$ آنگاه جواب خصوصی به ازای $x = 0$ برابر است با:

۱) $\frac{A}{b^2 + a + c}$ ۲) $\frac{A}{-a^2 + ab + c}$ ۳) $\frac{A}{a^2 + ab + c}$ ۴) $\frac{A}{a + b + c}$

۶ـ حاصل $\int_0^b x J_0(ax)\, dx \quad , \quad a > 0$ کدام است؟

۱) $bJ_1(ab)$ ۲) $\frac{b}{a}J_1(ab)$ ۳) $bJ_0(ab)$ ۴) $\frac{b}{a}J_0(ab)$

۷ـ معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ با تغییر متغیر $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) $u'' - [1 - \frac{1}{x^2}(\nu^2 + \frac{1}{4})]u = 0$ ۲) $x^2 u'' - [1 - \frac{1}{x^2}(\nu^2 + \frac{1}{4})]u = 0$

۳) $u'' + [1 - \frac{1}{x^2}(\nu^2 - \frac{1}{4})]u = 0$ ۴) $x^2 u'' + [1 - \frac{1}{x^2}(\nu^2 - \frac{1}{4})]u = 0$

۸ـ جوابی از معادله دیفرانسیل $y(x^3 - \frac{1}{4}) + 4x^2 y'' + xy' = 0$ عبارتست از:

۱) $J_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x)$ ۲) $J_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}(x^2)$ ۳) $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ۴) $J_{-\frac{1}{2}}(x^2)$

۹ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=|\sin t|$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{s^2+1}$ ۲) $\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}(\frac{1}{s})$ ۳) $\frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}s}}{1-e^{-\frac{\pi}{2}s}}(\frac{2}{s^2+4})$ ۴) $\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}(\frac{1}{s^2+1})$

۱۰ـ تبدیل معکوس $F(s)=\frac{1}{s^2-4s+5}$ کدام است؟

۱) $e^{2t}\sin t$ ۲) $\sin t$ ۳) $e^{2t}\sin 2t$ ۴) $e^{t}\sin 2t$

آزمون (۵)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ معادله دیفرانسیل سهمی‌های به معادله $x=cy^2+k$ کدام است؟

۱) $(y')^2-yy''=0$ ۲) $y'+yy''=0$ ۳) $yy''-y'=0$ ۴) $(y')^2+yy''=0$

۲ـ معادله دیفرانسیل حاصل از حذف پارامترهای c_1 و c_2 در $y=c_1x+c_2xLnx$ عبارتست از:

۱) $x^2y''-xy'+y=0$ ۲) $x^2y''-2xy'+y=0$ ۳) $x^2y''+2xy'+y=0$ ۴) $x^2y''+xy'+y=0$

۳ـ در معادله دیفرانسیل $y^2dx+(x-1)dy=0$ ، هرگاه $y\to 0$ میل کند آنگاه:

۱) x به سمت ∞ میل می‌کند. ۲) x به سمت صفر میل می‌کند. ۳) x به سمت $\frac{1}{2}$ میل می‌کند. ۴) x به سمت یک میل می‌کند.

۴ـ جواب خصوصی معادله $y''+y'+2y=e^{2x}\cos x$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۵ـ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+9y=\sec 3x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}Ln|\cos 3x|\cos 3x$ ۲) $\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}Ln|\sin 3x|\sin 3x$

۳) $\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{9}Ln|\cos 3x|\cos 3x$ ۴) $\frac{1}{3}x\cos 3x-\frac{1}{9}Ln|\sin 3x|\sin 3x$

۶ـ برای تابع لژاندر $P_n(x)$ کدام گزینه برقرار نیست؟

۱) $\int_0^1 P_5^2(x)dx=0$ ۲) $\int_0^1 P_2^2(x)dx=\frac{1}{5}$ ۳) $\int_{-1}^1 P_2(x)P_3(x)dx=0$ ۴) $\int_{-1}^1 P_4^2(x)dx=\frac{2}{9}$

۷ـ حاصل $\int_{-1}^1(x-x^3)P_{2n}(x)dx$ کدام است که آن $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر می‌باشد. $(n>0)$

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۸ـ اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مختلف معادله دیفرانسیل بسل مرتبه ν با پارامتر λ باشد، یعنی $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0$ و داشته باشیم: $F(x)=exp\{\int y_1(x)dy_2(x)-y_2(x)dy_1(x)\}$

کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

۱) $F(x)=kx^{\alpha}$ ۲) $F(x)=kx$ ۳) $F(x)=e^{\lambda x}$ ۴) $F(x)=\lambda x^{\nu}$

۹ـ تبدیل معکوس $F(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$ کدام است؟

۱) $F(t)=\frac{1}{3}[e^{t-2}-e^{-2t+4}]$ ۲) $F(t)=-\frac{1}{3}[e^{2t}u_2(t)+1]$

۳) $F(t)=\frac{1}{3}[e^{t-2}-e^{-2(t-2)}]u_2(t)$ ۴) $F(t)=\frac{1}{3}[e^{t-2}-e^{-2(t+2)}]u_1(t)$

۱۰ـ تبدیل معکوس $F(s)=arc\cot s$ برابر است با:

۱) $t\cos t$ ۲) $\frac{1}{t}\sin t$ ۳) $t\sin t$ ۴) $\frac{1}{t}\cos t$

آزمون (۶)

تعداد سؤالات: ۱۰ | **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** | **سطح آزمون: A**

۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y^2-9)dx+2x(y+3)dy=0$ وقتی که $x\to\infty$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ∞ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ در معادله دیفرانسیل $e^x dy-(1+e^{-2x})y\,dx=0$ اگر داشته باشیم $y(0)=1$ در اینصورت $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ عبارتست از:

۱) $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۲) $e^{\frac{\pi}{6}}$ ۳) صفر ۴) ۱

۳ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y-x}{2x}$ وقتی که $x\to 0^+$ کدام است؟

۱) e ۲) صفر ۳) Ln۲ ۴) ∞

۴ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=4e^{2x}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{x^2+2x}(e^{2x}+c_1x+c_2)$ ۲) $y=\frac{1}{x^2+x}(e^{2x}+c_1x+c_2)$

۳) $y=\frac{1}{x^2-2x}(e^{2x}+c_1x+c_2)$ ۴) $y=\frac{1}{x^2-x}(e^{2x}+c_1x+c_2)$

۵ـ معادله $2x^2y''-xy'+3y=0$ با تغییر متغیر $x=e^t$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) $2y''(t)-y'(t)+3y(t)=0$ ۲) $2y''(t)+3y'(t)+3y(t)=0$

۳) $2y''(t)+y'(t)+3y(t)=0$ ۴) $2y''(t)-3y'(t)+3y(t)=0$

۶ـ مقدار $\int_1^2 \frac{1}{x^2}J_3(x)\,dx$ برابر است با:

۱) $J_2(1)+2J_2(2)$ ۲) $J_4(1)-2J_4(2)$ ۳) $J_4(1)-\frac{1}{4}J_2(2)$ ۴) $J_2(1)-\frac{1}{4}J_2(2)$

۷ـ رابطه بین ضرایب ثابت، جواب از نوع سری $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ برای معادله دیفرانسیل $y''-xy'=0$ عبارتست از:

۱) $a_{n+2}=\frac{na_n}{2(n+1)}$ ۲) $a_{n+2}=\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$ ۳) $a_{n+2}=\frac{a_n}{2(n+1)}$ ۴) $a_{n+2}=\frac{(n-1)a_n}{(n+2)(n+1)}$

۸ـ حاصل $\int x^3J_0(x)\,dx$ عبارتست از:

۱) $(x^3-x)J_1(x)+x^2J_0(x)+c$ ۲) $(x^2-4x)J_1(x)+2x^2J_0(x)+c$

۳) $(x^3-1)J_1(x)+x^2J_0(x)+c$ ۴) $(x^3-1)J_1(x)-x^2J_0(x)+c$

۹ـ تبدیل معکوس تابع $F(s)=\frac{1}{s(s^2+1)}$ کدام است؟

۱) $1-\cos t$ ۲) $\sin t$ ۳) $e^t+\sin t$ ۴) $e^t+\cos t$

۱۰ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\int_0^t(t-\lambda)^3\sin\lambda\,d\lambda$ برابر است با:

۱) $\frac{3!}{s^4(s^2+1)}$ ۲) $\frac{3!}{s^2(s^2+1)}$ ۳) $\frac{3!}{s^2+1}$ ۴) $\frac{-3}{s^4(s^2+1)}$

آزمون (۷)

تعداد سؤالات: ۱۰ | **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** | **سطح آزمون: B**

۱ـ در معادله دیفرانسیل $(y^2-xy)dx+x^2dy=0$ با شرط $y(1)=-1$ مقدار $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}y(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ∞

۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$ با شرط $y(1)=1$ عبارتست از:

۱) نمایش یک نقطه ۲) دایره‌ای به مرکز مبدأ ۳) دو خط عمود بر هم ۴) دو خط موازی

۳ـ جواب معادله $y'=\frac{y}{x}+\sin^2\frac{y}{x}$ وقتی که $x\to 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ∞

۴ـ معادله $2(x+1)^2y''+(x+1)y'+3y=0$ با کدام تغییر متغیر به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود؟

۱) $x=e^t$ ۲) $t=\text{Ln}x$ ۳) $x=e^t-1$ ۴) $t=\text{Ln}x+1$

۵ـ معادله دیفرانسیل $(2x-3)^2y''+(2x-3)xy'+4y=0$ با تغییر متغیر $t=\text{Ln}(2x-3)$ به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

۱) $2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+2y=0$ ۲) $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=0$

۳) $2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$ ۴) $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=0$

۶ـ معادله دیفرانسیل $xy''-y'+xy=0$ با کدام تغییر متغیر به یک معادله بسل تبدیل می‌شود؟

۱) $y=\frac{u}{\sqrt{x}}$ ۲) $y=\sqrt{x}\,u$ ۳) $y=ux$ ۴) $y=ux^2$

۷ـ ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+y'+y=0$ عبارتست از:

۱) ۱- و ۰ ۲) ۱ و ۱ ۳) ۱ و ۰ ۴) ۰ و $\frac{1}{2}$

۸ـ دو جواب مستقل خطی معادله $x(x^2+3)y''-2y'+y=0$ کدام است؟

۱) $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۲) $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۳) $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=y_1(x)\text{Ln}x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۴) $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y_2=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$

۹ـ تبدیل لاپلاس جواب $x(t)$ به مسأله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} tx + y' = \cos t \\ x' + y = \sin t \end{cases} \quad ; \quad y(0) = x(0) = 0$$

۱) ce^{-s^2} ۲) $ce^{-\frac{s^2}{2}}$ ۳) ce^{s^2} ۴) $ce^{\frac{s^2}{2}}$

۱۰ـ جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$; $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ کدام است؟

۱) $x = \sqrt{2}e^{2t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}$ & $y = e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}$

۲) $x = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})e^{\sqrt{2}t} + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})e^{-\sqrt{2}t}$ & $y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$

۳) $x = e^t + e^{4t}$ & $y = e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}$

۴) $x = e^t + e^{-t}$ & $y = e^{2t} + e^{-t}$

آزمون (۸)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x + y)dx + (x + y - 1)dy$ عبارتست از:

۱) $x^2 + y^2 = 2y(1 - x) + c$ ۲) $x^2 + y^2 = x + y + c$

۳) $x^2 + y^2 = 2x(1 - y) + c$ ۴) $x^2 + y^2 = y - x + c$

۲ـ معادله دیفرانسیل $(3x + y - 1)dx + (x - y - 3)dy = 0$ با کدام تغییر متغیر به معادله جدا شدنی تبدیل می‌شود؟

۱) $y = vx$ ۲) $y = v(x - 1) - 2$ ۳) $y = vx - 2$ ۴) $y = vx + 2$

۳ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $x^2 dy + (xy - 1)dx = 0$ باشد، $\lim_{x \to 1} y(x)$ برای ثابت اختیاری $c = 1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $3x^2 y'' + xy' + y = 0$ وقتی که $x \to 0^+$، برابر است با:

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ کدام است؟

۱) $y = \frac{x}{x^2 + 1}(c_1 + c_2 x)$ ۲) $y = \frac{x}{x + 1}(c_1 x^2 + c_2 x^2)$

۳) $y = \frac{x}{x^2 + 1}(c_1 x + c_2)$ ۴) $y = \frac{1}{x + 1}(c_1 x^2 + c_2)$

۶ـ در حل معادله دیفرانسیل $y' + xy = 0$ به روش سری $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ضریب x^n کدام است؟

۱) $\frac{n!}{2^n}$ ۲) $(-1)^n \frac{2^n}{n!}$ ۳) $\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ ۴) $\frac{1}{n!}$

۷ـ رابطه بازگشتی در جواب از نوع سری فروبینوسی برای معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + x(2x + 1)y' + xy = 0$ کدام است؟

۱) $a_n = -\frac{n + 1}{n^2} a_{n-1}$ ۲) $a_n = -\frac{a_{n-1}}{n^2}$ ۳) $a_n = \frac{n a_{n-1}}{n^2 + 1}$ ۴) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2 + 1}$

۸ـ در مورد معادله دیفرانسیل $x^2(x - 2)y'' + y' - xy = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $x = 0$ و $x = 2$ نقاط منفرد منظم هستند.

۲) $x = 0$ و $x = 2$ نقاط منفرد نامنظم هستند.

۳) $x = 0$ نقطهٔ منفرد نامنظم و $x = 2$ نقطهٔ منفرد منظم است.

۴) $x = 0$ نقطهٔ منفرد منظم و $x = 2$ نقطهٔ منفرد نامنظم است.

۹ـ تبدیل لاپلاس تابع $J_1(t)$ کدام است؟

۱) $1 - \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$ ۲) $1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}$ ۳) $\frac{s^2}{\sqrt{s^2 + 1}}$ ۴) $\frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}$

۱۰ـ جواب معادله انتگرال روبرو کدام است؟ $y''(t) = -t + \int_0^t (t - u)y(u)du$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

۱) $\sinh t$ ۲) $-\sin t$ ۳) $\cos t$ ۴) $\sin t$

آزمون (۹)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $e^{۲x-y}dx+\frac{y+۳}{x^۲}dy=۰$ برابر است با:

۱) e^{y} ۲) ye^{x} ۳) $x^{۲}e^{y}$ ۴) $\frac{۱}{x}e^{y}$

۲ـ اگر $\mu(x,y)$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $(xy+x+y+۱)dy+(۱-x^{۲})dx=۰$ باشد آنگاه:

۱) $\mu(x,y)=\frac{۱}{x+y}$ ۲) $\mu(x,y)=\frac{۱}{x-y}$ ۳) $\mu(x,y)=\frac{۱}{x+۱}$ ۴) $\mu(x,y)=\frac{۱}{y+۱}$

۳ـ جواب معادله $xy'-y=x^{۲}+۳x$ وقتی که $x\to ۰^{-}$، عبارتست از:

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ∞

۴ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''+۱۶y=cos^{۲}۲x$ عبارتست از:

۱) $\frac{۱}{۱۶}(\frac{۱}{۲}x\cos ۲x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x)$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}(x\cos ۲x+\sin ۲x)$

۳) $\frac{۱}{۱۶}(\frac{۱}{۲}+x\sin ۴x)$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}(\frac{۱}{۲}+x\cos ۴x)$

۵ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-۴y'+۴y=\frac{۱}{x}e^{۲x}Lnx$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $۳e^{۲}-۱$ ۲) $e^{۲}$ ۳) $۲e^{۲}$ ۴) $e^{۲}+۲$

۶ـ معادله دیفرانسیل $x(x-۱)y''+(۳x-۱)y'+y=۰$ دارای جوابی به صورت زیر است:

۱) $y=۱-x+\frac{x^{۲}}{۲!}-\cdots$ ۲) $y=۱+x+x^{۲}+\cdots$ ۳) $y=۱-x+x^{۲}-\cdots$ ۴) $y=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}-\cdots$

۷ـ نقطه $x=۰$ برای معادله دیفرانسیل $(tan\,x)y'+xy=۰$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) نقطهٔ عادی ۲) نقطهٔ عادی نامنظم ۳) نقطهٔ غیرعادی منظم ۴) نقطهٔ غیرعادی نامنظم

۸ـ کدامیک از سری‌های توانی زیر یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+x^{۳}y=۰$ است؟

۱) $y=۱-\frac{x^{۶}}{۳۰}+\cdots$ ۲) $y=۱-\frac{x^{۵}}{۳۰}+\cdots$ ۳) $y=۱+\frac{x^{۶}}{۳۰}+\cdots$ ۴) $y=۱+\frac{x^{۵}}{۳۰}+\cdots$

۹ـ تبدیل لاپلاس $f(t)=\frac{۱}{\sqrt{t}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{s}}$ ۲) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ ۳) $\frac{\pi}{s}$ ۴) $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$

۱۰ـ تبدیل معکوس تابع $\frac{s+۱}{s^{۳}+s}$ برابر است با:

۱) $۱+\cos t-۲\sin t$ ۲) $۱-\cos t+\sin t$ ۳) $۱+\sin t$ ۴) $۱+\cos t-\sin t$

آزمون (۱۰)

تعداد سؤالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۲۰ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ اگر μ یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $y\frac{dx}{dy}+(۱+y)x-e^{y}=۰$ باشد آنگاه وقتی که $y\to-\infty$ میل می‌کند μ به سمت کدام یک از اعداد زیر میل می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) $-\infty$

۲ـ اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $(y-۲xy-۲x^{۲})dx+x^{۲}dy=۰$ باشد، در اینصورت $\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۱}{x^{۲}}y(x)$ عبارتست از:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ∞ ۴) ۲

۳ـ جوابی از معادله دیفرانسیل $ydx+(x-x^{۳}y^{۴})dy=۰$ که در شرط $y(-۱)=۱$ صدق کند کدام است؟

۱) $۲x^{۲}y^{۴}-x^{۲}y^{۲}=۱$ ۲) $x^{۲}y^{۲}+x^{۲}y^{۴}=۲$ ۳) $۲x^{۲}y^{۲}-x^{۲}y^{۴}=۱$ ۴) $x^{۲}y^{۴}-x^{۲}y^{۲}=۲$

۴ـ معادله دیفرانسیل حاصل از حذف $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ از تابع $y=c_۱e^{-x}+c_۲xe^{x}+c_۳e^{x}$ کدام است؟

۱) $y'''-y''-y'+y=۰$ ۲) $y'''+y''+y'+۱=۰$

۳) $y'''-y''+y'-y=۰$ ۴) $۲y'''-y''+y'-۳y=۰$

۵ـ یک جواب خصوصی معادله $(D^{۲}+۳D-۱)y=(x^{۲}+۳)e^{-۲x}$ عبارتست از:

۱) $(-x^{۲}+۲)e^{-۲x}$ ۲) $(x^{۲}+۲x-۱)e^{-۲x}$ ۳) $-(x^{۲}+۴)e^{-۲x}$ ۴) $(x^{۲}+x+۲)e^{-۲x}$

۶ـ مقدار m کدامیک از گزینه‌های زیر باشد تا عدد ۱ ریشه مضاعف معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $x^{۲}y''-mxy'+y=۰$ باشد؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۷ـ مقدار $\int_{۱}^{۲}x^{-۳}J_{۲}(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}J_{۳}(۲)+J_{۳}(۱)$ ۲) $J_{۳}(۱)=-\frac{۱}{۸}J_{۳}(۲)$ ۳) $\frac{۱}{۸}J_{۳}(۲)-J_{۳}(۱)$ ۴) $J_{۳}(۱)+\frac{۱}{۸}J_{۳}(۲)$

۸ـ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌توانند یک جواب برای معادله دیفرانسیل $x^{۲}y''-۳xy'+۴y=۰$ باشد؟

۱) $y=x^{-۱}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ ۲) $y=x^{۲}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ ۳) $y=x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ ۴) $y=x^{\frac{-۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$

۹ـ تبدیل معکوس تابع $\frac{۱}{s^{۳}(s^{۲}+۱)}$ برابر است با:

۱) $t^{۳}+۱-\cos t$ ۲) $\frac{۱}{۲}t^{۲}+\cos t-۱$ ۳) $t^{۲}+\cos t+۲$ ۴) $t^{۳}+۱-\cos tt$

۱۰ـ تبدیل معکوس تابع $\frac{۱}{s^{۲}(s^{۲}+۹)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}(t-\cos ۳t)$ ۲) $\frac{۱}{۹}(t-\sin ۳t)$ ۳) $\frac{۱}{۹}(t-\frac{۱}{۳}\sin ۳t)$ ۴) $\frac{t}{۹}(۲-\sin t)$

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (۱)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
آزمون (۲)				
۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۳»
آزمون (۳)				
۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
آزمون (۴)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۴»	۱۰ـ گزینه «۱»
آزمون (۵)				
۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۲»
آزمون (۶)				
۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۲»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۱»
آزمون (۷)				
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۱»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
آزمون (۸)				
۱ـ گزینه «۱»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۴»
آزمون (۹)				
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۴»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۲»
آزمون (۱۰)				
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۲»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»

سئوالات آزمون سراسری ۸۶

مهندسی برق

۱ـ مسیرهای قائم بر دسته منحنی $x^2 - y^2 - 2x + 4 - \lambda = 0$ کدام است؟

۱) $x - xy = C$ ۲) $y - xy = C$ ۳) $y + xy = C$ ۴) $x + xy = C$

۲ـ معادله $y'' + 4y = 4\cos 2x$ با شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ مفروض است. مقدار y در $x = \frac{\pi}{4}$ برابر است با:

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 0 ۴) $\frac{\pi}{4}$

۳ـ جواب عمومی معادله $xy'' + y' = x$ ، $x > 0$ ، برابر کدام است؟

۱) $y = C_1 \ln x + C_2 + \frac{1}{4}x^2$ ۲) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{x} + C_2$

۳) $y = x\ln x + C_1 \ln x + C_2$ ۴) $y = C_1 \ln x + C_2 + \frac{x^2}{2}$

۴ـ پاسخ‌های سری معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0$ را در نظر می‌گیریم. به ازای کدام مقدار مثبت a شعاع همگرایی پاسخ معادله در اطراف نقطه $x = -1$ برابر $R = 2$ خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ جواب معادله انتگرالی $y(t) + \int_0^t y(t-\tau)\tau\cos\tau\, d\tau = \sin t$ کدام است؟

۱) $t + t\sin t$ ۲) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) - \frac{t}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{t}{3}$ ۴) $\frac{t}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)$

۶ـ در دستگاه معادلات دیفرانسیل داده شدهٔ زیر، جواب y کدام است؟

$$\begin{cases} y'' + z + y = 0 \\ z' + y' = 0 \\ y(0) = 0 \ ; \ y'(0) = 0 \ , \ z(0) = 1 \end{cases}$$

۱) $-\frac{1}{2}x^2$ ۲) $\frac{1}{2}x^2$ ۳) $1 - \frac{1}{2}x^2$ ۴) $1 + \frac{1}{2}x^2$

مهندسی عمران

۷ـ جواب معادله $y' = \frac{4y + x}{x}$ وقتی که $x \to 0$ برابر است با:

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ∞

۸ـ دو جواب مستقل معادله $4xy'' + 3y' + 3y = 0$ به صورت کدامیک از گزینه‌های زیر هستند؟

۱) $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۲) $y_1 = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ۴) $y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$y'' - ۳y' + ۳y = ۲ \circ \cos x$$

۱) $y = C_۱e^{-x} + C_۲e^{-۳x} + \cos x$
۲) $y = C_۱e^{x} + C_۲e^{۳x} + ۲\cos x$
۳) $y = C_۱e^{x} + C_۲e^{۳x} + ۲\cos x - ۴\sin x$
۴) $y = C_۱e^{x} + C_۲e^{۳x} + \cos x - ۲\sin x$

۱۰ـ معادله مسیر قائم خانواده منحنی‌های $y^۲ = Cx^۳$ چیست؟

۱) $۳x^۲y + y^۳ = k$
۲) $۲x^۲ + ۳y^۲ = k^۲$
۳) $x^۲y + y^۲ = k^۲$
۴) $۳x^۲y + ۲y^۲ = k$

۱۱ـ جواب معادله انتگرال $y(t) = ۲t - ۳\int_{\circ}^{t} y(z)\sin(t-z)\,dz$ کدامیک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $y(t) = t + \frac{۳}{۲}\sin ۲t$
۲) $y(t) = ۱ + \frac{۱}{۲}\sin ۲t$
۳) $y(t) = ۱ - \cos t$
۴) $y(t) = t - \cos t$

مهندسی نفت

۱۲ـ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ۲y' + ۳y = \circ$ با توجه به شرایط اولیه $y(\circ) = ۲$ و $y'(\circ) = -۳$ برابر است با:

۱) $y = ۲e^{-x}\cos\sqrt{۲}\,x - \frac{e^{-x}}{\sqrt{۲}}\sin\sqrt{۲}\,x$
۲) $y = e^{-x}(\cos\sqrt{۲}\,x - ۵\sqrt{۲}\sin\sqrt{۲}\,x)$
۳) $y = e^{-x}(۲\cos\sqrt{۲}\,x - ۵\sin\sqrt{۲}\,x)$
۴) $y = e^{-x}(۲\cos\sqrt{۲}\,x + \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\sin\sqrt{۲}\,x)$

۱۳ـ جواب عمومی معادله $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^۲}{x} + y$ برابر است با:

۱) $y = \frac{-x}{\mathrm{Ln}|x| + c}$
۲) $y = \frac{\mathrm{Ln}|x| + c}{x}$
۳) $y = \frac{-x}{\mathrm{Ln}|x|} + c$
۴) $y = -x + \mathrm{Ln}|x| + c$

۱۴ـ تبدیل لاپلاس $s^{-\frac{۱}{۲}}$ کدامیک از عبارات داده شده است؟

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}s$
۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲s}$
۳) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
۴) $\frac{۲\sqrt{\pi}}{s}$

۱۵ـ پنج جمله اول غیر صفر بسط به سری جواب مسئله $\begin{cases}(۱+x^۲)y'' + xy' + y = \circ \\ y(\circ) = -۱,\ y'(\circ) = a(\neq \circ)\end{cases}$ کدام است؟

۱) $-۱ + ax + \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{a}{۳}x^۳ - \frac{۵}{۴!}x^۴$
۲) $-۱ + ax + \frac{x^۲}{۲!} - \frac{a}{۳!}x^۳ - \frac{۶}{۴!}x^۴$
۳) $-۱ + ax + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{a}{۳!}x^۳ - \frac{۶}{۴!}x^۴$
۴) $-۱ + ax + \frac{x^۲}{۲!} - \frac{a}{۳!}x^۳ + \frac{۵}{۴!}x^۴$

۱۶ـ چند جمله‌ای لژاندر درجه nام قابل نمایش به صورت $P_n(x) = \frac{۱}{(n!)۲^n}\frac{d^n(x^۲-۱)^n}{dx^n}$ است. اگر a و b و c ثابت باشند، مقدار $I = \int_{-۱}^{۱}(x^۳ + ax^۲ + bx + c)P_۲(x)\,dx$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۲a}{۱۵}$
۳) $\frac{۴a}{۱۵}$
۴) $\frac{۲a + c}{۵}$

مهندسی معدن

۱۷ـ جواب خصوصی معادله $y''' - ۳y' = x + ۳\cos x$ کدام است؟

۱) $y_p = A_\circ x + B\cos x$
۲) $y_p = A_\circ x + B\cos x + C\sin x$
۳) $y_p = A_\circ x + A_۱ + B\cos x + C\sin x$
۴) $y_p = x(A_\circ x + A_۱) + B\cos x + C\sin x$

۱۸ـ تابع $f(t) = \begin{cases}\sin t & , \quad \circ \le t < ۲\pi \\ \sin t + \cos t & , \quad t \ge ۲\pi\end{cases}$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس f را پیدا کنید.

۱) $\frac{۱}{s^۲+۱}e^{۲\pi s}$
۲) $\frac{s+۱}{s^۲+۱}e^{۲\pi s}$
۳) $\frac{۱+se^{-۲\pi s}}{s^۲+۱}$
۴) $\frac{s+se^{-۲\pi s}}{s^۲+۱}$

۱۹ـ کدام گزینه جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + xy' - y = \circ$ است؟

۱) $y = c_۱x + c_۲x^{-۱}$
۲) $y = c_۱e^{x} + c_۲e^{-x}$
۳) $y = c_۱e^{x} + c_۲xe^{-x}$
۴) $y = c_۱\cos x + c_۲x\sin x$

۲۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' + y'' + y' + y = \circ$ را پیدا کنید.

۱) $y = c_۱ + c_۲e^{x} + c_۳xe^{x}$
۲) $y = c_۱e^{x} + c_۲xe^{x} + c_۳e^{-x}$
۳) $y = c_۱e^{x} + c_۲\cos x + c_۳\sin x$
۴) $y = c_۱x + c_۲\cos x + c_۳\sin x$

۲۱ـ جواب معادله $y(x) = e^{x} + \int_{\circ}^{x} e^{x-t}y(t)\,dt$ برابر است با:

۱) $e^{۲x}$
۲) e^{-x}
۳) $e^{-۲x}$
۴) $xe^{۲x}$

۲۲ـ در معادله $y(x^۲y^۲ + ۲xy + ۱)\,dx + x(x^۲y^۲ - ۲xy + ۱)\,dy = \circ$ با دسته‌بندی مناسب، کدامیک از عبارات داده شده جواب عمومی است؟

۱) $xy + \frac{۱}{xy} + ۲\mathrm{Ln}\left|\frac{x}{y}\right| = c$
۲) $xy + \frac{۱}{xy} + ۲\mathrm{Ln}|x||y| = c$
۳) $xy - \frac{۱}{xy} + \mathrm{Ln}|x| - \mathrm{Ln}|y| = c$
۴) $xy - \frac{۱}{xy} + ۲\mathrm{Ln}|x| - ۲\mathrm{Ln}|y| = c$

۲۳ـ در جستجوی جواب حول $x_\circ = \circ$، معادله شاخص معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + x(\frac{۱}{۴} + ۳x)y' + (x - \frac{۱}{۴})y = \circ$ کدامیک از گزینه‌های داده شده است؟

۱) $۲r^۲ - r - ۱ = \circ$
۲) $۲r^۲ + r + ۱ = \circ$
۳) $۲r^۲ + r - ۱ = \circ$
۴) $r(r-۱) - \frac{۱}{۲}r + \frac{۱}{۲} = \circ$

مهندسی مکانیک

۲۴ـ با تغییر متغیر $z = x^۲$ معادله دیفرانسیل زیر به کدام معادله تبدیل می‌شود؟

$$x^۲y'' - ۳xy' + ۴(x^۴ - ۱)y = \circ \qquad (\frac{dy}{dz} = y)$$

۱) $z^۲\ddot{y} - z\dot{y} + (z^۲-۱)y = \circ$
۲) $z^۲\ddot{y} + z\dot{y} + (z^۲-۱)y = \circ$
۳) $۲z^۲\ddot{y} - ۳z\dot{y} + ۲(z^۲-۱)y = \circ$
۴) $z\ddot{y} - ۳\sqrt{z}\dot{y} + ۴(z^۲-۱)y = \circ$

۲۵ـ جوابی از معادله دیفرانسیل $(x^2 - y)dx + (x + x^2 y)dy = 0$ را که از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد در نظر می‌گیریم. اگر $x = 2$ آنگاه از این جواب برای y چه مقداری به دست می‌آید؟

۱) $y = -1$ یا $y = 2$ ۲) $y = 0$ یا $y = 2$ ۳) $y = 0$ یا $y = -1$ ۴) $y = 0$ یا $y = 3$

۲۶ـ کدامیک از سری‌های توانی زیر می‌تواند جوابی برای معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' - (x+1)y = 0$ باشد؟

۱) $y = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ۲) $y = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ۳) $y = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ۴) $y = x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

۲۷ـ چند جمله‌ای لژاندر درجه n ام $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ است. مقدار $\int_{-1}^{1} (x^2 + ax + b) P_2(x)\, dx$ کدام است؟

۱) $\frac{b}{8}$ ۲) $\frac{b}{4}$ ۳) صفر ۴) b

۲۸ـ تابع $y = x^2 e^x$ جواب کدام معادله دیفرانسیل است؟

۱) $y''' - 2y'' + y' = 0$ ۲) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

۳) $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$ ۴) $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

۲۹ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ کدام است؟

۱) $-\operatorname{Arc}\tan s$ ۲) $-\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{s}$ ۳) $\operatorname{Arc}\tan \frac{1}{s}$ ۴) $\operatorname{Arc}\tan s - \frac{\pi}{2}$

۳۰ـ جواب عمومی معادله $y'' + 3y' + 2y = (x+2)e^{-x}$ کدام است؟

۱) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} - xe^{-x}$ ۲) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} x e^{-x}$

۳) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$ ۴) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - 2xe^{-x}$

۳۱ـ جواب معادله دیفرانسیل $y^{(4)} + 4y = 0$ کدام است؟

۱) $y = e^{2x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + e^{-2x}[c_3 \cos x + c_4 \sin x]$

۲) $y = e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + e^{x}[c_3 \cos x + c_4 \sin x]$

۳) $y = e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + e^{-2x}[c_3 \cos x + c_4 \sin x]$

۴) $y = e^{x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + e^{-x}[c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x]$

مهندسی مکاترونیک

۳۲ـ جواب عمومی معادله $x^2 y'' - 5xy' + 4y = 0$ کدام است؟

۱) $y = c_1 x + c_2 x^2$ ۲) $y = c_1 x - c_2 x^2$ $x > 0$

۳) $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^2$ $x > 0$ ۴) $y = c_1 \sqrt{x} + c_2 x^3$ $x > 0$

۳۳ـ کدام توابع، جواب مسأله $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$ و $x + \frac{d^2 y}{dt^2} = -2$ و $y + \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$ هستند؟

۱) $x = \cos t + \cosh t,\ y = \sin t + \sinh t$ ۲) $x = \cos t - \sinh t,\ y = -\sin t - \sinh t$

۳) $x = -\sin t + \sinh t,\ y = -\cos t - \cosh t$ ۴) $x = \cos t - \cosh t,\ y = -\sin t + \sinh t$

۳۴ـ تابع $F(s) = \frac{3s}{s^2 + 4s + 5}$ تبدیل لاپلاس کدام تابع است؟

۱) $e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$ ۲) $e^{2t}(3\cos t - 2\sin t)$ ۳) $e^{-2t}(3\cos t - 6\sin t)$ ۴) $e^{-2t}(6\cos t - 3\sin t)$

۳۵ـ تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{-2t}\cos 3t$ کدام است؟

۱) $\frac{s+2}{s^2 + 4s + 13}$ ۲) $\frac{s}{s^2 + 2s + 6}$ ۳) $\frac{s}{s^2 + 2s + 7}$ ۴) $\frac{s}{s^2 + 4s + 14}$

۳۶ـ اگر $s > 0$، تابع $\frac{s}{s^2 + a^2}$، تبدیل لاپلاس کدام تابع است؟

۱) e^{-at} ۲) $\cos at$ ۳) e^{at} ۴) $\sin at$

۳۷ـ معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2$ به کدام معادله قابل تبدیل است؟

۱) $\frac{du}{dx} - P(x)u - Q(x) = 0$ ۲) $\frac{du}{dx} - P(x)u + Q(x) = 0$

۳) $\frac{du}{dx} + P(x)u + 2Q(x) = 0$ ۴) $\frac{du}{dx} + 2P(x)u + 2Q(x) = 0$

پاسخنامه آزمون سراسری ۸۶

مهندسی برق

۱ـ گزینه «۲»

$x^2-y^2-2x=\lambda-4 \xrightarrow{\text{حذف ثابت به کمک مشتقگیری: گام اول}} 2x-2yy'-2=0 \Rightarrow yy'=x-1$

$\xrightarrow{\text{گام دوم: } y'\mapsto -\frac{1}{y'}} y(-\frac{1}{y'})=x-1 \Rightarrow -\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow -\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x-1}$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{; جدا شونده}} -Ln(cy)=Ln(x-1) \Rightarrow \frac{1}{cy}=x-1 \Rightarrow \frac{1}{c}=(x-1)y \Rightarrow$

$xy-y=\frac{1}{c} \Rightarrow y-xy=C \quad ;(-\frac{1}{c}=C)$

۲ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به فرمول (۲-۱۰) فصل ۲}} y_h=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$

$y_p=A\cos(2x)+B\sin(2x) \xrightarrow{\times x} y_p=A\cos(2x)+Bx\sin(2x)$

$y_p'=A\cos(2x)-2Ax\sin(2x)+B\sin(2x)+2B\cos(2x)$

$y_p''=-4A\sin(2x)-4Ax\cos(2x)+4B\cos(2x)-4Bx\sin(2x)$

$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در } y''+4y=4\cos 2x} y_p''+4y_p=4\cos(2x) \Rightarrow -4A\sin(2x)+4B\cos(2x)=4\cos(2x) \Rightarrow$

$\begin{cases}-4A=0 \Rightarrow A=0\\ 4B=4 \Rightarrow B=1\end{cases} \Rightarrow y_p=x\sin(2x)$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$y=y_h+y_p=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)+x\sin(2x)$

$y'=-2c_1\sin(2x)+2c_2\cos(2x)+\sin(2x)+2x\cos(2x)$

$y(0)=1 \Rightarrow c_1=1$

$y'(0)=0 \Rightarrow 2c_2=0 \Rightarrow c_2=0 \Rightarrow y=\cos(2x)+x\sin(2x)$

$y(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

۳ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله مرتبه دوم فاقد y است. در اینصورت؛

$xy''+y'=x \xrightarrow{y'=p \Rightarrow y''=p'} xp'+p=x \Rightarrow p'+\frac{1}{x}p=1$

$\xrightarrow{\text{معادله خطی مرتبه اول نسبت به } p \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{Lnx}=x \quad \&$

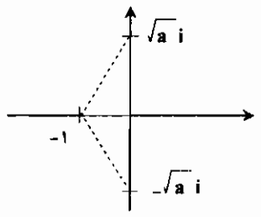
$p=\frac{1}{x}\{\int x\times 1\,dx+c\}=\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}+c) \Rightarrow p=\frac{x}{2}+\frac{c}{x}$

$\xrightarrow{p=y'} \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}+\frac{c}{x} \Rightarrow y=\int(\frac{x}{2}+\frac{c}{x})\,dx \Rightarrow y=\frac{x^2}{4}+cLnx+c_2$

۴ـ گزینه «۳»

$(a+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0 \Rightarrow y''+\frac{2x}{a+x^2}y'+\frac{4x^2}{a+x^2}y=0$

می‌دانیم شعاع همگرایی سری جواب عمومی، حداقل برابر R_P، R_Q است. برای محاسبه R_P و R_Q، با توجه به ضابطه‌های $P(x)=\frac{2x}{a+x^2}$ و $Q(x)=\frac{4x^2}{a+x^2}$ و اینکه سری جواب حول نقطه $x_0=-1$ مدنظر است، کافیست می‌نیمم فاصله ریشه‌های مخرج توابع P و Q از نقطه مذکور بدست آید. و از آنجائیکه ریشه‌های معادله $a+x^2=0 \;;\; a>0$ برابر مقادیر $x=\pm\sqrt{a}\,i$ است، بنابراین فاصله این نقاط تا نقطه $x_0=-1$ برابر است با:



$R_P=R_Q=\sqrt{1+a}$

و از آنجا $R=\min\{R_P,R_Q\}=\sqrt{1+a}$.

از طرف دیگر طبق فرض مسأله $R=2$ می‌باشد. در نتیجه؛

$\sqrt{1+a}=2 \Rightarrow 1+a=4 \Rightarrow a=3$

۵ـ گزینه «۴» از یک طرف؛

$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} L[t\cos t]=-(L[\cos t])'=-(\frac{s}{s^2+1})'=-\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} \quad ;(1)$

در اینصورت؛

$y(t)+\int_0^t y(t-\tau)\tau\cos\tau\,d\tau=\sin t \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)dx=f*g} y+y*t\cos t=\sin t \Rightarrow$

$L[y]+L[y*t\cos t]=L[\sin t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[y]+L[y]L[t\cos t]=L[\sin t] \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} L[y]-L[y]\cdot\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L[y](1-\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2})=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$

$L[y]\cdot\frac{s^4+3s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L[y]=\frac{s^2+1}{s^2(s^2+3)} \Rightarrow$

$y=L^{-1}[\frac{s^2+1}{s^2(s^2+3)}]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{3}}{s^2}+\frac{\frac{2}{3}}{s^2+3}]=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t$

۶ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$y''+z+y=0 \xrightarrow{x=0} y''(0)+z(0)+y(0)=0 \xrightarrow{z(0)=1\ \&\ y(0)=0} y''(0)=-1 \quad ;(1)$

در اینصورت؛

$\begin{cases}y''+z+y=0\\ z'+y'=0\end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dx}\text{ (طرفین)}} \begin{cases}y'''+z'+y'=0\\ z'+y'=0\end{cases} \Rightarrow y'''=0 \Rightarrow$

$\frac{dy''}{dx}=0 \Rightarrow y''=c \xrightarrow{x=0} y''(0)=c \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} c=-1 \Rightarrow y''=-1 \Rightarrow$

$\frac{dy'}{dx}=-1 \Rightarrow y'=-x+c_1 \xrightarrow{x=0} y'(0)=c_1 \xrightarrow{y'(0)=0} c_1=0 \Rightarrow y'=-x \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx}=-x \Rightarrow y=-\frac{x^2}{2}+c_1 \xrightarrow{x=0} y(0)=c_2 \xrightarrow{y(0)=0} c_2=0 \Rightarrow y=-\frac{x^2}{2} \Rightarrow$

مهندسی عمران

۷ـ گزینه «۲» حل اول:

$$y' = \frac{2y+x}{x} = \frac{2y}{x} + 1 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{2}{x}y = 1$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x) = e^{\int(\frac{-2}{x})\,dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \qquad \&$$

$$y = -\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\{\int -\frac{1}{x^2}\times 1\,dx + c\} = x^2(-\frac{1}{x}+c) \quad \Rightarrow \quad y = -x + cx^2 \xrightarrow{x\to 0} \lim_{x\to 0} y = 0$$

حل دوم:

$$y' = \frac{2y+x}{x} \xrightarrow{\text{فرم سه همگن}, (\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu')} u + xu' = 2u + 1 \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = u + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \ln(u+1) = \ln cx \quad \Rightarrow \quad u + 1 = cx \quad \Rightarrow$$

$$u = cx - 1 \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{y}{x} = cx^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = cx^2 - x \xrightarrow{x\to 0} \lim_{x\to 0} y = 0$$

۸ـ گزینه «۳» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \frac{3}{4}$ و $q_0 = 0$ است. و همچنین ریشه‌های معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{4}r = 0$ برابر مقادیر $r_1 = \frac{1}{4}$ و $r_2 = 0$ می‌باشد. در اینصورت از آنجائیکه تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = \frac{1}{4}$ یک عدد غیرصحیح است، با توجه به قضیه $\overline{II}$ ـ حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض، دارای نمایش فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی می‌باشند:

$$y_1 = x^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = x^{0}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

۹ـ گزینه «۳» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

در اینصورت مطابق فرمول (۸ـ۲) فصل ۲، جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

برای محاسبه جواب خصوصی معادله ناهمگن $y'' - 4y' + 3y = 20\cos x$ با استفاده از روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3}\,20\cos x = \frac{1}{2 - 4D}\,20\cos x = \frac{2+4D}{20}\,20\cos x = 2\cos x - 4\sin x$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 2\cos x - 4\sin x$$

۱۰ـ گزینه «۲»

$$y^2 = cx^3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{y^2}{x^3}$$

$$\xrightarrow{\text{حذف } c \text{ به کمک مشتقگیری : گام اول}} 0 = \frac{2yy'\times x^3 - 3x^2\times y^2}{x^6} \quad \Rightarrow \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3y}{2x}$$

$$\xrightarrow{y'\mapsto -\frac{1}{y'} \text{ : گام دوم}} -\frac{1}{y'} = \frac{3y}{2x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2x}{3y}$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله حاصل : گام سوم}} \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y} \quad \Rightarrow \quad 3y\,dy = -2x\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} 3\frac{y^2}{2} = -x^2 + c \quad \Rightarrow$$

$$3y^2 + 2x^2 = 2c \xrightarrow{(c\ge 0 \ \Rightarrow\ 2c = k^2)} 3y^2 + 2x^2 = k^2$$

۱۱ـ گزینه «۱»

$$y = 4t - 3\int_0^t y(z)\sin(t-z)\,dz \xrightarrow{\int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx = f*g} y = 4t - 3(y*\sin t) \quad \Rightarrow$$

$$L[y] = 4L[t] - 3L[y*\sin t] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[y] = 4\frac{1}{s^2} - 3L[y]\frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$(1 + \frac{3}{s^2+1})L[y] = \frac{4}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s^2+4}{s^2+1}\cdot L[y] = \frac{4}{s^2} \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} \quad \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}[\frac{4s^2+4}{s^2(s^2+4)}] = L^{-1}[\frac{4s^2}{s^2(s^2+4)} + \frac{4}{s^2(s^2+4)}] = 2L^{-1}[\frac{2}{s^2+2^2}] + L^{-1}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+2^2}] \quad \Rightarrow$$

$$y = 2\sin 2t + t - \frac{1}{2}\sin 2t \quad \Rightarrow \quad y = t + \frac{3}{2}\sin 2t$$

راهنمایی.

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}.$$

مهندسی نفت

۱۲ـ گزینه «۱» حل اول: ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$y'' + 2y' + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\alpha = -1\\ \beta = \sqrt{2}\end{cases}$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۱۰) فصل دوم، جواب عمومی معادله همگن مفروض، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y(x) = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}\,x + c_2\sin\sqrt{2}\,x) \xrightarrow{x=0} y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = c_1$$

$$\xrightarrow{y(0)=2} c_1 = 2 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(x) = e^{-x}(2\cos\sqrt{2}\,x + c_2\sin\sqrt{2}\,x)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}\ \text{(طرفین)}} y'(x) = -e^{-x}(2\cos\sqrt{2}\,x + c_2\sin\sqrt{2}\,x) + e^{-x}(-2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,c_2\cos\sqrt{2}\,x)$$

$$\xrightarrow{x=0} y'(0) = -(2\cos(0) + c_2\sin(0)) + (-2\sqrt{2}\sin(0) + \sqrt{2}\,c_2\cos(0))$$

$$\xrightarrow{y'(0)=-3} -3 = -2 + \sqrt{2}\,c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(x) = e^{-x}(2\cos\sqrt{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,x)$$

حل دوم: مسائل با مقادیر اولیه مناسب‌تر است با روش تبدیل لاپلاس حل گردند:

$y''+۲y'+۳y=۰ \Rightarrow L[y'']+۲L[y']+۳L[y]=۰$

$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(۰)-\cdots-f^{(n-1)}(۰)} (s^۲L[y]-sy(۰)-y'(۰))+۲(sL[y]-y(۰))+۳L[y]=۰$

$\xrightarrow{y(۰)=۲ \ \& \ y'(۰)=-۳} s^۲L[y]-۲s+۳+۲sL[y]-۴+۳L[y]=۰ \Rightarrow (s^۲+۲s+۳)L[y]=۲s+۱ \Rightarrow$

$L[y]=\frac{۲s+۱}{s^۲+۲s+۳} \Rightarrow y=L^{-۱}[-\frac{۲s+۱}{(s+۱)^۲+۲}] \Rightarrow y=L^{-۱}[\frac{۲(s+۱)-۱}{(s+۱)^۲+۲}]$

$\xrightarrow{L^{-۱}[F(s-a)]=e^{at}L^{-۱}[F]} y=e^{-x}L^{-۱}[\frac{۲s-۱}{s^۲+۲}]=e^{-x}(۲L^{-۱}[\frac{s}{s^۲+(\sqrt{۲})^۲}]-L^{-۱}[\frac{۱}{s^۲+(\sqrt{۲})^۲}]) \Rightarrow$

$y=e^{-x}(۲\cos\sqrt{۲}x-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin\sqrt{۲}x)$

۱۳ـ گزینه «۱» حل اول:

$x\frac{dy}{dx}=\frac{y^۲}{x}+y \xrightarrow{\frac{۱}{x}\times(\text{طرفین})} \frac{dy}{dx}=\frac{y^۲}{x^۲}+\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{۱}{x}y=\frac{۱}{x^۲}\times y^۲$

$\xrightarrow{y^{-۲}\times(\text{معادله}) \ ;\ \text{برنولی}} y^{-۲}\frac{dy}{dx}-\frac{۱}{x}y^{-۱}=\frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{y^{-۱}=u \Rightarrow y^{-۲}\frac{dy}{dx}=-u'} -u'-\frac{۱}{x}u=\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow$

$u'+\frac{۱}{x}u=-\frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{\int\frac{۱}{x}dx}=e^{Lnx}=x \quad \&$

$u=\frac{۱}{x}\{\int x\times\frac{۱}{x^۲}dx+c\}=\frac{۱}{x}(-Ln|x|+c)$

$\xrightarrow{u=\frac{۱}{y}} \frac{۱}{y}=\frac{۱}{x}(-Ln|x|+c) \Rightarrow y=\frac{x}{-Ln|x|+c}=\frac{x}{-Ln|x|-C} \ ;(c=-C) \Rightarrow y=\frac{-x}{Ln|x|+C}$

حل دوم:

$x\frac{dy}{dx}=\frac{y^۲}{x}+y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^۲}{x^۲}+\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(\frac{y}{x})^۲+(\frac{y}{x})$

$\xrightarrow{(\frac{y}{x}=u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx})} u+x\frac{du}{dx}=u^۲+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u^۲ \Rightarrow \frac{du}{u^۲}=\frac{dx}{x}$

$\xrightarrow{\text{طرفین } \int \text{ جدا شوند}} -\frac{۱}{u}=Ln|x|+c \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} -\frac{x}{y}=Ln|x|+c \Rightarrow y=\frac{-x}{Ln|x|+c}$

۱۴ـ گزینه «۳»

$F(s)=L[t^{-\frac{۱}{۲}}] \xrightarrow{t^\alpha \xrightarrow{L} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}} F(s)=\frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{s^{\frac{۱}{۲}}} \xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}} F(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

۱۵ـ گزینه «۱» با توجه به بسط مک لورن $y=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{y^{(n)}(۰)}{n!}x^n$ ، کافیست ضرائب $a_n=\frac{y^{(n)}(۰)}{n!}$ با فرض $n=۰,۱,\ldots,۴$ محاسبه شوند. با توجه به شرطهای اولیه مقادیر $a_۰=y(۰)=-۱$ و $a_۱=y'(۰)=a$ بدست می‌آیند. در اینصورت؛

$(۱+x^۲)y''+xy'+y=۰ \ ;(I) \xrightarrow{x=۰} y''(۰)+y(۰)=۰ \xrightarrow{y(۰)=-۱} y''(۰)=۱ \Rightarrow a_۲=\frac{y''(۰)}{۲!}=\frac{۱}{۲}$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} ۲xy''+(۱+x^۲)y'''+y'+xy''+y'=۰ \xrightarrow{x=۰} y'''(۰)+۲y'(۰)=۰ \xrightarrow{y'(۰)=a} y'''(۰)=-۲a \Rightarrow$

$a_۳=\frac{y'''(۰)}{۳!}=\frac{-a}{۳}$

بنابراین با توجه به ضابطه گزینه‌ها، بدون نیاز محاسبه $a_۴$ تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۱۶ـ گزینه «۳» از یک طرف؛

$P_n(x)=\frac{۱}{(n!)۲^n}.\frac{d^n(x^۲-۱)^n}{dx^n} \xrightarrow{n=۲} P_۲(x)=\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱) \quad ;(I)$

در اینصورت؛

$I=\int_{-۱}^{۱}(x^۳+ax^۲+bx+c)P_۲(x)\,dx=\underbrace{\int_{-۱}^{۱}(x^۳+bx)P_۲(x)dx}_{I_۱}+c\underbrace{\int_{-۱}^{۱}P_۲(x)dx}_{I_۲}+a\underbrace{\int_{-۱}^{۱}x^۲P_۲(x)dx}_{I_۳}$

بنابراین کافیست به محاسبه انتگرالهای $I_۱$ و $I_۲$ و $I_۳$ بپردازیم:

i) $(x^۳+bx:$ تابعی فرد $\&$ $P_۲(x):$ تابعی زوج$) \Rightarrow ((x^۳+bx)P_۲(x):$ تابعی فرد$)$

$\xrightarrow{(f:\text{ تابعی فرد }) \Rightarrow \int_{-a}^{a}f\,dx=۰} I_۱=\int_{-۱}^{۱}(x^۳+bx)P_۲(x)\,dx=۰ \quad \&$

ii) $\xrightarrow{\text{نتیجه تمامد لزاندر };\ v\neq۰} \int_{-۱}^{۱}P_v(x)\,dx=۰ \xrightarrow{v=۲} I_۲=\int_{-۱}^{۱}P_۲(x)\,dx=۰$

iii) $I_۳=\int_{-۱}^{۱}x^۲P_۲(x)\,dx \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} I_۳=\int_{-۱}^{۱}x^۲.\frac{۱}{۲}(۳x^۲-۱)\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(۳x^۴-x^۲)\,dx \Rightarrow$

$I_۳=\frac{۱}{۲}(۳\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۳}{۳})\Big|_{-۱}^{۱}=\frac{۱}{۲}.\frac{۸}{۱۵} \Rightarrow I_۳=\frac{۴}{۱۵}$

در نتیجه؛

$I=I_۱+cI_۲+aI_۳ \Rightarrow I=\frac{۴}{۱۵}a$

مهندسی معدن

۱۷ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$\lambda^۳-۴\lambda=۰ \Rightarrow \lambda(\lambda^۲-۴)=۰ \Rightarrow \lambda=۰ \ ,\ \lambda=\pm۲$

در نتیجه مطابق فرمول (۲ـ۸) فصل ۲، جواب عمومی معادله همگن متناظر $y'''-۴y'=۰$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$y_h=c_۱+c_۲e^{۲x}+c_۳e^{-۲x}$

برای محاسبه جواب خصوصی y_p، با توجه به ضابطه $R(x)=x+3\cos x$ داریم:

$$y_{p_1}=A_0x+A_1 \xrightarrow{\text{با توجه به ضابطه } y_h} y_{p_1}=(A_0x+A_1)x \quad \&$$

$$y_{p_2}=B\cos x+c\sin x$$

در اینصورت؛

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}=(A_0x+A_1)x+B\cos x+c\sin x$$

۱۸ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{u_a(t)\text{ بازنویسی توابع برحسب}} f(t)=(u_0(t)-u_{2\pi}(t))\times\sin t+u_{2\pi}(t)\times(\sin t+\cos t)$$

$$\xrightarrow{u_0(t)=1} f(t)=\sin t+u_{2\pi}(t)\cos t \Rightarrow L[f(t)]=L[\sin t]+L[u_{2\pi}(t)\cos t]$$

$$\xrightarrow{L[u_a(t)f]=e^{-as}L[f(t+a)]} L[f(t)]=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}L[\cos(t+2\pi)] \Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}.\frac{s}{s^2+1}=\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

۱۹ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-y=0$، یک معادله کشی ـ اویلر با فرض $p_0=1$ و $q_0=-1$ است. در اینصورت؛

$$x^2y''+xy'-y=0 \xrightarrow{z=\ln x} \frac{d^2y}{dz^2}-y=0$$

معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت است. ریشه‌های مشخصه آن عبارتند از:

$$\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm1$$

در اینصورت مطابق فرمول (۸.۲) فصل ۲. جواب عمومی معادله با ضرائب ثابت فوق، از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1e^z+c_2e^{-z} \xrightarrow{z=\ln x} y=c_1x+c_2x^{-1}$$

۲۰ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست. ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1)+(\lambda+1)=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2+1)=0 \Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=\pm i$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''+y''+y+1=0$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1e^{-x}+c_2\cos x+c_3\sin x$$

۲۱ـ گزینه «۱»

$$y(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt \xrightarrow{\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx=f*g} y=e^x+e^x*y \Rightarrow$$

$$L[y]=L[e^x]+L[e^x*y] \xrightarrow{L[f*g]=L[f]L[g]} L[y]=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}.L[y] \Rightarrow$$

$$L[y](1-\frac{1}{s-1})=\frac{1}{s-1} \Rightarrow L[y].\frac{s-2}{s-1}=\frac{1}{s-1} \Rightarrow L[y]=\frac{1}{s-2} \Rightarrow y=L^{-1}[\frac{1}{s-2}]=e^{2x}$$

۲۲ـ گزینه «۴»

$$y(x^2y^2+2xy+1)\,dx+x(x^2y^2-2xy+1)\,dy=0 \Rightarrow$$

$$y(xy+1)^2\,dx+x(xy-1)^2\,dy=0 \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y(xy+1)^2}{x(xy-1)^2}$$

$$\xrightarrow{xy=u \Rightarrow y=\frac{u}{x} \Rightarrow y'=\frac{xu'-u}{x^2}} \frac{xu'-u}{x^2}=-\frac{\frac{u}{x}(u+1)^2}{x(u-1)^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u-\frac{u(u+1)^2}{(u-1)^2} \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx}=u\frac{(u-1)^2-(u+1)^2}{(u-1)^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=u\frac{-4u}{(u-1)^2} \Rightarrow \frac{(u-1)^2}{u^2}=-4\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{u^2-2u+1}{u^2}du=-4\frac{dx}{x} \Rightarrow (1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2})du=-4\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\int:\text{(طرفین) جدا شونده}} u-2\ln|u|-\frac{1}{u}=-4\ln|x|+c \xrightarrow{u=xy} xy-2\ln|xy|-\frac{1}{xy}=-4\ln|x|+c \Rightarrow$$

$$xy-\frac{1}{xy}-2\ln|x|-2\ln|y|+4\ln|x|=c \Rightarrow xy-\frac{1}{xy}+2\ln|x|-2\ln|y|=c$$

۲۳ـ گزینه «۱»

$$\xrightarrow{a_2(x)=x^2} a_2(0)=0 \Rightarrow (p_0=\lim_{x\to0}x.\frac{x(\frac{1}{2}+2x)}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \& \quad q_0=\lim_{x\to0}x^2.\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{2}r=0 \Rightarrow 2r^2-r-1=0$$

مهندسی مکانیک

۲۴ـ گزینه «۱» از یک طرف؛

$$y'_x=\frac{d}{dx}y=\frac{dz}{dx}.\frac{d}{dz}y \xrightarrow{z=x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=2x} y'=2xy'_z \quad ;(1) \quad \&$$

$$y''_x=\frac{d}{dx}y'_x \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} y''_x=\frac{d}{dx}(2x.y'_z)=2y'_z+2x.\frac{d}{dx}y'_z=2y'_z+2x.\frac{dz}{dx}.\frac{d}{dz}y'_z \Rightarrow$$

$$y''_x=2y'_z+4x^2y''_z \quad ; (2)$$

در اینصورت؛

$$x^2y''-3xy'+4(x^4-1)y=0 \xrightarrow{z=x^2;\ \text{تساویهای (۱) و (۲)}} x^2(4x^2y''_z+2y'_z)-3x(2xy'_z)+4(x^4-1)y=0 \Rightarrow$$

$$4x^4y''_z+2x^2y'_z-6x^2y'_z+4(x^4-1)y=0 \xrightarrow{x^2=z} 4z^2y''-4zy'+4(z^2-1)y=0 \Rightarrow$$

$$z^2y''-zy'++(z^2-1)y=0$$

۲۵ـ گزینه «۳»

$$(x^۳-y)\,dx+(x+x^۲y)\,dy=۰$$

$$\xrightarrow{\text{گام اول}}\Delta=Q_x-P_y=۱+۲xy+۱=۲(۱+xy)\neq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور: حالت اول}}\frac{\Delta}{-Q}=\frac{۲(۱+xy)}{-x(۱+xy)}=-\frac{۲}{x}=a(x)\Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{-۲}{x}dx}=e^{-۲Lnx}=\frac{۱}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{\mu(x)\times(\text{معادله})}\frac{۱}{x^۲}((x^۳-y)\,dx+(x+x^۲y)\,dy)=۰\Rightarrow(x-\frac{y}{x^۲})\,dx+(\frac{۱}{x}+y)\,dy=۰$$

با توجه به تعریف عامل انتگرال‌ساز، معادله حاصل کامل است. بنابراین؛

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل y در P}}x\,dx+(\frac{۱}{x}+y)\,dy=۰\xrightarrow{\int(\text{معادله حاصل})}\frac{x^۲}{۲}+\frac{۱}{x}y+\frac{y^۲}{۲}=c$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=۱ \& y=۱) در جواب عمومی}}\frac{۱}{۲}+۱+\frac{۱}{۲}=c\Rightarrow c=۲$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری (x=۲ \& c=۲) در جواب عمومی}}۲+\frac{۱}{۲}y+\frac{y^۲}{۲}=۲\Rightarrow y^۲+y=۰\Rightarrow y=-۱,۰$$

۲۶ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_۰=۰$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_۰=\frac{۱}{۲}$ و $q_۰=-\frac{۱}{۲}$ است. و هم‌چنین $r_۱=۱$ و $r_۲=-\frac{۱}{۲}$، دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^۲+(p_۰-۱)r+q_۰=r^۲-\frac{۱}{۲}r-\frac{۱}{۲}=۰$، در رابطه $r_۱-r_۲=\frac{۳}{۲}\notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت طبق قضیه $\overline{II}$. حالت اول، هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $۲x^۲y''+xy'-(x+۱)y=۰$ بصورت سری فروبنوسی و متناظر با ریشه‌های شاخصی با نمایشهای زیر می‌باشند:

$$y_۱=c_۱x^{۱}\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n\quad\&\quad y_۲=c_۲x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$$

۲۷ـ گزینه «۳»

$$I=\int_{-۱}^{۱}(x^۳+ax+b)P_۲(x)\,dx=\underbrace{\int_{-۱}^{۱}(x^۳+ax)P_۲(x)\,dx}_{I_۱}+b\underbrace{\int_{-۱}^{۱}P_۲(x)\,dx}_{I_۲}$$

بنابراین کافیست به محاسبه انتگرالهای $I_۱$ و $I_۲$ می‌پردازیم:

i) $(x^۳+ax:$ تابعی فرد $\&\quad P_۲(x):$ تابعی زوج $)\Rightarrow((x^۳+ax)P_۲(x):$ تابعی فرد$)$

$$\xrightarrow{(f:\text{تابعی فرد})\Rightarrow\int_{-a}^{a}f\,dx=۰}I_۱=\int_{-۱}^{۱}(x^۳+ax)P_۲(x)\,dx=۰\quad\&$$

ii) $\xrightarrow{\text{نتیجه تعامد لژاندر};\ v\neq۰}\int_{-۱}^{۱}P_v(x)\,dx=۰\xrightarrow{v=۲}I_۲=\int_{-۱}^{۱}P_۲(x)\,dx=۰$

در نتیجه؛

$$I=I_۱+I_۲=۰$$

۲۸ـ گزینه «۴» حل اول:

$$y=x^۲e^x\ ;(۱)\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})}y'=۲xe^x+x^۲e^x\xrightarrow{\text{تساوی (۱)}}y'=۲xe^x+y\Rightarrow$$

$$y'-y=۲xe^x\ ;(۲)\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})}y''-y'=۲e^x+۲xe^x\xrightarrow{\text{تساوی (۲)}}y''-y'=۲e^x+y'-y\Rightarrow$$

$$y''-۲y'+y=۲e^x\ ;(۳)\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})}y'''-۲y''+y'=۲e^x\xrightarrow{\text{تساوی (۳)}}y'''-۲y''+y'=y''-۲y'+y\Rightarrow$$

$$y'''-۳y''+۳y'-y=۰\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})}y^{(۴)}-۳y'''+۳y''-y'=۰$$

حل دوم: اگر $y=x^۲e^x$ جواب یک معادله دیفرانسیل باشد، معادله مشخصه معادله مذکور بصورت $(\lambda-۱)^۳=۰$ می‌باشد. در نتیجه با توجه به تساوی $(\lambda-۱)^۳=\lambda^۳-۳\lambda^۲+۳\lambda-۱$، ضابطه معادله دیفرانسیل مطلوب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y'''-۳y''+۳y'-y=۰\xrightarrow{\frac{d}{dx}(\text{طرفین})}y^{(۴)}-۳y'''+۳y''-y'=۰$$

۲۹ـ گزینه «۳»

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}\Rightarrow L[f(t)]=L[\frac{\sin t}{t}]$$

$$\xrightarrow{L[\frac{f}{t}]=\int_s^{\infty}L[f]\,ds}L[f(t)]=\int_s^{\infty}L[\sin t]\,ds=\int_s^{\infty}\frac{۱}{s^۲+۱}ds=\lim_{T\to\infty}\int_s^T\frac{ds}{s^۲+۱}\Rightarrow$$

$$L[f(t)]=\lim_{T\to\infty}(\text{Arctags})\Big|_S^T=\frac{\pi}{۲}-\text{Arctags}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}-\text{Arctag}\alpha=\text{Arctag}\frac{۱}{\alpha}}L[\frac{\sin t}{t}]=\text{Arctag}\frac{۱}{s}$$

۳۰ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$۲\lambda^۲+۳\lambda+۱=۰\Rightarrow\lambda=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۸}}{۴}\Rightarrow\lambda_۱=\frac{-۱}{۲},\ \lambda_۲=-۱$$

$$y_h=c_۱e^{-\frac{۱}{۲}x}+c_۲e^{-x}$$

برای محاسبه جواب خصوصی y_p با توجه به روش اپراتور معکوس داریم:

$$y_p=\frac{۱}{۲D^۲+۳D+۱}(x+۲)e^{-x}=e^{-x}\frac{۱}{۲(D-۱)^۲+۳(D-۱)+۱}(x+۲)=e^{-x}\frac{۱}{۲D^۲-D}(x+۲)=e^{-x}\frac{۱}{(۲D-۱)D}(x+۲)$$

$$=e^{-x}\frac{۱}{۲D-۱}(\frac{x^۲}{۲}+۲x)$$

$$=e^x(-۱-۲D-۴D^۲)(\frac{x^۲}{۲}+۲x)$$

$$=e^{-x}(\frac{-x^۲}{۲}-۲x-۲x-۲-۴)$$

$$=e^{-x}(\frac{-x^۲}{۲}-۴x-۶)$$

$$\begin{array}{r|l}۱ & -۱+۲D\\ \hline \frac{۱-۲D}{۲D} & -۱-۲D-۴D^۲\\ \frac{۲D-۴D^۲}{۴D^۲} & \end{array}$$

در اینصورت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر از ضابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-x} + e^{-x}(\frac{-x^2}{2} - 4x - 6) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + (c_2 - 6)e^{-x} - \frac{x^2}{2}e^{-x} - 4xe^{-x}$$

۳۱ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4 + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 2)^2 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{1} = 1 \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \\ \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{1} = -1 \pm i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \end{cases}$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

مهندسی مکاترونیک

۳۲ـ گزینه «۴»

$$2x^2y'' - 5xy' + 3y = 0 \Rightarrow x^2y'' - \frac{5}{2}xy' + \frac{3}{2}y = 0$$

معادله دیفرانسیل حاصل، یک معادله کشی ـ اویلر با $p_0 = -\frac{5}{2}$ و $q_0 = \frac{3}{2}$ است. در اینصورت؛

$$x^2y'' - \frac{5}{2}xy' + \frac{3}{2}y = 0 \xrightarrow{z=\ln x} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{7}{2}\frac{dy}{dz} + \frac{3}{2}y = 0$$

معادله بدست آمده، یک معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت است. ریشه‌های مشخصه آن عبارتند از:

$$\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{12}{2}}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, 3$$

در اینصورت مطابق فرمول (۸ـ۲) فصل دوم جواب عمومی معادله با ضرائب ثابت فوق از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}z} + c_2 e^{3z} \xrightarrow{z=\ln x} y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^3 \qquad ; x > 0$$

یادآوری. معادله کشی ـ اویلر $x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0$ با تغییر متغیر $z = \ln x$ به معادله با ضرائب ثابت $\frac{d^2y}{dz^2} + (p_0 - 1)\frac{dy}{dz} + q_0y = 0$ تبدیل می‌شود.

۳۳ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

با فرض $Y = L[y]$ و $X = L[x]$ داریم:

$$\begin{cases} y + \frac{d^2x}{dt^2} = -2 \\ x + \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y + (s^2X - sx(0) - x'(0)) = \frac{-2}{s} \\ X + (s^2Y - sy(0) - y'(0)) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0} \begin{cases} Y + s^2X = \frac{-2}{s} \\ X + s^2Y = 0 \end{cases} \xrightarrow{-s^2\times(\text{طرفین})} \begin{cases} -s^2Y - s^4X = 2s \\ X + s^2Y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$X - s^4X = 2s \Rightarrow (1 - s^4)X = 2s \Rightarrow X = \frac{2s}{1 - s^4} \Rightarrow$$

$$x = L^{-1}[X] = L^{-1}[\frac{2s}{1-s^4}] = L^{-1}[\frac{2s}{(1-s^2)(1+s^2)}] = L^{-1}[\frac{s}{1-s^2} + \frac{s}{1+s^2}] \Rightarrow$$

$$x = -L^{-1}[\frac{s}{s^2-1}] + L^{-1}[\frac{s}{s^2+1}] \Rightarrow x = -\cosh t + \cos t$$

با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد. امّا در گزینه (۴) هم بین جوابهای x و y ارائه شده، هیچکدام از روابط دستگاه صورت مسأله برقرار نمی‌باشد:

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} = -2 \Rightarrow y = -2 - \frac{d^2x}{dt^2} \xrightarrow{x=\cos t - \cosh t} y = -2 - (-\cos t - \cosh t) = -2 + \cos t + \cosh t$$

۳۴ـ گزینه «۳»

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 + 4s + 5} \Rightarrow f(t) = L^{-1}[\frac{3s}{(s^2+4s+4)+1}] = 3L^{-1}[\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}] \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t) = 3e^{-2t}L^{-1}[\frac{s-2}{s^2+1}] = 3e^{-2t}L^{-1}[\frac{s}{s^2+1} - 2\frac{1}{s^2+1}] \Rightarrow$$

$$f(t) = 3e^{-2t}(\cos t - 2\sin t)$$

۳۵ـ گزینه «۱»

$$f(t) = e^{-2t}\cos 3t \Rightarrow F(s) = L[f(t)] = L[e^{-2t}\cos 3t]$$

$$\xrightarrow{L[e^{at}f(t)] = L[f]|_{s \mapsto s-a}} F(s) = L[\cos 3t]\Big|_{s \mapsto s+2} = \frac{s}{s^2+9}\Big|_{s \mapsto s+2} \Rightarrow F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

۳۶ـ گزینه «۲» با توجه به جدول فرمولهای تبدیل لاپلاس توابع.

۳۷ـ گزینه «۲»

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 \xrightarrow{\text{(معادله)}\times y^{-2}\text{ ; برنولی}} y^{-2}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-1} = Q(x)$$

$$\xrightarrow{y^{-1} = u \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx}} -\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} - P(x)u - Q(x) = 0$$

سئوالات آزمون آزاد ۸۶

مجموعه مهندسی برق (الکترونیک و قدرت)

۱ـ معادله دیفرانسیل $y' + 5 - \frac{y}{x} = 0$ با شرط $y(1) = 0$ مفروض است. مقدار y در $x = 4$ کدام است؟

۱) $-40\,\mathrm{Ln}2$ ۲) $40\,\mathrm{Ln}2$ ۳) $20\,\mathrm{Ln}2$ ۴) $-20\,\mathrm{Ln}2$

۲ـ معادله دیفرانسیل $y' + 2\sin x + 1 = 0$ با شرط $y(0) = 2$ مفروض است. مقدار y در $x = \pi$ کدام است؟

۱) $2+\pi$ ۲) $-2+\pi$ ۳) $-2-\pi$ ۴) $2-\pi$

۳ـ معادله دیفرانسیل $y' + 1 - y = 0$ با شرط $y(0) = -1$ مفروض است. مقدار y در $x = 1$ کدام است؟

۱) $-1-2e$ ۲) $1-2e$ ۳) $1+2e$ ۴) $-1+2e$

۴ـ تبدیل لاپلاس $L\{\frac{1}{2}t^2 e^{-2t}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{(s+2)^3}$ ۲) $\frac{-1}{(s+2)^3}$ ۳) $\frac{1}{(s-2)^3}$ ۴) $\frac{-1}{(s-2)^3}$

۵ـ تبدیل لاپلاس $L\{\sin(\frac{\pi}{2} - t)\}$ کدام است؟

۱) $\frac{-s}{s^2+1}$ ۲) $\frac{s}{s^2+1}$ ۳) $\frac{s}{s^2-1}$ ۴) $\frac{-s}{s^2-1}$

۶ـ تبدیل لاپلاس $L\{e^{-1} + t\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2}$ ۲) $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$ ۳) $\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2}$ ۴) $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2}$

۷ـ معادلهٔ دیفرانسیل $y' - \frac{2}{x^2} + x^3 = 0$ با شرط $y(2) = 1$ مفروض است. مقدار y در $x = 3$ کدام است؟

۱) $-\frac{121}{2}$ ۲) $\frac{121}{2}$ ۳) $\frac{2}{121}$ ۴) $-\frac{2}{121}$

۸ـ معادله دیفرانسیل $y' + 2e^x - y = 0$ با شرط $y(0) = 2$ مفروض است. مقدار y در $x = 1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۳

مجموعه مهندسی عمران (مهندسی آب، سازه‌های هیدرولیکی، مکانیک خاک و پی، مهندسی و مدیریت ساخت)

۹ـ جواب مسئله $(4x + xy^2)\,dx + (y + x^2 y)\,dy = 0$، $y(0) = 0$ عبارت است از:

۱) $(x^2-1)(y^2-4) = 4$ ۲) $x^2y^2 - x + (x+1)(y+4) = 4$

۳) $x^2 + y^2 - 3y = 4$ ۴) $(x^2+1)(y^2+4) = 4$

۱۰ـ جواب معادله $xy' - 2y = x^3 \cos 4x$ وقتی که $x \to 0$ برابر است با:

۱) ∞ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۱ـ معادله $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ دارای جوابی به صورت زیر است:

۱) $c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ ۲) $c_1\mathrm{Ln}x + c_2e^{2x} + c_3x^2$ ۳) $c_1e^x + c_2x^2 + c_3x^3$ ۴) $c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6$

۱۲ـ جواب خصوصی معادله $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$ در $x = 0$ برابر است با:

۱) $y = 0$ ۲) $y = \infty$ ۳) $y = -\infty$ ۴) $y = 1$

۱۳ـ تبدیل لاپلاس $L\{t^{-\frac{1}{2}}\}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{\sqrt{s}}$ ۲) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{s}$ ۴) $1 + \frac{\pi}{\sqrt{s}}$

۱۴ـ تبدیل لاپلاس جواب مسئله $y(0) = 2$ ، $y'(0) = -2$: $y'' + 4y' + 4y = 0$ عبارت است از:

۱) $\frac{2se^{-s}}{x^2+4}$ ۲) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$ ۳) $\frac{s^2-1}{s^2-s+1}$ ۴) $\frac{2s+6}{s^2+4s+4}$

۱۵ـ $x = 1$ برای معادله $x^2 y'' + 2y' + (t^2 - t)\,y = 0$ چه نوع نقطه‌ای است:

۱) یک نقطه منظم است. ۲) یک نقطه عادی است.

۳) یک نقطه نامنظم است. ۴) یک نقطه غیرعادی منظم است.

۱۶ـ هرگاه $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای لژاندر از درجه n باشد و $-1 < x < 1$ آنگاه $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}(2n+1)$ ۲) $\frac{1}{n+1}$ ۳) $\frac{2}{2n-1}$ ۴) $\frac{2}{2n+1}$

مهندسی مکانیک (ساخت و تولید)

۱۷ـ حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر عبارتست از:

$$[2xy^2 - 3y^3]\,dx + [7 - 3xy^2]\,dy = 0$$

۱) $u(x,y) = x^2 - 5xy - \frac{3}{y} = c$ ۲) $u(x,y) = y^2 - 2xy - \frac{3}{x} = c$

۳) $u(x,y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = c$ ۴) $u(x,y) = x^2 - 7xy - \frac{1}{x} = c$

۱۸ـ حل معادله دیفرانسیل زیر برابر است با:

$$y' + y\tan x = \sin 2x$$

۱) $y = -2\cos^3 x + c\sin x$ ۲) $y = -\sin^3 x + c\cos x$

۳) $y = -2\sin^2 x + c\sin x$ ۴) $y = -2\cos^2 x + c\cos x$

۱۹ـ حل معادله دیفرانسیل $x^2 yy'' = [y - xy']^2$ برابر است با:

۱) $y = c_2x^2e^{-\frac{c_1}{x}}$ ۲) $y = c_2xe^{-\frac{c_1}{x}}$ ۳) $y = c_2xe^{-\frac{c_1}{x^2}}$ ۴) $y = x + c_2e^{-\frac{c_1}{x^2}}$

۲۰ـ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$ برابر است با:

۱) $y = c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x - x + 2x^2 + 1$ ۲) $y = c_1e^x + c_2\sin x + c_3\cos x - x^3 + 3x^2 - 5$

۳) $y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x - x^2 - 10x + 7$ ۴) $y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x - x^2 - 3x - 1$

۲۱ـ مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید به ازای چه مقدار β وقتی $t \to \infty$ جواب مسأله به صفر میل می‌کند؟

$$\begin{cases} ۴\dfrac{d^۲y}{dt^۲} - y = ۰ \\ y(۰) = ۲ \ , \ y'(۰) = \beta \end{cases}$$

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۲۲ـ جواب عمومی معادله زیر برحسب تابع بسل برابر است با:

$$x^۲y'' + xy' + [x^۲ - ۴]y = ۰$$

۱) $y(x) = C_۱J_{\frac{۱}{۴}}(x) + C_۲Y_{\frac{۱}{۴}}(x)$ ۲) $y(x) = C_۱J_۲(۳x) + C_۲Y_۲(۳x)$

۳) $y(x) = C_۱J_۲(x) + C_۲Y_۲(x)$ ۴) $y(x) = C_۱J_۴(x) + C_۲Y_۴(x)$

۲۳ـ تبدیل لاپلاس $f(t) = \delta(t-۱).\cos t$ برابر است با:

۱) $۱ + \frac{s}{s^۲+۱}$ ۲) $(\cos ۱)e^{-s}$ ۳) $\frac{s}{s^۲+۱}$ ۴) $(\cos ۱)e^{s}$

مهندسی مکانیک (تبدیل انرژی)

۲۴ـ حل معادلهٔ زیر با شرایط داده شده، کدام است؟

$$y'' + y' - ۲y = ۰ \qquad y(۰) = ۴ \ , \ y'(۰) = ۱$$

۱) $y = c^x + ۲e^{-۲x}$ ۲) $y = ۲e^x + ۳c^{-۲x}$ ۳) $y = c^x + e^{-۲x}$ ۴) $y = ۳e^x + c^{-۲x}$

۲۵ـ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$y'' - ۲y' + ۱۰y = ۰$$

۱) $y = c^x(A\cos ۲x + B\sin ۲x)$ ۲) $y = c^x(A\cos ۳x + B\sin ۳x)$

۳) $y = e^x(A\cos ۲x + B\sin ۲x)$ ۴) $y = e^x(A\cos ۳x + B\sin ۳x)$

۲۶ـ اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر $\frac{۱}{s(s^۲+\omega^۲)}$ باشد، $f(t)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\omega^۲}(۱ - \frac{\sin \omega t}{\omega})$ ۲) $\frac{۱}{\omega^۲}(۱ - \cos \omega t)$ ۳) $\frac{۱}{\omega^۲}(۱ - \frac{\cos \omega t}{\omega})$ ۴) $\frac{۱}{\omega^۲}(۱ - \sin \omega t)$

پاسخنامه آزمون آزاد ۸۶

مجموعه مهندسی برق (الکترونیک و قدرت)

۱ـ گزینه «۱» حل اول:

$$y + ۵ - \frac{y}{x} = ۰ \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{۱}{x}y = -۵$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y بر حسب x}} \mu(x) = e^{\int -\frac{۱}{x}dx} = e^{-Lnx} = \frac{۱}{x} \quad \&$$

$$y(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{x}}\{\int \frac{۱}{x} \times -۵ \ dx + c\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = x(-۵Lnx + c) \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱) = c \xrightarrow{y(۱)=۰} c = ۰ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(x) = -۵xLnx$$

$$\xrightarrow{x=۴} y(۴) = -۵ \times ۴ Ln۴ = -۲۰ Ln۲^{۲} \quad \Rightarrow \quad y(۴) = -۴۰ Ln۲$$

حل دوم:

$$y' + ۵ - \frac{y}{x} = ۰ \xrightarrow{\text{همگن} \ ; \ (\frac{y}{x}=u \ \Rightarrow \ y'=u+xu')} u + xu' + ۵ - u = ۰ \quad \Rightarrow \quad xu' = -۵ \quad \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx} = -۵ \quad \Rightarrow \quad du = -۵\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شوند}} u = -۵Lncx$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \frac{y}{x} = -۵Lncx \quad \Rightarrow \quad y(x) = -۵xLncx \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۱} y(۱) = -۵Lnc \xrightarrow{y(۱)=۰} c = ۱ \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(x) = -۵x\,Lnx$$

$$\xrightarrow{x=۴} y(۴) = -۵ \times ۴ Ln۴ = -۴۰ Ln۲$$

۲ـ گزینه «۳»

$$y' + ۲\sin x + ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad dy = (-۲\sin x - ۱)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شوند}} y(x) = ۲\cos x - x + c \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{x=۰} y(۰) = ۲ + c \xrightarrow{y(۰)=۲} ۲ = ۲ + c \quad \Rightarrow \quad c = ۰$$

$$\xrightarrow{c=۰ \ \& \ x=\pi; \ \text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(\pi) = -۲ - \pi + ۰ \quad \Rightarrow \quad y(\pi) = -۲ - \pi$$

۳ـ گزینه «۲» حل اول:

$$y' + ۱ - y = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y - ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-۱} = dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{: جدا شوند}} Ln(y-۱) = x + c \quad \Rightarrow \quad y - ۱ = e^{x+c} = Ce^x \quad \Rightarrow \quad y(x) = ۱ + Ce^x$$

$\xrightarrow{x=0} y(0)=1+C \xrightarrow{y(0)=-1} -1=1+C \Rightarrow C=-2$

$\xrightarrow{c=-2 \ \& \ x=1;\ \text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(1)=1+(-2)e \Rightarrow y(1)=1-2e$

حل دوم:

$y'+1-y=0 \Rightarrow y'-y=-1$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}$ &

$y(x)=\frac{1}{e^{-x}}\{\int e^{-x}\times -1 \ dx+c\}=e^{x}(e^{-x}+c) \Rightarrow y(x)=1+ce^{x}$

$\xrightarrow{x=0} y(0)=1+c \xrightarrow{y(0)=-1} -1=1+c \Rightarrow c=-2$

$\xrightarrow{c=-2 \ \& \ x=1;\ \text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(1)=1-2e$

۴ـ گزینه «۱» حل اول:

$F(s)=L[\frac{1}{2}t^{2}e^{-2t}]=\frac{1}{2}L[e^{-2t}.t^{2}]$

$\xrightarrow{L[e^{at}f]=L[f]\|_{s\mapsto s-a}} F(s)=\frac{1}{2}L[t^{2}]\Big|_{s\mapsto s+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^{3}}\Big|_{s\mapsto s+2} \Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+2)^{3}}$

حل دوم:

$F(s)=L[\frac{1}{2}t^{2}e^{-2t}]=\frac{1}{2}L[t^{2}.e^{-2t}]$

$\xrightarrow{L[t^{n}f]=(-1)^{n}(L[f])^{(n)}} F(s)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^{2}\frac{d^{2}}{ds^{2}}L[e^{-2t}]=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^{2}}{ds^{2}}(\frac{1}{s+2}) \Rightarrow F(s)=\frac{1}{(s+2)^{3}}$

۵ـ گزینه «۲»

$F(s)=L[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]=L[\cos t] \Rightarrow F(s)=\frac{s}{s^{2}+1}$

۶ـ گزینه «۴»

$F(s)=L[e^{-t}+t]=L[e^{-t}]+L[t] \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^{2}}$

۷ـ گزینه «۲»

$y'-\frac{2}{x^{2}}+x^{3}=0 \Rightarrow dy=(\frac{2}{x^{2}}-x^{3})\,dx$

$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int;\ \text{جدا شوند}} y(x)=\frac{-2}{x}-\frac{x^{4}}{4}+c$ (جواب عمومی)

$\xrightarrow{x=4} y(4)=-\frac{2}{4}-\frac{(4)^{4}}{4}+c \xrightarrow{y(4)=1} 1=-\frac{1}{2}-64+c \Rightarrow c=\frac{131}{2}$

$\xrightarrow{c=\frac{131}{2} \ \& \ x=2;\ \text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(2)=-\frac{2}{2}-\frac{16}{4}+\frac{131}{2}=\frac{121}{2}$

۸ـ گزینه «۲»

$y'+2e^{x}-y=0 \Rightarrow y'-y=-2e^{x}$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int -dx}=e^{-x}$ &

$y(x)=\frac{1}{e^{-x}}\{\int e^{-x}\times -2e^{x}\ dx+c\} \Rightarrow y(x)=e^{x}(-2x+c)$ (جواب عمومی)

$\xrightarrow{x=0} y(0)=c \xrightarrow{y(0)=2} c=2$

$\xrightarrow{c=2 \ \& \ x=1;\ \text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(1)=e(-2+2) \Rightarrow y(1)=0$

مجموعه مهندسی عمران (مهندسی آب، سازه‌های هیدرولیکی، مکانیک خاک و پی، مهندسی و مدیریت ساخت)

۹ـ گزینه «۴»

$(4x+xy^{2})\,dx+(y+x^{2}y)\,dy=0$

$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=2xy-2xy=0$

$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q;\ \text{کامل}} (4x+xy^{2})\,dx+y\,dy=0 \xrightarrow{\int \text{(معادله حاصل)}} 2x^{2}+\frac{x^{2}}{2}y^{2}+\frac{y^{2}}{2}+c=0$

$\xrightarrow{y(0)=0;\ \text{با جایگذاری } (x=0;y=0) \text{ در جواب عمومی}} c=0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} 2x^{2}+\frac{x^{2}y^{2}}{2}+\frac{y^{2}}{2}=0 \Rightarrow$

$4x^{2}+x^{2}y^{2}+y^{2}=0 \Rightarrow 4x^{2}+x^{2}y^{2}+y^{2}+4=4 \Rightarrow x^{2}(4+y^{2})+(y^{2}+4)=4 \Rightarrow$

$(4+y^{2})(x^{2}+1)=4$

۱۰ـ گزینه «۲» حل اول:

$xy'-2y=x^{3}\cos 4x \xrightarrow{\frac{1}{x}\times \text{(طرفین)}} y'-\frac{2}{x}y=x^{2}\cos 4x$

$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x} \mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2Lnx}=\frac{1}{x^{2}}$ &

$y(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^{2}}}\{\int \frac{1}{x^{2}}\times x^{2}\cos 4x\ dx+c\} \Rightarrow y=x^{2}(\frac{1}{4}\sin 4x+c) \Rightarrow \lim_{x\to 0} y=0$

حل دوم:

$xy'-2y=x^{3}\cos 4x \Rightarrow y=\frac{1}{2}(xy'-x^{3}\cos 4x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} y=0$

لازم بذکر است، با توجه به شرط اولیه $y(0)=0$ و ضابطه معادله دیفرانسیل مفروض مقدار $y'(0)$ موجود و متناهی است.

۱۱ـ گزینه «۱»

$$x^۳y''' - ۳x^۲y'' + ۶xy' - ۶y = ۰$$

معادله دیفرانسیل مفروض، یک معادله اویلر مرتبه ۳ است. در نتیجه با توجه به فرمول (۲ ـ ۲۰) و جایگذاریهای $(xy' = D \quad \& \quad x^۲y'' = D(D-۱) \quad \& \quad x^۳y''' = D(D-۱)(D-۲))$، ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت حاصل از اعمال تغییر متغیر $u = Lnx$ در معادله دیفرانسیل مفروض اینگونه بدست می‌آیند:

$$D(D-۱)(D-۲) - ۳D(D-۱) + ۶D - ۶ = ۰ \quad \Rightarrow \quad (D-۱)(D^۲ - ۵D + ۶) = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(D-۱)(D-۲)(D-۳) = ۰ \longrightarrow D_۱ = ۱ \quad \& \quad D_۲ = ۲ \quad \& \quad D = ۳$$

در اینصورت جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_۱ e^{Lnx} + c_۲ e^{۲Lnx} + c_۳ e^{۳Lnx} \quad \Rightarrow \quad y = c_۱ x + c_۲ x^۲ + c_۳ x^۳$$

۱۲ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۲ - ۲\lambda + ۱ = ۰ \longrightarrow (\lambda-۱)^۲ = ۰ \longrightarrow \text{ریشه مضاعف } \lambda = ۱$$

لذا مطابق فرمول (۲ـ۹) بدست می‌آوریم:

$$y_h = c_۱ e^x + c_۲ x e^x$$

حال با فرض $y_۱ = e^x$ و $y_۲ = x e^x$ داریم:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{۲x}$$

بنابراین؛

$$u_۱ = -\int \frac{y_۲\, r(x)}{w(x)}\, dx = -\int \frac{x e^x (\frac{e^x}{x^۲})}{e^{۲x}}\, dx = -\int \frac{dx}{x} = -Lnx$$

$$u_۲ = \int \frac{y_۱\, r(x)}{w(x)}\, dx = \int \frac{e^x (\frac{e^x}{x^۲})}{e^{۲x}}\, dx = \int \frac{dx}{x^۲} = -\frac{۱}{x}$$

در اینصورت یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض از تساوی زیر بدست می‌آید:

$$y_p = u_۱y_۱ + u_۲y_۲ = (-Lnx)e^x + (-\frac{۱}{x})x e^x \quad \Rightarrow \quad y_p = (-Lnx)e^x - e^x$$

با توجه به اینکه تابع $y = Lnx$ در $x = ۰$ تعریف نشده است در نتیجه جواب خصوصی حاصل نیز در این نقطه تعریف نمی‌شود. امّا اگر حد جواب خصوصی در نقطه $x = ۰$ مدنظر باشد، از آنجائیکه دامنه تعریف تابع $y = Lnx$، محدوده اعداد حقیقی مثبت است، داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} y_p = \lim_{x \to ۰^+} (-Lnx - ۱)e^x \xrightarrow{x \to ۰^+ \Rightarrow Lnx \to -\infty} \lim_{x \to ۰^+} y_p = +\infty$$

۱۳ـ گزینه «۲»

$$F(s) = L[t^{-\frac{۱}{۲}}] \xrightarrow{t^\alpha \xrightarrow{L} \frac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}} F(s) = \frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{s^{\frac{۱}{۲}}} \xrightarrow{\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}} F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

۱۴ـ گزینه «۴»

$$y'' + ۴y' + ۴y = ۰ \quad \Rightarrow \quad L[y''] + ۴L[y'] + ۴L[y] = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(s^۲L[y] - s\,y(۰) - y'(۰)) + ۴(sL[y] - y(۰)) + ۴L[y] = ۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۲ \quad \& \quad y'(۰)=-۲} s^۲L[y] - ۲s + ۲ + ۴sL[y] - ۸ + ۴L[y] = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$(s^۲ + ۴s + ۴)L[y] = ۲s + ۶ \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{۲s+۶}{s^۲ + ۴s + ۴}$$

۱۵ـ گزینه «۲» یادآوری. فرض کنید $a_۰(x)$ و $a_۱(x)$ و $a_۲(x)$ در نقطه $x = x_۰$ تحلیلی هستند. در اینصورت $x_۰$ را در یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $a_۲(x)y'' + a_۱(x)y' + a_۰(x)y = ۰$ می‌نامند، هرگاه $a_۲(x_۰) \neq ۰$ باشد. در اینصورت با توجه به اینکه توابع $a_۲(x) = x^۲$ و $a_۱(x) = ۲$ و $a_۰(x) = t^۲ - t$ تحلیلی هستند و $a_۲(۱) = ۱$ مخالف صفر است در نتیجه $x = ۱$، یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $x^۲y'' + ۲y' + (t^۲ - t)y = ۰$ است.

۱۶ـ گزینه «۴» قضیه تعامد لژاندر: مجموعه چند جمله‌ایهای لژاندر $P_\nu(x) \quad ; \quad \nu \in Z^+$ نسبت به تابع وزن $\phi(x) = ۱$ در فاصله $[-۱,۱]$ متعامد هستند. بعبارت دیگر؛

$$\int_{-۱}^{۱} P_\nu(x)P_w(x)\, dx = \begin{cases} ۰ & ; \nu \neq w \\ \int_{-۱}^{۱} P_\nu^۲(x)\, dx = \frac{۲}{۲\nu+۱} & ; \nu = w \end{cases}$$

مهندسی مکانیک (ساخت و تولید)

۱۷ـ گزینه «۳»

$$(۲xy^۲ - ۳y^۳)\, dx + (۷ - ۳xy^۲)\, dy = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} -۳y^۲ - (۴xy - ۹y^۲) = ۶y^۲ - ۴xy \neq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع دوم}} \frac{\Delta}{P} = \frac{۲y(۳y-۲x)}{y^۲(۲x-۳y)} = -\frac{۲}{y} = a(y) \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = e^{\int -\frac{۲}{y}\, dy} = e^{-۲Lny} = \frac{۱}{y^۲}$$

$$\xrightarrow{\mu(y) \times (\text{معادله})} \frac{۱}{y^۲}((۲xy^۲ - ۳y^۳)\, dx + (۷ - ۳xy^۲)\, dy) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (۲x - ۳y)\, dx + (\frac{۷}{y^۲} - ۳x)\, dy = ۰$$

معادله دیفرانسیل حاصل با توجه به تعریف عامل انتگرالساز، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} (۲x - ۳y)\, dx + \frac{۷}{y^۲}\, dy = ۰ \xrightarrow{\int (\text{معادله حاصل})} x^۲ - ۳yx - \frac{۷}{y} + c = ۰$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$y' + y\tan x = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y' + (\tan x)y = \sin 2x$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int \tan x\,dx} = e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos x} \qquad \&$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}}\{\int \frac{1}{\cos x} \times \sin 2x \;\; dx\} = \cos x\{\int \frac{1}{\cos x} \times 2\sin x\cos x \;\; dx + c\} \quad \Rightarrow$$

$$y = \cos x(-2\cos x + c) \quad \Rightarrow \quad y = -2\cos^2 x + c\cos x$$

۱۹ـ گزینه «۲»

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 yy'' = y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2$$

معادله مفروض یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن است. در اینصورت با اعمال تغییر متغیر $z = \frac{y'}{y}$ بدست می‌آوریم:

$$(\frac{y'}{y} = z \quad \Rightarrow \quad y' = yz \qquad \& \qquad y'' = y'z + yz' \xrightarrow{y'=yz} y'' = y^2(z^2 + z'))$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } y',\, y'' \text{ در معادله مفروض}} x^2y^2(z^2 + z') = y^2 - 2xy^2z + x^2y^2z^2$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{y^2}\times(\text{معادله})} x^2z^2 + x^2z' = 1 - 2xz + x^2z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2z' = 1 - 2xz$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{x^2}\times(\text{معادله})} z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } z \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2 \qquad \&$$

$$z = \frac{1}{x^2}\{\int x^2 \times \frac{1}{x^2}\,dx + c_1\} = \frac{1}{x^2}(x + c_1) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{y'}{y}} \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = (\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2})\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ جدا شونده}} \ln y = \ln x - \frac{c_1}{x} + c \quad \Rightarrow \quad \ln y - \ln x = -\frac{c_1}{x} + c \quad \Rightarrow$$

$$\ln\frac{y}{x} = -\frac{c_1}{x} + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = e^{-\frac{c_1}{x}+c} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = c_2 e^{-\frac{c_1}{x}} \;\; ; (e^c = c_2) \quad \Rightarrow \quad y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}$$

۲۰ـ گزینه «۴»

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \pm i \end{cases}$$

در اینصورت مطابق فرمولهای (۲ـ۱۲) و (۲ـ۱۴) جواب عمومی قسمت همگن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_1 e^x + c_2\cos x + c_3\sin x$$

برای محاسبه y_p چون $r(x) = x^2 + x$ یک چند جمله‌ای درجه دوم است مطابق فرمول (۲ـ۳۳) داریم:

$$y_p = Ax^2 + Bx + c$$

حال تذکر (۲ـ۹ـ۱) را بررسی می‌کنیم. همانطور که ملاحظه می‌شود y_h دارای جملات اصلی $\sin x$ و $\cos x$ و e^x و y_p دارای جملات اصلی ۱ و x و x^2 است، در نتیجه هیچ یک از جملات اصلی y_h و y_p یکسان نیستند. بنابراین نیازی به اعمال هیچ تغییری در y_p نیست. اکنون می‌توانیم y_p را در معادله دیفرانسیل مفروض صدق دهیم تا ضرایب A و B و C را بدست آوریم. امّا بدون نیاز به این محاسبه، با توجه به شکل گزینه‌ها تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد:

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2\cos x + c_3\sin x + Ax^2 + Bx + C$$

۲۱ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

مطابق (۲ ـ ۸) داریم:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{\frac{-1}{2}t} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{c_1}{2}e^{\frac{1}{2}t} - \frac{c_2}{2}e^{\frac{-1}{2}t}$$

در نتیجه:

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2 \quad \& \quad y'(0) = \beta \Rightarrow \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2} = \beta \Rightarrow c_1 - c_2 = 2\beta$$

بنابراین $c_1 = 1 + \beta$ و $c_2 = 1 - \beta$ در نتیجه جواب معادله با دو شرط داده شده بصورت زیر است:

$$y = (1+\beta)e^{\frac{1}{2}t} + (1-\beta)e^{\frac{-1}{2}t}$$

وقتی $\lim_{t\to+\infty} y = 0$ که $1 + \beta = 0$ باشد درنتیجه $\beta = -1$

۲۲ـ گزینه «۳» معادله دیفرانسیل مفروض، معادله بسل مرتبه ۲ است. در نتیجه جواب عمومی آن از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y = c_1 J_2(x) + c_2 Y_2(x)$$

۲۳ـ گزینه «۲»

$$F(s) = L[f(t)] = L[\delta(t-1)\cos t] \xrightarrow{L[\delta(t-a)f] = e^{-as}f(a)} F(s) = e^{-s}\cos 1$$

مهندسی مکانیک (تبدیل انرژی)

۲۴ـ گزینه «۴» حل اول:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۸) داریم:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \qquad \text{(جواب عمومی)}$$

برای محاسبه c_1 و c_2 با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \;\; ; (I) \xrightarrow{x=0} y(0) = c_1 + c_2 \xrightarrow{y(0)=4} \boxed{c_1 + c_2 = 4} \qquad \&$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y' = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} \xrightarrow{x=0} y'(0) = c_1 - 2c_2 \xrightarrow{y'(0)=1} \boxed{c_1 - 2c_2 = 1}$$

در نتیجه؛

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 3 \quad \& \quad c_2 = 1 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y = 3e^{x} + e^{-2x}$$

حل دوم:

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^2 L[y] - s\,y(0) - y'(0)) + (sL[y] - y(0)) - 2L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=4 \ \& \ y'(0)=1} (s^2 L[y] - 4s - 1) + (sL[y] - 4) - 2L[y] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(s^2 + s - 2)L[y] = 4s + 5 \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{4s+5}{(s-1)(s+2)} \quad \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+2}\right] \quad \Rightarrow \quad y = 3e^{x} + e^{-2x}$$

یادآوری.

$$\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2)+B(s-1)}{(s-1)(s+2)} \quad \Rightarrow$$

$$A(s+2) + B(s-1) \equiv 4s + 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 1; & 3A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 3 \\ s = -2; & -3B = -3 \quad \Rightarrow \quad B = 1 \end{cases}$$

۲۵ـ گزینه «۴»

$$y'' - 2y' + 10\,y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm 3i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

در اینصورت مطابق فرمول (۲ـ۱۰) داریم:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

۲۶ـ گزینه «۲»

$$L[f(t)] = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

یادآوری.

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega^2} = \frac{(Bs+C)s + A(s^2+\omega^2)}{s(s^2+\omega^2)} \quad \Rightarrow$$

$$(Bs+C)s + A(s^2+\omega^2) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 0; & A\omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\omega^2} \\ s = 1; & B + C = -\frac{1}{\omega^2} \\ s = -1; & B - C = -\frac{1}{\omega^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = -\frac{1}{\omega^2} \\ C = 0 \end{cases}$$

سئوالات آزمون سراسری ۸۷

مهندسی برق

۱ـ جواب مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} (2x+y)\dfrac{dy}{dx} = 3 + 2x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $\text{Ln}(1+2x+y) = y - x$

۲) $\text{Ln}(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y) = y - x$

۳) $\text{Ln}(1+2x+y) = y + x$

۴) $\text{Ln}(1+2x+y) = y + 2x$

۲ـ شکل کلی پاسخ غیر ثابت معادله دیفرانسیل $yy'' + 2y'^2 = 0$ **عبارت است از:**

۱) $y^2 = \dfrac{1}{ax+b}$

۲) $y^2 = Ax + B$

۳) $y^3 = \dfrac{1}{Ax+B}$

۴) $y^3 = Ax + B$

۳ـ شکل جواب اختصاصی معادله دیفرانسیل $y'''' + 2y'' + y = \sin x$ **چیست؟**

۱) $Ax^2 \sin(x+\varphi)$

۲) $Ax \sin(x+\varphi)$

۳) $x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

۴) $(A_2x^2 + A_1x + A_0)(\sin x + \cos x)$

۴ـ تبدیل لاپلاس جواب مسئله: $y(0) = 1 \ , \ y' + xy = 0$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{C}{s^2-1}$

۲) $\dfrac{C}{\sqrt{s^2-1}}$

۳) $\dfrac{C_s}{s^2+1}$

۴) $\dfrac{C}{\sqrt{s^2+1}}$

مهندسی عمران

۵ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 4y' = e^{-2x}$ **کدام گزینه است؟**

۱) $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}$

۲) $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{8}xe^{-2x}$

۳) $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + xe^{-2x}$

۴) $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + xe^{-2x}$

۶ـ جواب عمومی معادله $(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$ **چیست؟**

۱) $y = c_1|x-2|^{-\frac{5}{2}} + c_2|x-2|^{-\frac{3}{2}}$

۲) $y = c_1|x-2|^{-\frac{3}{2}} + c_2|x-2|^{-\frac{1}{2}}$

۳) $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(\text{Ln}|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\sin(\text{Ln}|x-2|)$

۴) $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\text{Ln}|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\sin(2\text{Ln}|x-2|)$

۷ـ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $3x(2+3x)y'' - 4y' + 4y = 0 \ , \ x > 0$ **به کدام‌یک از صورت‌های زیر می‌باشند؟**

۱) $y_1 = \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{5}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۲) $y_1 = \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \ , \ y_2 = x^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_1 = \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \ , \ y_2 = y_1 \text{Ln}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

۴) $y_1 = x^3 \sum_{n=0}^{n} a_n x^n \ , \ y_2 = y_1 \text{Ln}x + x^5 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

۸ـ جواب مسئله $y(۴)=۰$; $y'=\frac{۲xy}{y^۲-x^۲}$ به ازای $y=۱$ برابر است با:

۱) $x=۱$ ۲) $x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=\sqrt{۳}$

۹ـ اگر $F(s)=\frac{۱}{(s-۲)(s^۲+۱)}$ تبدیل لاپلاس تابع f باشد، $f(۱)$ برابر با چیست؟

یادآوری می‌شود که تبدیل لاپلاس توابع t^n ، $\sin at$ ، $\cos at$ به ترتیب عبارتند از $\frac{n!}{s^{n+۱}}$ ، $\frac{a}{s^۲+a^۲}$ ، $\frac{s}{s^۲+a^۲}$

۱) $\frac{۱}{۵}(e^{۲t}-\cos t-۲\sin t)$ ۲) $\frac{۱}{۵}(e^{t}+\cos t-\sin t)$

۳) $\frac{۱}{۵}(e^{۲t}-۲\cos t-\sin t)$ ۴) $\frac{۱}{۵}(e^{t}-\cos t-۲\sin t)$

۱۰ـ جواب مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y''+۴y=f(t) \\ y(۰)=۳\ ,\ y'(۰)=-۱ \end{cases}$ چیست؟

۱) $y=۳\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\int_۰^t \cos ۲(t-x)f(x)dx$ ۲) $y=\frac{۳}{۲}\sin ۲t-\cos ۲t+\frac{۱}{۲}\int_۰^t \sin ۲(t-x)f(x)dx$

۳) $y=۳\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t+\frac{۱}{۲}\int_۰^t \cos ۲(t-x)f(x)dx$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}\sin ۲t-\cos ۲t+\frac{۱}{۲}\int_۰^t \sin ۲(t-x)f(x)dx$

مهندسی مکانیک

۱۱ـ اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر با $F(s)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس $f(\frac{t}{a})$، $a>۰$ کدام است؟

۱) $aF(\frac{S}{a})$ ۲) $aF(as)$ ۳) $\frac{۱}{a}F(\frac{S}{a})$ ۴) $\frac{۱}{a}F(as)$

۱۲ـ اگر جواب‌های معادله دیفرانسیل زیر را به صورت $y=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r}$ فرض کنیم، آنگاه مقادیر r کدامند؟

$$۲x^۲y''-۳xy'+(x+۳)y=۰$$

۱) $-۱,-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-۱,-\frac{۲}{۳}$ ۳) $۱,\frac{۳}{۲}$ ۴) $۱,-\frac{۳}{۲}$

۱۳ـ با تغییر متغیر $z=\sqrt{x}$ معادله‌ی دیفرانسیل زیر به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ $\left(\dot{y}=\frac{dy}{dz}\right)$

$$۴x^۲y''+۴xy'+(x-۴)y=۰ \quad ; \quad$$

۱) $z^۲\ddot{y}+z\dot{y}+(z^۲-۴)y=۰$ ۲) $z^۲\ddot{y}+۲z\dot{y}+(z^۲-۴)y=۰$

۳) $۴z^۴\ddot{y}+۴z^۲\dot{y}+(z^۲-۴)y=۰$ ۴) $z^۲\ddot{y}-z\dot{y}+(z^۲-۴)y=۰$

۱۴ـ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر به کدام صورت است؟

$$y^{(۴)}-۲y'''+۵y''=۲xe^x\sin ۲x$$

۱) $(Ax+B)e^x\sin ۲x$ ۲) $x(Ax+B)e^x\sin ۲x$

۳) $e^x[(Ax+B)\cos ۲x+(Cx+D)\sin ۲x]$ ۴) $xe^x[(Ax+B)\cos ۲x+(Cx+D)\sin ۲x]$

مهندسی مکاترونیک

۱۵ـ جواب مسأله $\begin{cases} \frac{d^۲x}{dt^۲}-۲\frac{dx}{dt}-۳x=۰ \\ x(۰)=۱, x'(۰)=۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $x=\frac{۱}{۴}e^{-t}+\frac{۳}{۴}e^{۳t}$ ۲) $x=\frac{۴}{۵}e^{-t}+\frac{۱}{۵}e^{۳t}$ ۳) $x=\frac{۱}{۲}e^{-t}+\frac{۱}{۲}e^{۳t}$ ۴) $x=\frac{۱}{۳}e^{-t}+\frac{۲}{۳}e^{۳t}$

۱۶ـ جواب مسأله $y(۰)=۱$ ، $y'(۰)=۵$ و $yy''+y'^۲=۰$ کدام است؟

۱) $y=\pm\sqrt{۵x^۲+۲x+۱}$ ۲) $y=\pm\sqrt{۳x^۲+۲x+۳}$ ۳) $y=\pm\sqrt{۵x^۲+x+۲}$ ۴) $y=\pm\sqrt{۴x^۲+۲x+۲}$

۱۷ـ جواب عمومی معادله $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}$ کدام است؟

۱) $y=cx+D$ ۲) $y^۲=۴x+D$ ۳) $y^۲=۴x^۲+cx+D$ ۴) $y=cx+\frac{۱}{c}$ یا $y^۲=۴x$

۱۸ـ معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\begin{cases} y(۱-۲x) & x>۰ \\ y(۲x-۱) & x<۰ \end{cases}$ چند جواب با شرایط اولیه‌ی $y=۱$ و $x=۱$ می‌پذیرد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹ـ معادله‌ی دیفرانسیل $dx-xdy=۰$ $(y^۴+y)$ را در کدام عامل ضرب کنیم تا یک معادله‌ی کامل حاصل شود؟

۱) xy ۲) $\frac{۱}{x}$ ۳) $\frac{۱}{y^۲}$ ۴) $\frac{۱}{y+۱}$

مهندسی هوا فضا

۲۰ـ جواب مسأله $y'''-۲y''-y'+۲y=۰$ ، $y(۰)=y'(۰)=۰$ ، $y''(۰)=۱$ کدام است؟

۱) $y(x)=e^{-x}-\frac{۱}{۲}e^{x}+\frac{۱}{۶}e^{۲x}$ ۲) $y(x)=e^{-x}+\frac{۱}{۲}e^{x}-\frac{۱}{۶}e^{۲x}$

۳) $y(x)=e^{-x}-\frac{۱}{۲}e^{x}-\frac{۱}{۳}e^{۲x}$ ۴) $y(x)=\frac{۱}{۶}e^{-x}-\frac{۱}{۲}e^{x}+\frac{۱}{۳}e^{۲x}$

۲۱ـ یک جواب تقریبی مسأله $y'=۱+y^۲$ ، $y(۰)=۰$ کدام است؟

۱) $x-\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۲}{۱۵}x^۵-\frac{۱}{۶۳}x^۷$ ۲) $-x+\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۲}{۱۵}x^۵+\frac{۱}{۶۳}x^۷$

۳) $x+\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۲}{۱۵}x^۵+\frac{۱}{۶۳}x^۷$ ۴) $-(x+\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۲}{۱۵}x^۵+\frac{۱}{۶۳}x^۷)$

۲۲ـ یک عامل انتگرال ساز برای معادله $۳\sin(y^۲)dx+xy\cos(y^۲)dy=۰$ کدام است؟

۱) $۲x^۳$ ۲) $x^{-۳}y^۲$ ۳) $y^۳$ ۴) $x^۳y^{-۲}$

پاسخنامه آزمون سراسری ۸۷

مهندسی برق

۱ـ گزینه «۱»

$$(۲x+y)\frac{dy}{dx}=۳+۲x+y$$

$$\xrightarrow{(۲x+y=u\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-۲)} u(\frac{du}{dx}-۲)=۳+u \Rightarrow u\frac{du}{dx}-۲u=۳+u \Rightarrow u\frac{du}{dx}=۳+۳u \Rightarrow$$

$$\frac{u}{۳(۱+u)}du=dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شوند}} \frac{۱}{۳}\int\frac{u}{۱+u}du=x+c \Rightarrow \frac{۱}{۳}(u-Ln(u+۱))=x+c$$

$$\xrightarrow{u=۲x+y} ۲x+y-Ln(۲x+y+۱)=۳x+C \quad ; (۳c=C)$$

$$\xrightarrow{(y(۰)=۰\Rightarrow (x=۰\ \&\ y=۰)\text{ با جایگذاری }} -Ln(۱)=C \Rightarrow C=۰$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} Ln(۲x+y+۱)=y-x$$

۲ـ گزینه «۴» حل اول: معادله دیفرانسیل مفروض فاقد x است. در اینصورت با جایگذاری $(y'=z \Rightarrow y''=z\frac{dz}{dy})$ داریم:

$$yz\frac{dz}{dy}+۲z^۲=۰ \Rightarrow y\frac{dz}{dy}=-۲z \Rightarrow \frac{dz}{z}=-۲\frac{dy}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شوند}} Lnz=-۲Ln(cy)=Ln(cy)^{-۲} \xrightarrow{Ln\text{ تابعی ۱-۱ است}} z=Cy^{-۲} \quad ; (c^{-۲}=C)$$

$$\xrightarrow{z=y'} y'=\frac{C}{y^۲}\Rightarrow y^۲\,dy=C\,dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شوند}} \frac{y^۳}{۳}=Cx+D \Rightarrow y^۳=Ax+B \quad ; (۳C=A\ \&\ ۳D=B)$$

حل دوم: معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله مرتبه دوم همگن است:

$$\xrightarrow{(\frac{y'}{y}=u\Rightarrow y''=y(u'+u^۲))} y^۲(u'+u^۲)+۲(uy)^۲=۰ \Rightarrow \frac{du}{dx}=-۳u^۲ \Rightarrow \frac{du}{-۳u^۲}=dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شوند}} \frac{۱}{۳u}=x+c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y'}{y}} ۳\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+c} \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ ; جدا شوند}} ۳Lny=Ln(c_۱(x+c)) \Rightarrow$$

$$Ln(y^۳)=Ln(Ax+B) \quad ; (c_۱=A\ \&\ c_۱c=B) \Rightarrow y^۳=Ax+B$$

۳ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^۴+۲\lambda^۲+۱=۰ \longrightarrow (\lambda^۲+۱)^۲=۰ \longrightarrow \lambda^۲+۱=۰ \longrightarrow \lambda=\pm i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=۰\\ \beta=۱\end{cases}$$

جمع ریشه‌های موهومی فوق ۲ بار تکرار شده اند، لذا جواب عمومی معادله مفروض، مطابق (۲ـ۱۴) بصورت زیر می‌باشد:

$$y_h=c_۱\cos x+c_۲\sin x+c_۳\,x\cos x+c_۴\,x\sin x$$

چون $r(x)=\sin x$ است، با توجه به روش ضرائب نامعین و مطابق (۲-۳۲) داریم:

$$y_p=a\sin x+b\cos x$$

مطابق تذکر (۲-۹- ۱) ضرب $x^۲$ در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_h , y_p یکسان نشوند. بنابراین:

$$y_p=x^۲(a\sin x+b\cos x)$$

حال با فرض $a=A\cos\varphi$ و $b=A\sin\varphi$ بدست می‌آوریم:

$$y_p=x^۲(A\cos\varphi\sin x+A\sin\varphi\cos x)=Ax^۲\sin(x+\varphi)$$

۴ـ گزینه «۴»

$$xy''+y'+xy=۰ \Rightarrow x(y''+y)+y'=۰ \Rightarrow L[x(y''+y)]+L[y']=۰$$

$$\xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -(L[y''+y])'+L[y']=۰$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=S^nL[f]-S^{n-۱}f(۰)-\ldots-f^{(n-۱)}(۰)} -((s^۲Y(s)-sy(۰)-y'(۰))+Y(s))'+(sY(s)-y(۰))=۰$$

$$\xrightarrow{y(۰)=۱} -(s^۲Y(s)-s-y'(۰)+Y(s))'+sY(s)-۱=۰ \Rightarrow$$

$$-(۲s\times Y(s)+s^۲Y'(s)-۱+Y'(s))+sY(s)-۱=۰ \Rightarrow -۲sY-s^۲Y'+۱-Y'+sY-۱=۰$$

$$-sY-(۱+s^۲)Y'=۰ \Rightarrow sY=-(۱+s^۲)\frac{dY}{ds} \Rightarrow \frac{dY}{Y}=-\frac{s}{۱+s^۲}ds$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ : جدا شونده}} LnY=\frac{-۱}{۲}Ln(۱+s^۲)+Lnc \Rightarrow LnY=Ln\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}+Lnc \Rightarrow$$

$$Ln\,Y=Ln\frac{c}{\sqrt{۱+s^۲}} \Rightarrow Y=\frac{c}{\sqrt{۱+s^۲}}$$

مهندسی عمران

۵ـ گزینه «۲» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$D^۳-۴D=۰ \longrightarrow D(D^۲-۴)=۰ \longrightarrow D=۰,\pm۲$$

در این صورت جواب عمومی قسمت همگن مطابق فرمول (۲-۱۲) از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=c_۱e^{۰x}+c_۲e^{۲x}+c_۳e^{-۲x}=c_۱+c_۲e^{۲x}+c_۳e^{-۲x}$$

برای محاسبه y_p با توجه به روش اپراتور معکوس و مطابق (۲- ۲۵) داریم:

$$y_p=\frac{x}{F'(\alpha)}e^{\alpha x}=\frac{x}{(۳D^۲-۴)}e^{-۲x}=\frac{x}{۳(-۲)^۲-۴}e^{-۲x}=\frac{۱}{۸}xe^{-۲x}$$

در نتیجه ضابطه جواب عمومی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$y=y_h+y_p=c_۱+c_۲e^{۲x}+c_۳e^{-۲x}+\frac{۱}{۸}xe^{-۲x}$$

۶ـ گزینه «۴» معادله مفروض یک معادله لژاندار مرتبه دوم همگن است که با تغییر متغیر $u=Ln|x-۲|$ و جایگزینی‌های (۲ -۱۶) داریم:

$$(y''_u-y'_u)+۵(y'_u)+۸y=۰ \Rightarrow y''_u+۴y'_u+۸y=۰$$

ریشه‌های معادله مشخصه معادله حاصل عبارتند از:

$$\lambda^۲+۴\lambda+۸=۰ \longrightarrow \lambda=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶-۳۲}}{۲}=-۲\pm۲i$$

در اینصورت جواب عمومی معادله حاصل از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h = c_1 e^{-2u}\cos 2u + c_2 e^{-2u}\sin 2u$$

$$\xrightarrow{u=\mathrm{Ln}|x-2|} y_h = c_1 e^{-2\mathrm{Ln}|x-2|}\cos(2\mathrm{Ln}|x-2|) + c_2 e^{-2\mathrm{Ln}|x-2|}\sin(2\mathrm{Ln}|x-2|) \Rightarrow$$

$$y_h = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\mathrm{Ln}|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\sin(2\mathrm{Ln}|x-2|)$$

۷ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم با $p_0=\frac{-2}{3}$ و $q_0=0$ است و هم‌چنین $r_1=\frac{5}{3}$ ، $r_2=0$ ریشه‌های معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{5}{3}r=0$ در رابطه $r_1-r_2=\frac{5}{3}\notin Z$ صدق می‌کنند. در اینصورت طبق قضیه $\overline{\mathrm{II}}$ـ حالت اول. دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای زیر هستند:

$$y_1 = x^{\frac{5}{3}}\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \& \qquad y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$$

۸ـ گزینه «۲»

$$y' = \frac{2xy}{y^2-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2-x^2} \Rightarrow 2xy\,dx + (x^2-y^2)dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = 2x - 2x = 0 \xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } y \text{ در } P\text{ ; کامل}} (x^2-y^2)\,dy = 0 \xrightarrow{\text{(معادله حاصل) } \int} x^2 y - \frac{y^3}{3} + c = 0$$

$$\xrightarrow{x=4} 16\,y(0) - \frac{(y(0))^3}{3} + c = 0 \xrightarrow{y(4)=0} c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} x^2 y - \frac{y^3}{3} = 0 \xrightarrow{y=1} x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

لازم بذکر است معادله دیفرانسیل مفروض را به روش معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن نیز می‌توان حل کرد.

۹ـ گزینه «۱»

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+1}\right] = \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{s+2}{s^2+1}\right] \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} - \cos t - 2\sin t)$$

راهنمایی:

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s-2)}{(s-2)(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$A(s^2+1)+(Bs+C)(s-2) \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} s=2\ ;\ 5A=1 & \Rightarrow A=\frac{1}{5} \\ s=0\ ;\ A-2C=1 & \Rightarrow C=\frac{-2}{5} \\ s=1\ ;\ 2A-(B+C)=1 & \Rightarrow B=\frac{-1}{5} \end{cases}$$

۱۰ـ گزینه «۴»

$$y''+4y=f(t) \Rightarrow L[y'']+4L[y]=L[f(t)]$$

$$\xrightarrow{L[f'']=s^2L[f]-sf(0)-f'(0)} (s^2L[y]-3s+1)+4L[y]=L[f(t)] \Rightarrow (s^2+4)L[y]=3s-1+L[f(t)] \Rightarrow$$

$$L[y]=\frac{3s-1}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}\cdot L[f(t)] \Rightarrow y=L^{-1}[\frac{3s-1}{s^2+4}]+L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}\cdot L[f(t)]]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F.G]=L^{-1}[F]*L^{-1}[G]} y=3\cos 2t-\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 2t * f(t)$$

$$\xrightarrow{f*g=\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx} y=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x)\,f(x)\,dx$$

مهندسی مکانیک

۱۱ـ گزینه «۲» با توجه به قاعده تغییر مقیاس در تبدیل لاپلاس داریم:

$$\xrightarrow{L[f(kt)=\frac{1}{k}L[f(t)]\Big|_{s\mapsto\frac{s}{k}}} L[f(\frac{t}{a})]=\frac{1}{\frac{1}{a}}L[f(t)]\Big|_{s\mapsto\frac{s}{\frac{1}{a}}} = a\,F(as)$$

۱۲ـ گزینه «۳»

$$\xrightarrow{a_2(x)=2x^2} a_2(0)=0 \Rightarrow (p_0=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-3x}{2x^2}=\frac{-3}{2} \quad \& \quad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{x+3}{2x^2}=\frac{3}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله شاخصی متناظر}} f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{5}{2}r+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow r=1,\frac{3}{2}$$

۱۳ـ گزینه «۱» معادله دیفرانسیل مفروض، از دسته معادلات قابل تبدیل به معادله بسل با نمایش عمومی $4x^2y''+4xy'+(x-\lambda^2)y=0$; $\lambda\geq 0$، با فرض $\lambda=2$ است، که با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ به معادله بسل مرتبه λ، با ضابطه $t^2y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0$ تبدیل می‌شود. لازم بذکر است جواب عمومی آن نیز از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1J_\lambda(\sqrt{x})+c_2Y_\lambda(\sqrt{x}) \xrightarrow{\lambda=2} y=c_1J_2(\sqrt{x})+c_2Y_2(\sqrt{x})$$

۱۴ـ گزینه «۴» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda^2-2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i \end{cases}$$

برای ریشه تکراری $\lambda=0$ مطابق (۲-۱۳) جمله c_1+c_2x و برای ریشه‌های مختلط $1\pm 2i$ مطابق (۲-۱۴) جمله $c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$ را به عنوان جواب عمومی قسمت همگن در نظر می‌گیریم:

$$y_h=c_1+c_2x+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$$

چون $r(x)=۲xe^{x}\sin ۲x$ است، به روش ضرائب نامعین و مطابق (۲ – ۳۸) داریم:

$$y_p=e^{x}(Ax+A_۰)\sin ۲x+e^{x}(Bx+B_۰)\cos ۲x$$

مطابق تذکر (۲-۹-۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_h ، y_p یکسان نشوند، بنابراین:

$$y_p=xe^{x}(Ax+A_۰)\sin ۲x+xe^{x}(Bx+B_۰)\cos ۲x$$

مهندسی مکاترونیک

۱۵ـ گزینه «۳» بدون نیاز به حل معادله دیفرانسیل مفروض و با توجه به شرایط اولیه، فقط گزینه (۳) می‌تواند صحیح باشد. تمامی گزینه‌ها در شرط $x(۰)=۱$ صدق می‌کنند. امّا تنها گزینه (۳) است که در شرط $x'(۰)=۱$ صدق می‌کند؛

$$x(t)=\frac{۱}{۲}e^{-t}+\frac{۱}{۲}e^{۳t}\begin{cases}\xrightarrow{t=۰} x(۰)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱\\ \xrightarrow[\frac{dx}{dt}]{\text{(طرفین)}} x'(t)=\frac{-۱}{۲}e^{-t}+\frac{۳}{۲}e^{۳t}\xrightarrow{t=۰} x'(۰)=\frac{-۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۱\end{cases}$$

۱۶ـ گزینه «۱» حل اول: تنها گزینه (۱) در شرط اولیه $y(۰)=۱$ صدق می‌کند.

حل دوم:

$$yy''+y'^{۲}=۵\xrightarrow{yy''+y'^{۲}=(yy')'}(yy')'=۵\quad\Rightarrow\quad yy'=۵x+c_۱\quad\Rightarrow\quad y\,dy=(۵x+c_۱)dx$$

$$\xrightarrow[\text{جدا شونده}]{\text{(طرفین) }\int:}\frac{y^{۲}}{۲}=۵(\frac{x^{۲}}{۲})+c_۱x+c_۲\quad\Rightarrow\quad(y(x))^{۲}=۵x^{۲}+۲c_۱x+۲e_۲$$

$$\xrightarrow{x=۰}(y(۰))^{۲}=۲c_۲\xrightarrow{y(۰)=۱}۲c_۲=۱\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}}y^{۲}=۵x^{۲}+۲c_۱x+۱$$

در اینصورت بدون حل کامل، تنها گزینه (۱) می‌تواند صحیح باشد.

۱۷ـ گزینه «۱»

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}\xrightarrow{y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{۱}{y'}}y=xy'+\frac{۱}{y'}\xrightarrow{\text{معادله کلرو}\ ;\ y'\mapsto P}y=xP+\frac{۱}{P}$$

لازم بذکر است تابع $y^{۲}=۴x$ که در گزینه (۴) آمده است، جواب غیرعادی و یا به عبارت دیگر پوش جواب عمومی می‌باشد.

۱۸ـ گزینه «۲» با توجه به شرط اولیه $x=۱$، جواب را کافیست برای مسأله $\frac{dy}{dx}=y(۱-۲x)$ بررسی کنیم. که آن نیز با توجه به قضیه پیکار به ازاء هر شرط اولیه، تنها یک جواب خصوصی می‌تواند داشته باشد.

۱۹ـ گزینه «۳»

$$(y^{۲}+y)\,dx-x\,dy=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=-۱-(۲y+۱)=-۲y-۲\neq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع سوم}}\frac{\Delta}{P}=\frac{-۲y-۲}{y^{۲}+y}=\frac{-۲}{y}=a(y)\quad\Rightarrow\quad\mu(y)=e^{\int a(y)\,dy}=e^{-۲\int\frac{dy}{y}}=e^{-۲Lny}=\frac{۱}{y^{۲}}$$

مهندسی هوا فضا

۲۰ـ گزینه «۴» تنها گزینه‌ی «۴»، در شرط $y(۰)=۰$ صدق می‌کند.

۲۱ـ گزینه «۳»

$$y'=۱+y^{۲}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=۱+y^{۲}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{۱+y^{۲}}=dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int:\text{ جدا شونده}}Arctgy=x+c$$

$$\xrightarrow{y(۰)=c\Rightarrow(x=۰\ ,\ y=۰)\text{ با جایگذاری}}c=۰\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}}Arctgy=x\quad\Rightarrow\quad y=\tan x$$

$$\xrightarrow{\text{بسط مک لورن }\tan x}y=x+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۲x^{۵}}{۱۵}+\cdots$$

۲۲ـ هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y}\Delta=y\cos(y^{۲})-۶y\cos(y^{۲})=-۵y\cos(y^{۲})\neq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}}\frac{\Delta}{-Q}=\frac{-۵y\cos(y^{۲})}{-xy\cos(y^{۲})}=\frac{۵}{x}=a(x)\quad\Rightarrow\quad\mu(x)=e^{\int\frac{۵}{x}dx}=e^{۵Lnx}=x^{۵}$$

سئوالات آزمون آزاد ۸۷

مجموعه مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)

۱ـ کدام‌یک از گزینه‌های زیر، حل معادله دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dx^۲} = ۴x + ۳$ است؟

۱) $\frac{۳}{۴}x^۳ + ۵x^۲ + c_۱x + c_۲$
۲) $\frac{۵}{۳}x^۳ + x^۲ + c_۱x + c_۲$
۳) $\frac{۲}{۳}x^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ + c_۱x + c_۲$
۴) $۶x^۳ + \frac{۳}{۴}x^۲ + c_۱x + c_۲$

۲ـ کدام گزینه، حل معادله خطی $xy' + y = \sin x$ است؟

۱) $y = x\sin x + c$
۲) $y = c + \cos x$
۳) $y = -x\sin x + c$
۴) $y = \frac{۱}{x}(c - \cos x)$

۳ـ با فرض آن که $f(t) = \sin^۲ t$ باشد، تبدیل لاپلاس آن را تعیین کنید؟

۱) $\frac{۲}{s(s^۲+۴)}$
۲) $\frac{۲}{s^۲+۴}$
۳) $\frac{۲}{s+۲}$
۴) $\frac{۲}{s(s+۲)}$

مهندسی مکانیک (ساخت و تولید)

۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = ۱ + \frac{۱}{\sin(x-y+۱)}$ برابر است با:

۱) $\cos(y-x+۱) = ۲$
۲) $y = ۱ - x + ۲\cos^{-۱}x$
۳) $y = ۱ + x - \cos^{-۱}x$
۴) $\cos(y-x+۱) = ۱ - x^۲$

۵ـ معادله دیفرانسیل $[x^{-۱} + y^{-۱}]dx + axy^{-۲}dy = ۰$ کامل است اگر مقدار a برابر باشد با:

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۱
۴) ۱

۶ـ جواب معادله دیفرانسیل $y' - \frac{۱}{x}y = x^۲$ برابر است با (C ثابت است)

۱) $(-\frac{x^۲}{۳} + C)x$
۲) $(C + x^۲)x$
۳) $(C + \frac{x^۳}{۳})$
۴) $(C + \frac{x^۳}{۲})x$

۷ـ اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر با $F(S)$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس تابع $tf(t)$ برابر است با:

۱) $F'(S)$
۲) $-F'(S)$
۳) $SF'(S)$
۴) $-SF'(S)$

مهندسی مواد

۸ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $ydx + x(x^۲y - ۱)dy = ۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}\frac{y^۲}{x^۲} + \frac{۱}{۳}y^۳ = C$
۲) $-\frac{۱}{۲}(\frac{y}{x})^۲ + \frac{۱}{۲}y^۲ = C$
۳) $-\frac{۱}{۲}(\frac{y}{x})^۲ + \frac{۱}{۳}y^۳ = C$
۴) $-(\frac{y}{x})^۲ + y = C$

۹ـ جواب عمومی معادله $y'^۲ + ۲xy' = y^۲ - x^۲$ برابر است با:

۱) $(y + x - ۱ - c_۱e^{-x})(y - x - ۱ + c_۱e^{x}) = ۰$
۲) $(y + x - ۱ - c_۱e^{x})(y + x - ۱ - c_۱e^{-x}) = ۰$
۳) $(y - x - ۱ + c_۱e^{-x})(y + x - ۱ + c_۱e^{x}) = ۰$
۴) $(y - x + ۱ + c_۱e^{x})(y + x + ۱ + c_۱e^{-x}) = ۰$

۱۰ـ پس از تغییر متغیر $y = e^{\int u(x)dx}$ معادله‌ی $x^۲yy'' = (y - xy')^۲$ به کدام صورت در می‌آید؟

۱) $x^۲uu' = ۲ - ۲xu$
۲) $x^۲u' = ۲ + xu$
۳) $x^۲u' = ۱ - ۲xu$
۴) $x^۲uu' = ۱ + xu$

۱۱ـ جواب خصوصی $y_p(x)$ معادله دیفرانسیل $y'' + ۴y = x\sin ۲x$ از طریق کدام عبارت به دست می‌آید؟

۱) $(A_۰x^۲ + A_۱x)\cos ۲x + (B_۰x^۲ + B_۱x)\sin ۲x$
۲) $(A_۰x + A_۱)\cos ۲x + (B_۰x + B_۱)\sin ۲x$
۳) $(A_۰x^۲ + A_۱x + A_۲)\cos x$
۴) $(A_۰x^۲ + A_۱x)\cos x + (B_۰x^۲ + B_۱x)\sin ۲x$

۱۲ـ در صورتی که C عدد ثابت و مثبتی باشد و تبدیل لاپلاس $f(x)$ را $F(s)$ بنامیم، تبدیل لاپلاس $f(cx)$ کدام عبارت می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{c}F(cs)$
۲) $\frac{۱}{c}F(\frac{S}{c})$
۳) $\frac{۱}{c}F(s)$
۴) $cF(cs)$

مهندسی هوا فضا

۱۳ـ جواب معادلهٔ دیفرانسیل $x^۲ydx - (۱+x^۳)dy = ۰$ با شرط $y(۱) = ۱$ برابر است با:

۱) $۲y^۳ = ۱ + x^۳$
۲) $۲y^۲ = ۱ + x^۳$
۳) $۲y^۲ = ۱ + x^۲$
۴) $۲y^۳ = ۱ + x^۲$

۱۴ـ جواب مسأله $y(۰) = ۰$ و $y'(۰) = ۰$ و $y'' + ۳y' + ۲y = \delta(t-a)$ وقتی $t \to \infty$ برابر است با:

۱) ۱
۲) صفر
۳) -۲
۴) ∞

۱۵ـ کدام یک از موارد زیر جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y' + y = ۰$ است؟

۱) $y = e^{\frac{x}{۲}}(A\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + B\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$
۲) $y = e^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}(A\cos\frac{x}{۲} + B\sin\frac{x}{۲})$
۳) $y = e^{\frac{-x}{۲}}(A\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + B\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x)$
۴) $y = e^{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}x}(A\cos\frac{x}{۲} + B\sin\frac{x}{۲})$

۱۶ـ در معادله $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - n^۲)y = ۰$ چنانچه تغییر متغیر $y = \frac{u}{\sqrt{x}}$ داده شود، کدام معادلهٔ زیر حاصل خواهد شد؟

۱) $x^۲u'' + [۱ - \frac{۱}{x^۲}(n^۲ + \frac{۱}{۴})]u = ۰$
۲) $u'' - [۱ - \frac{۱}{x^۲}(n^۲ - \frac{۱}{۴})]u = ۰$
۳) $u'' + [۱ + \frac{۱}{x^۲}(n^۲ + \frac{۱}{۴})]u = ۰$
۴) $u'' + [۱ - \frac{۱}{x^۲}(n^۲ - \frac{۱}{۴})]u = ۰$

۱۷ـ اگر $\int_۰^\infty x^{-\frac{۱}{۲}}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}$ باشد مقدار $\int_۰^\infty x^{\frac{۱}{۲}}e^{-x}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$
۲) π
۳) $۲\sqrt{\pi}$
۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$

۱۸ـ تابع $\frac{۲Sw}{(S^۲+w^۲)^۲}$ دارای تبدیل لاپلاس معکوس به صورت زیر است:

۱) $t\cos wt$ ۲) $t\sin wt$ ۳) $t^۲\cos wt$ ۴) $-t^۲\cos wt$

۱۹ـ معکوس تبدیل تابع $F(s)=\frac{s-۱}{s^۲-۲s+۵}$ کدام است؟

۱) $e^t\cos ۲t$ ۲) $e^t\cos ۲t+e^t\sin ۲t$ ۳) $e^t\sin ۲t$ ۴) $e^{-t}(\cos ۲t+\sin ۲t)$

۲۰ـ تبدیل لاپلاس معکوس $\frac{۱}{s^۲(s^۲+w^۲)}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{w^۲}(t-\frac{\cos wt}{w})$ ۲) $\frac{۱}{w}(t-\frac{\sin wt}{w})$ ۳) $\frac{۱}{w^۲}(t-\frac{\sin wt}{w})$ ۴) $\frac{۱}{w}(t-\frac{\cos wt}{w})$

۲۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{y-\sin x}{x}dx+dy=۰$ برابر است با:

۱) $xy-\cos x=c$ ۲) $xy+\sin x=c$ ۳) $xy+\cos x=c$ ۴) $xy-\sin x=c$

۲۲ـ هرگاه $y(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ جوابی به صورت سری توانی برای معادله $y''+xy=۰$ با شرایط $y(۰)=۱$ و $y'(۰)=۱$ باشد، آنگاه ضریب $a_۳$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخنامه آزمون آزاد ۸۷

مجموعه مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)

۱ـ گزینه «۳» (مشابه تست ۲۰۲ صفحه ۲۰۵)

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=۴x+۳\Rightarrow y=\int(\int(۴x+۳)dx\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲+c_۱x+c_۲$$

۲ـ گزینه «۴» (تست ۹ صفحه ۶۵)

$$xy'+y=\sin x\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=\sin x\Rightarrow x\,dy+y\,dx=\sin x\,dx$$

$$\xrightarrow{x\,dy+y\,dx=d(xy)\ \&\ \sin x\,dx=d(-\cos x)} d(xy)=d(-\cos x)\Rightarrow d(xy+\cos x)=۰\Rightarrow$$

$$xy+\cos x=c\Rightarrow xy=-\cos x+c\Rightarrow y=\frac{۱}{x}(-\cos x+c)$$

۳ـ گزینه «۱» (مشابه قسمت ۲ مثال بالای صفحه ۴۰۷)

$$L[\sin^۲t]=L[\frac{۱-\cos ۲t}{۲}]=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^۲+۴})=\frac{۲}{s(s^۲+۴)}$$

مهندسی مکانیک (ساخت و تولید)

۴ـ گزینه «۱» (تست ۵۵ صفحه ۶۹)

$$\frac{dy}{dx}=۱+\frac{۱}{\sin(x-y+۱)}\xrightarrow{(x-y+۱=u\ \Rightarrow\ y'=۱-u')}۱-u'=۱+\frac{۱}{\sin u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{۱}{\sin u}\Rightarrow$$

$$-\sin u\,du=dx\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شوند}}\cos u=x+c\Rightarrow u=\cos^{-۱}(x+c)$$

$$\xrightarrow{u=x-y+۱}x-y+۱=\cos^{-۱}(x+c)\xrightarrow{c=۰}y=x+۱-\cos^{-۱}(x)$$

۵ـ گزینه «۳» (دقیقاً مشابه مثال ۴۲ صفحه ۳۳)

$$\xrightarrow{\text{باید }:\Delta=Q_x-P_y=۰}\Delta=\frac{a}{y^۲}+\frac{۱}{y^۲}=۰\Rightarrow a=-۱$$

۶ـ گزینه «۴» مطابق درس "معادلات دیفرانسیل خطی" صفحه ۴۳ داریم:

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به y برحسب x}}\mu(x)=e^{\int(-\frac{۱}{x})dx}=e^{-۱.nx}=\frac{۱}{x}\quad\&\quad y(x)=x\{\int\frac{۱}{x}\times x^۲dx+c\}\Rightarrow y=x(\frac{x^۲}{۲}+c)$$

۷ـ گزینه «۲» قضیه "مشتق از تبدیل لاپلاس ـ الف" صفحه ۴۳۰:

$$L^{-۱}[tf(t)]=-F'(s)=-\big(L[f(t)]\big)'$$

مهندسی مواد

۸ـ گزینه «۱»

$$y\,dx + x(x^2y-1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3y}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -x^3$$

$$\xrightarrow{\text{(معادله)}\times x^{-3}\text{ ; برنولی نسبت به } x} x^{-3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-2} = -1 \xrightarrow{x^{-2}=u \Rightarrow x^{-3}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dy}} -\frac{1}{2}\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{2}{y}u = 2 \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } u \text{ بر حسب } y} \mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2 \qquad \&$$

$$u(y) = \frac{1}{y^2}\left\{\int y^2 \times (2)\,dy + c\right\} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{2y^3}{3} + c\right) \xrightarrow{u = x^{-2}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2}\left(\frac{2}{3}y^3 + c\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2}{3}y^3 + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2x^2} = \frac{y^3}{3} + 2c \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3} = C \quad ; \quad (-2c = C)$$

۹ـ گزینه «۲» دقیقاً مشابه تست ۱ صفحه ۶۴ داریم:

$$y'^2 + 2xy' + x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -x \pm \sqrt{x^2 - x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -x \pm y$$

الف) $y' = -x + y \Rightarrow y' - y = -x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^{-x}$ &

$$y = e^x(xe^{-x} + e^{-x} + c) = x + 1 + ce^x \quad \Rightarrow \quad y - x - 1 + c_1e^x = 0$$

ب) $y' = -x - y \Rightarrow y' + y = -x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x) = e^x$ &

$$y = e^{-x}(-xe^x + e^x + c) = -x + 1 + ce^{-x} \quad \Rightarrow \quad y + x - 1 + c_1e^{-x} = 0$$

در نتیجه جواب عمومی معادله مفروض با ضابطه $(y - x - 1 + c_1e^x)(y + x - 1 - c_1e^{-x}) = 0$ به دست می‌آید.

۱۰ـ گزینه «۳» (تست ۹۱ صفحه ۷۳)

از یک طرف؛

$$y = e^{\int u\,dx} \quad \Rightarrow \quad y' = u\,e^{\int u\,dx} \xrightarrow{e^{\int u\,dx} = y} y' = uy \quad ;(1) \qquad \&$$

در اینصورت؛

$$y' = uy \quad \Rightarrow \quad y'' = u'y + uy' \xrightarrow{\text{تساوی (۱)}} y'' = u'y + u^2y \quad \Rightarrow \quad y'' = y(u' + u^2) \quad ;(2)$$

$$x^2yy'' = (y - xy')^2 \xrightarrow{\text{تساویهای (۱) و (۲)}} x^2y^2(u' + u^2) = (y - xuy)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2y^2(u' + u^2) = y^2(1 - xu)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2(u' + u^2) = 1 + x^2u^2 - 2xu \quad \Rightarrow \quad x^2u' = 1 - 2xu$$

۱۱ـ گزینه «۱» (تست ۱۵۲ صفحه ۱۹۸)

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه مقابل بدست می‌آید:

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

در اینصورت با توجه به تساوی $r(x) = x\sin 2x$، به روش ضرائب نامعین و مطابق (۲ ـ ۳۵) داریم:

$$y_p = (A_1x + A_2)\cos 2x + (B_1x + B_2)\sin 2x$$

مطابق تذکر (۲ ـ ۹ ـ ۱) ضرب x در y_p سبب می‌شود که جملات اصلی y_h و y_p یکسان نشوند. بنابراین؛

$$y_p = x((A_1x + A_2)\cos 2x + (B_1x + B_2)\sin 2x)$$

۱۲ـ گزینه «۲» با توجه به فرمول " تبدیل لاپلاس و تغییر مقیاس ـ الف" صفحه۴۴۳ داریم:

$$L[f(kt)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k}L[F(t)]\Big|_{s \mapsto \frac{s}{k}} \quad ; k \neq 0$$

مهندسی هوا فضا

۱۳ـ گزینه «۱» (مطابق مثال صفحه ۱۱)؛ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض بصورت زیر است:

$$y^3 = c(1 + x^3) \xrightarrow{y(1)=1} 1 = c(1+1) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} 2y^3 = 1 + x^3$$

۱۴ـ گزینه «۲» (مشابه تست ۲ صفحه ۵۲۶)

مطابق فرمول "تبدیل لاپلاس مشتق ـ ب"، صفحه ۴۴۵ داریم:

$$y'' = 3y' + 2y = \delta(t-a) \quad \Rightarrow \quad L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = L[\delta(t-a)]$$

$$\xrightarrow{\delta(t-a)\xrightarrow{L}e^{-as}} (s^2Y - 0 - 0) + 3(sY - 0) + 2Y = e^{-as} \quad \Rightarrow \quad (s^2 + 3s + 2)Y = e^{-as} \quad \Rightarrow$$

$$Y = \frac{e^{-as}}{s^2 + 3s + 2} \quad \Rightarrow \quad y = L^{-1}\left[e^{-as}.\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به " قاعده دوم انتقال ـ ب"، صفحه ۴۲۴}} y = u_a(t)L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\Big|_{t \mapsto t-a} = u_a(t)L^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right]\Big|_{t \mapsto t-a} \Rightarrow$$

$$y = u_a(t)(e^{-t} - e^{-2t})\Big|_{t \mapsto t-a} = u_a(t)(e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a)})$$

از آنجائیکه $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ و توابع هوی‌ساید توابعی کراندارند، طبق قضیه کراندار داریم:

$$\lim_{t \to +\infty} y = 0$$

۱۵ـ گزینه «۳» (تست ۲۰۹ صفحه ۲۰۵)

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \longrightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

مطابق فرمول (۲ـ۱۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن $y''+y'+y=0$ از ضابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_h=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

۱۶ـ گزینه «۴» (تست ۱۴ صفحه ۱۸۳)

با توجه به تغییر متغیر داده شده داریم:

$$y=ux^{\frac{-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y'=u'x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{2}ux^{\frac{-3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y''=u''x^{\frac{-1}{2}}-u'x^{\frac{-3}{2}}+\frac{3}{4}ux^{\frac{-5}{2}}$$

با صدق موارد فوق در معادله داریم:

$$u''x^{\frac{3}{2}}+(x^{\frac{3}{2}}-(n^2-\frac{1}{4})x^{\frac{-1}{2}})u=0$$

با ضرب طرفین معادله در $x^{\frac{-3}{2}}$ داریم:

$$u''+(1-(n^2-\frac{1}{4})x^{-2})u=0$$

۱۷ـ گزینه «۴» (تست ۱۸ صفحه ۳۴۳)

با توجه به تعریف تابع $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dt$ در صفحه ۳۲۲ کتاب داریم:

$$\int_0^\infty x^{\frac{-1}{2}}e^{-x}dx=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi} \qquad \& \qquad \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx=\Gamma(\frac{3}{2})=?$$

در این‌صورت طبق تساوی $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ در همین صفحه داریم:

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۸ـ گزینه «۲» (دقیقاً مشابه تست ۸۵ صفحه ۴۷۵)

حل اول:

$$\xrightarrow{f(t)=tL^{-1}[\int_s^\infty Fds]} f(t)=tL^{-1}\left[\int_s^\infty\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}ds\right]=t\omega L^{-1}\left[\int_s^\infty\frac{2s}{(s^2+\omega^2)^2}ds\right]$$

$$\xrightarrow{\int\frac{u'}{u^2}=\frac{u^{-2+1}}{-2+1}} f(t)=t\omega L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+\omega^2}\Big|_s^\infty\right]=t\omega L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] \Rightarrow f(t)=t\sin\omega t$$

حل دوم:

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}\right] \xrightarrow{L^{-1}[F]=-tL^{-1}[\int Fds]} f(t)=-t\omega L^{-1}\left[\int\frac{2s}{(s^2+\omega^2)^2}ds\right]=-t\omega L^{-1}\left[\frac{-1}{2(s^2+\omega^2)}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=tL^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]=t\sin\omega t$$

یادآوری:

$$I=\int\frac{s}{(s^2+1)^2}ds\xrightarrow{\int\frac{u'}{u^2}=\frac{u^{-2+1}}{-2+1}} I=\frac{-1}{2(s^2+1)}$$

تذکر: علاوه بر دو روش آمده، از روش کانولوشن نیز می‌توان استفاده کرد.

۱۹ـ گزینه «۱» (تست ۳۵ صفحه ۴۲۸)

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+1+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4}\right]$$

$$\xrightarrow{L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}L^{-1}[F(s)]} f(t)=e^tL^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=e^t\cos 2t$$

۲۰ـ گزینه «۳» (تست ۹۵ صفحه ۴۷۶)

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right]=\frac{1}{\omega^2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{s^{n+1}}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{t^n}{n!})\&(\frac{1}{s^2+\omega^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{\omega}\sin\omega t)} f(t)=\frac{1}{\omega^2}(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t)$$

۲۱ـ گزینه «۳» (تست ۹ صفحه ۶۵)

$$dy+\frac{y-\sin x}{x}dx=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ بر حسب } x}\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x \quad \&$$

$$y(x)=\frac{1}{x}\left\{\int x\times(\frac{\sin x}{x})\,dx+c\right\} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{x}(-\cos x+c) \quad \Rightarrow \quad yx+\cos x=c$$

۲۲ـ گزینه «۲» (تست ۳ صفحه ۲۸۳)

با توجه به بسط مک لورن $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$، ضریب a_3 از ضابطه $a_3=\frac{y'''(0)}{3!}$ محاسبه می‌گردد:

$$y''+xy=0\ ;(I)\xrightarrow{x=0} y''(0)+(0)y(0)=0 \Rightarrow y''(0)=0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'''+xy'+y=0\xrightarrow{x=0} y'''(0)+(0)y'(0)+y(0)=0 \Rightarrow y'''(0)+y(0)=0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} y'''(0)+1=0 \Rightarrow y'''(0)=-1 \Rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{6}=\frac{-1}{6}$$

سئوالات آزمون سراسری ۸۸

مهندسی برق

۱ـ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $\cos(x+y)dx = x\sin(x+y)dx + x\sin(x+y)dy$، کدام‌یک از موارد داده شده می‌باشد؟

۱) $x\cos(x+y)=c$ ۲) $y\cos(x+y)=c$ ۳) $x\sin(x+y)=c$ ۴) $y\sin(x+y)=c$

۲ـ جواب معادله مقابل با شرایط اولیه داده شده کدام است؟

$$y' = \frac{xy^{۲} - \sin x\cos x}{y(۱-x^{۲})} \quad ; \quad y(۰) = ۲$$

۱) $y^{۲}(۱-x^{۲}) + \sin^{۲} x = ۲$ ۲) $y^{۲}(۱-x^{۲}) + \cos^{۲} x = ۳$

۳) $y^{۲}(۱-x^{۲}) + \sin^{۲} x = ۴$ ۴) $y^{۲}(۱-x^{۲}) - \cos^{۲} x = ۵$

۳ـ کدام گزینه جواب معادله دیفرانسیل $y'' + ۳e^{۲y}y' = ۰$ است؟

۱) $x = y + c_۱e^{۲y} + c_۲$ ۲) $y = c_۱x + \frac{۱}{۴}e^{۲y} + c_۲$ ۳) $y = x + c_۱e^{۲y} + c_۲$ ۴) $x = c_۱y + \frac{۱}{۴}e^{۲y} + c_۲$

۴ـ تبدیل لاپلاس جواب معادله مقابل کدام است؟ $t\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}} + (۱-t)\frac{dy}{dt} + y = ۰ \quad ; \quad t > ۰, y(۰) = ۱, y'(۰) = -۱$

۱) $\frac{s-۱}{s^{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{s^{۲}}$ ۳) $\frac{s}{s^{۲}-۱}$ ۴) $\frac{۱}{s^{۲}-۱}$

مهندسی عمران

۵ـ فرض کنید $y = \varphi(t)$ جواب مسئله مقدار اولیه $y''(t^{۲}-۱) - ۲ty' + ۲y = ۰, y(۰) = ۰, y'(۰) = ۱$ باشد. اگر Y تبدیل لاپلاس y باشد، Y در چه معادله دیفرانسیلی صدق می‌کند؟

۱) $sY'' + y' - (s^{۲}+۱)Y = ۱$ ۲) $s^{۲}Y'' + ۲sY' - (s^{۲}+۲)Y = -۱$

۳) $s^{۲}Y'' + sY' - s^{۲}Y = -۱$ ۴) $sY'' + s^{۲}Y' - (s^{۲}+۲)Y = ۱$

۶ـ کدام‌یک، جواب خصوصی معادله $y'' + ۴y = ۳\sin ۲x + ۲\sinh x$ می‌باشد؟

۱) $-\frac{۳}{۴}x\cos ۲x + \frac{۲}{۵}\sinh x$ ۲) $-\frac{۳}{۴}x\cos ۲x + \frac{۲}{۵}\cosh x$

۳) $\frac{۳}{۴}x\sin ۲x + \frac{۲}{۵}\cosh x$ ۴) $\frac{۳}{۴}x\sin ۲x - \frac{۲}{۵}\sinh x$

۷ـ دو جواب مستقل برای معادله دیفرانسیل $x^{۲}y'' + ۲xy' + x^{۲}y = ۰$ کدام است؟

۱) $y_۱(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n, y_۲(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$ ۲) $y_۱(x) = x^{\frac{۱}{۳}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n, y_۲(x) = x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۳) $y_۱(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n, y_۲(x) = x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$ ۴) $y_۱(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n, y_۲(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n$

۸ـ جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + ۲y, y(۰) = ۲, y'(۰) = ۱$ در نقطه $x = ۳$ برابر است با:

۱) $\frac{۱۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳}$ ۳) $\frac{۳۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳۵}{۳}$

۹ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(۲xy^{۲} + ۲y)dx + (۲x^{۲}y + ۲x)dy = ۰$ کدام است؟

۱) $x^{۲}y^{۲} + ۲xy = C$ ۲) $x^{۲}y^{۲} + ۲xy^{۳} = C$ ۳) $xy^{۲} + ۲x^{۲}y = C$ ۴) $x^{۲}y + ۲xy = C$

مهندسی عمران (نقشه‌برداری)

۱۰ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(۲x+۳)dx + (۲y-۲)dy = ۰$ کدام است؟

۱) $x^{۲} + x + ۳y^{۲} - ۲y = c$ ۲) $x^{۲} + ۳x + y^{۲} - ۲y = c$

۳) $۲x^{۲} + ۳x - y^{۲} + ۲y = c$ ۴) $۲x^{۲} + ۳x + y^{۲} - ۳y = c$

۱۱ـ فرض کنید $y = \varphi(t)$ جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + ۱y = ۰; y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۰$ باشد. اگر Y تبدیل لاپلاس y باشد، Y در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟

۱) $Y' + s^{۲}Y = ۱$ ۲) $Y' - s^{۲}Y = -۱$ ۳) $Y' + s^{۲}Y = s$ ۴) $Y' - s^{۲}Y = -s$

۱۲ـ دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل $y'' + y' + xy = ۰$ و $(x > ۰)$ کدام است؟

۱) $y_۱(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n \; , \; y_۲(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ۲) $y_۱(x) = x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n \; , \; y_۲(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$

۳) $y_۱(x) = x^{-\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n \; , \; y_۲(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ ۴) $y_۱(x) = x^{\frac{۳}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} b_n x^n \; , \; y_۲(x) = x^{\frac{۱}{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$

۱۳ـ جواب مسئله مقدار اولیه $y'' - ۳y^{۲} = ۰ \; , \; y(۰) = ۲ \; , \; y'(۰) = ۴$ در نقطه $x = -۱$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۴ـ به ازای چه مقدار از پارامتر γ، جواب مسئله مقدار اولیه $y'' + ۲y = ۰ \; , \; y(۱) = ۱ \; , \; y'(۱) = \gamma$ وقتی $x \to ۰^{+}$ کراندار است؟

۱) $\gamma = ۱$ ۲) $\gamma = ۲$ ۳) $\gamma = -۱$ ۴) $\gamma = -۲$

۱۵ـ کدام مورد یک جواب خصوصی برای معادله $y'' + ۴y = ۳\cos ۲x + ۲\sinh x$ می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۴}x\sin ۲x + \frac{۲}{۵}\sin h\, x$ ۲) $\frac{۳}{۴}x\sin ۲x - \frac{۲}{۵}\cos h\, x$

۳) $-\frac{۳}{۴}x\cos ۲x + \frac{۲}{۵}\sin h\, x$ ۴) $-\frac{۳}{۴}x\cos ۲x + \frac{۲}{۵}\cos h\, x$

مهندسی مکانیک

۱۶ـ جواب معادله‌ی دیفرانسیل $(e^{x} - ۳x^{۲}y^{۲})y' + ye^{x} = ۲xy^{۳}$ کدام است؟

۱) $ye^{x} - x^{۲}y^{۳} = C$ ۲) $ye^{-y} + (x+y)^{۲} = C$ ۳) $xe^{x} - y^{۲}x^{۳} = C$ ۴) $xe^{-x} - (x+y)^{۲} = C$

۱۷ـ فاکتور انتگرال (عامل انتگرال‌ساز) معادله دیفرانسیل $(\sin y - ۲ye^{-x}\sin x)dx + (\cos y + ۲e^{-x}\cos x)dy = ۰$ کدام است؟

۱) e^{y} ۲) x ۳) y ۴) e^{x}

۱۸ـ کدام‌یک، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - ۲y' + y = x\cosh x$ می‌باشد؟

۱) $x^۲(Ax+B)e^{x} + (Cx+D)e^{-x}$
۲) $(Ax+B)\cosh x + (Cx+D)\sinh x$
۳) $(Ax+B)e^{x} + x^۲(Cx+D)e^{-x}$
۴) $(Ax+B)e^{x} + (Cx+D)e^{-x}$

۱۹ـ اگر $y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جواب معادله دیفرانسیل $x(x^۲-x)y'' - xy' + y = ۰$ باشد، آنگاه مقدار r کدام است؟

۱) ۱- و ۰ ۲) ۲ و ۱ ۳) ۲ و ۰ ۴) ۱ و ۰

۲۰ـ در صورتی که $\lfloor x \rfloor$، نشان‌دهنده‌ی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x یا مساوی با آن باشد، در این حال تبدیل لاپلاس تابع $\lfloor x \rfloor - x$ کدام است؟

۱) $\frac{e^{s}+۱-s}{s^۲(e^{s}+۱)}$ ۲) $\frac{e^{s}+۱}{s^۲(۱-e^{s})}$ ۳) $\frac{e^{s}-۱-s}{s^۲(e^{s}-۱)}$ ۴) $\frac{e^{s}-۱}{s^۲(۱-e^{-s})}$

مهندسی مکاترونیک

۲۱ـ جوابی از معادله $(x^۲+y^۲)dx + xydy = ۰$ که از نقطه $(۱,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۳}{۵}$ ۲) $y = \frac{۲}{\sqrt{۵-x^۲}}$ ۳) $y = \sqrt{\frac{۳-x^۲}{۲}}$ ۴) $y = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{۳}{x^۲}-x^۲}$

۲۲ـ دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + ۲y \\ \frac{dx}{dt} = y + ۲x \end{cases}$ هم‌ارز کدام معادله است؟

۱) $x'' - ۲x' - ۳ = ۰$ ۲) $x''' + ۲x'' + ۳x' = ۰$ ۳) $x''' - ۲x'' - ۳x' = ۰$ ۴) $x''' - ۲x'' + ۳x' = ۰$

۲۳ـ تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \frac{۱}{\sqrt{t}}$ کدام است؟

۱) $s>۰ \ , \ \frac{۱}{\sqrt{s}}$ ۲) $s>۰ \ , \ \frac{\sqrt{s}}{\pi}$ ۳) $s>۰ \ , \ \pi\sqrt{s}$ ۴) $s>۰ \ , \ \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

۲۴ـ جواب خصوصی معادله $y'' - y' = ۲x$ کدام است؟

۱) $y_p = -x(x+۲)$ ۲) $y_p = x(x+۲)$ ۳) $y_p = x(x-۲)$ ۴) $y_p = x(۲x+۱)$

۲۵ـ جواب عمومی و جواب غیرعادی معادله $y = xy' + \frac{۱}{y'}$ کدامند؟

۱) $y^۲ = ۲x \ , \ y = cx^۲ + \frac{۱}{c}$ ۲) $y^۲ = ۴x \ , \ y = cx + \frac{۱}{c}$
۳) $x = ۴y^۲ \ , \ y = cx - \frac{۱}{c}$ ۴) $y^۲ - x^۲ = ۲ \ , \ y = cx + \frac{۱}{c}$

مهندسی معدن

۲۶ـ برای جواب مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} (x^۲+۲y)dx - xdy = ۰ \\ y(۱) = ۰ \end{cases}$ مقدار $y(e)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $e^{۲}$ ۳) $e^{۳}$ ۴) e

۲۷ـ معادله برنولی $y' + y^{۳} = x\cos x$ $xy^{۲}$ معادل با کدام معادله است؟ (متغیر u از تغییر متغیر y حاصل می‌شود)

۱) $u' + u = \cos x$ ۲) $u' - u = \cos x$ ۳) $u' + \frac{۳}{x}u = \cos x$ ۴) $u' + \frac{۱}{x}u = \cos x$

۲۸ـ از میان کلیه چند جمله‌ای لژاندر، سه چند جمله‌ای اول عبارتند از:

۱) $P_۰(x) = ۱$ و $P_۱(x) = x$ و $P_۲(x) = \frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۲}$
۲) $P_۰(x) = ۱$ و $P_۱(x) = x$ و $P_۲(x) = ۳x^۲ - ۱$
۳) $P_۰(x) = ۱$ و $P_۱(x) = x$ و $P_۲(x) = ۱ - ۳x^۲$
۴) $P_۰(x) = ۱$ و $P_۱(x) = x$ و $P_۲(x) = x^۲ - \frac{۱}{۳}$

۲۹ـ اگر $F(s) = \frac{۱}{s}Ln(۱+\frac{۱}{s^۲})$، آنگاه $L^{-۱}(F(s))$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲(۱-\cos u)}{u}$ ۲) $۲\int_{۰}^{t}\frac{۱+\sin u}{u}du$ ۳) $\frac{۲(۱+\sin u)}{u}$ ۴) $۲\int_{۰}^{t}\frac{۱-\cos u}{u}du$

مهندسی هوا و فضا

۳۰ـ تابع $y = ۲\cos ۳x + ۳\sin ۳x$ جواب کدام معادله‌ی دیفرانسیل است؟

۱) $y' + ۹y = ۰$ ۲) $y'' + ۹y = ۰$ ۳) $y'' - ۹y' = ۰$ ۴) $y'' + ۳y' = ۰$

۳۱ـ معادله‌ی دیفرانسیل خانواده‌ی سهمی‌هایی که کانون آنها مبدأ مختصات و محور آنها محور x‌هاست، کدام است؟

۱) $x(\frac{dy}{dx})^۲ - ۲x\frac{dy}{dx} - y = ۰$
۲) $x^۲(\frac{dy}{dx})^۲ - x\frac{dy}{dx} + y = ۰$
۳) $y(\frac{dy}{dx})^۲ - ۲\frac{dy}{dx} + x = ۰$
۴) $y(\frac{dy}{dx})^۲ + ۲x\frac{dy}{dx} - y = ۰$

۳۲ـ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله‌ی $(۳x^۲y - xy)dx + (۳x^۳y^۲ + x^۳y^۲)dy = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{xy}$ ۲) $xy^۲$ ۳) $x^۲y$ ۴) $\frac{۱}{x^۳y}$

۳۳ـ جوابی از $(y-x)dy = (۲x+۳y)dx$ که از نقطه $(۱,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $Ln(y^۲+۲x^۲) - ۴\tan^{-۱}x = Ln۲ - \pi$
۲) $Ln(y^۲+x+۱) - ۴\tan^{-۱}x = Ln۲ - \pi$
۳) $Ln(y^۲+۲xy+۲x^۲) - ۴\tan^{-۱}\frac{x+y}{x} = Ln۲ - \pi$
۴) $Ln(y^۲+۲x+۲xy) - ۴\tan^{-۱}x = Ln۲ - \pi$

۳۴ـ جواب عمومی معادله $(۲x^۳+۳y)dx + (۳x+y-۱)dy = ۰$ کدام است؟

۱) $x^۴ + y^۲ - x + ۲xy = C$
۲) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶xy = C$
۳) $\frac{۱}{۲}x^۴ + \frac{۱}{۲}y^۲ - y + ۳xy = C$
۴) $\frac{x^۲+y^۲}{۲} - ۲x + ۶xy = C$

۳۵ـ جوابی از معادله $\frac{d^۲y}{dx^۲} - \frac{dy}{dx} - ۲y = ۰$ که از نقطه‌های $(۱,۰)$ و $(Ln۲, ۲)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = ۴e^{-x} + ۳e^{۲x}$ ۲) $y = \frac{۴}{۷}e^{-x} + \frac{۳}{۷}e^{۲x}$ ۳) $y = \frac{۴}{۷}e^{-۲x} + \frac{۳}{۷}e^{x}$ ۴) $y = \frac{۴}{۷}e^{-۲x} - \frac{۳}{۷}e^{x}$

۳۶ـ جواب‌های معادله‌ی شاخص معادله $xy'' + (۱+x)y' + y = ۰$ $۲x^{۲}$ کدام‌اند؟

۱) ۱ و $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱- و $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ و $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱- و $-\frac{۱}{۲}$

پاسخنامه آزمون سراسری ۸۸

مهندسی برق

۱ـ گزینه «۱» (دقیقاً مشابه تست ۳۰ صفحه ۲۶)

حل اول: مطابق درس "معادلات دیفرانسیل با یک متغیر خطی" صفحه ۲۲:

$$\xrightarrow{x+y=u \;\Rightarrow\; dx+dy=du} \cos u\,dx = x\sin u\,dx + x\sin u\,(du-dx) \;\Rightarrow\; \cos u\,dx = x\sin u\,du \;\Rightarrow$$

$$\frac{\sin u}{\cos u}du = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} -\operatorname{Ln}\cos u = \operatorname{Ln}(cx) \;\Rightarrow\; \frac{1}{\cos u} = cx \;\Rightarrow\; x\cos u = C$$

$$\xrightarrow{u=x+y} x\cos(x+y) = C$$

حل دوم:

$$\cos u(x+y)dx = x\sin(x+y)(dx+dy)$$

$$\xrightarrow{u=\cos(x+y) \Rightarrow du=-\sin(x+y)(dx+dy)} u\,dx = -x\,du \;\Rightarrow\; \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; جدا شونده}} \operatorname{Ln}u = -\operatorname{Ln}(cx) \;\Rightarrow\; u = \frac{C}{x} \;\Rightarrow\; xu = C \xrightarrow{u=\cos(x+y)} x\cos(x+y) = C$$

تذکر:

$$\cos(x+y)dx = x\sin(x+y)dx + x\sin(x+y)dy$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\cos(x+y)}\times \text{(معادله)}} \cot g(x+y)dx = x\,dx + x\,dy$$

۲ـ گزینه «۳» تنها گزینه ۳ است که در شرط $y(0)=2$ صدق می‌کند.

۳ـ گزینه «۴» (تست ۵۰ صفحه ۱۸۷ و تست ۱۵۵ صفحه ۱۹۹)

معادله داده شده از نوع فاقد x می‌باشد با قراردادن $y'=z$, $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy} + z^2e^{2y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dy} = -z^2e^{2y} \;\Rightarrow\; \int\frac{-dz}{z^2} = \int e^{2y}dy \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1 \;\Rightarrow\; \int dx = \int(\frac{1}{2}e^{2y} + c_1)dy \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{4}e^{2y} + c_1y + c_2$$

۴ـ گزینه «۱» (تست ۸۳ صفحه ۴۵۱ و تست ۸۴ صفحه ۴۵۲)

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \;\Rightarrow\; xy'' + y' - xy' + y = 0 \;\Rightarrow\; x(y''-y') + y' + y = 0 \;\Rightarrow$$

$$L[x(y''-y')] + L[y'] + L[y] = 0 \xrightarrow{L[tf]=-(L[f])'} -\big(L[y''-y']\big)' + L[y'] + L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{L[f^{(n)}]=s^nL[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)} -\Big((s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)) - (sY(s)-y(0))\Big)' + (sY(s)-y(0)) + Y(s) = 0$$

$$\xrightarrow{y(0)=1 \;\&\; y'(0)=-1} -(s^2Y(s)-sY(s)-s+2)' + sY(s) - 1 + Y(s) = 0 \;\Rightarrow$$

$$-(2s\times Y + s^2\times Y' - Y - s\times Y' - 1) + sY - 1 + Y = 0 \;\Rightarrow\; -2sY - s^2Y' + Y' + sY' + 1 + sY - 1 + Y = 0 \;\Rightarrow$$

$$(s-s^2)Y' + (2-s)Y = 0 \;\Rightarrow\; (s-s^2)\frac{dY}{ds} = -(2-s)Y \;\Rightarrow\; \frac{dY}{Y} = \frac{2-s}{s^2-s}ds$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int\text{; معادله مرتبه اول جدا شونده}} \int\frac{dY}{Y} = -\int\frac{2-s}{s(s-1)}ds \;\Rightarrow\; \operatorname{Ln}Y = \int(\frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1})ds \;\Rightarrow$$

$$\operatorname{Ln}Y = -2\operatorname{Ln}s + \operatorname{Ln}(s-1) + \operatorname{Ln}c \;\Rightarrow\; \operatorname{Ln}Y = \operatorname{Ln}s^{-2} + \operatorname{Ln}(s-1) + \operatorname{Ln}c \;\Rightarrow\; \operatorname{Ln}Y = \operatorname{Ln}(cs^{-2}(s-1))$$

$$\xrightarrow{\text{Ln: تابعی ۱-۱ است}} Y(s) = \frac{c(s-1)}{s^2} \qquad ;\ (1)$$

اکنون با توجه به قضیه مقدار آغازی بدست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[s\to\infty]{f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)} y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty}\ (s\cdot\frac{c(s-1)}{s^2}) = c \xrightarrow{y(0)=1} c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (۱)}} Y(s) = L[y(x)] = \frac{s-1}{s^2}$$

مهندسی عمران

۵ـ گزینه «۲»

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0 \;\Rightarrow\; t^2y'' + 2ty' - y'' - 2y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول "تبدیل لاپلاس و مشتق" صفحه ۴۳۱}} (L[y'])'' - 2(L[y'])' - L[y''] - 2L[y] = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرمول "تبدیل لاپلاس مشتق" صفحه ۴۴۵}} (s^2Y - s\cdot 0 - 1)'' - 2(sY - s\cdot 0)' - (s^2Y - s\cdot 0 - 1) - 2Y = 0 \;\Rightarrow$$

$$s^2Y'' + 4sY' + 2Y - 2sY' - 2Y - s^2Y + 1 - 2Y = 0 \;\Rightarrow\; s^2Y'' + 2sY' - (s^2+2)Y = -1$$

۶ـ گزینه «۱» مطابق فرمول (۲-۳۰) برای تعیین جواب خصوصی y_p معادله مفروض، کافیست مجموع $(y_p)_1$ جواب خصوصی معادله $y''+4y = 3\sin 2x$ و $(y_p)_2$ جواب خصوصی معادله $y''+4y = 2\sinh x = e^x - e^{-x}$ را بدست آوریم:

الف ـ طبق تست ۱۳ صفحه ۱۸۳، جواب خصوصی $(y_p)_1 = -\frac{3}{4}x\cos 2x$ می‌باشد.

ب ـ برای محاسبه $(y_p)_2$ طبق روش اپراتور معکوس ـ فرمول (۲ـ۲۵) داریم:

$$(y_p)_2 = \frac{1}{D^2+4}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{D^2+4}e^x - \frac{1}{D^2+4}e^{-x} = \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{5}e^{-x} \;\Rightarrow\; (y_p)_2 = \frac{2}{5}\sinh x$$

در نتیجه:

$$y_p = (y_p)_1 + (y_p)_2 = -\frac{3}{4}x\cos 2x + \frac{2}{5}\sinh x$$

۷ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_0 = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0 = \frac{2}{3}$ و $q_0 = 0$ است. و همچنین معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0-1)r + q_0 = r^2 - \frac{1}{3}r = 0$ دارای ریشه‌های $r_1 = \frac{1}{3}$ و $r_2 = 0$ می‌باشد. در اینصورت تفاضل ریشه‌های شاخصی $r_1 - r_2 = \frac{1}{3}$ یک عدد غیرصحیح می‌شود. در نتیجه طبق قضیه II ـ حالت اول صفحه ۲۹۸، هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض دارای نمایشهای فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی هستند:

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad ;\ a_0\neq 0 \quad \&\quad y_2 = x^0\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \quad ;\ b_0\neq 0$$

۸ـ گزینه «۳» مطابق درس آمده در صفحه ۱۴۶، "حالات خاص حل معادلات مرتبه دوم ـ حالت دوم"، معادله مفروض فاقد y (متغیر وابسته) است. در اینصورت:

$$\xrightarrow{(y'=z\Rightarrow y''=z')} zz'=2 \Rightarrow zdx=2dx \xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{ جدا شونده}} \frac{z^2}{2}=2x+c$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله مفروض}} \frac{z^2}{2}=2x+2 \Rightarrow z^2=4(x+1) \Rightarrow z=\pm 2\sqrt{x+1} \xrightarrow{z(0)>0} z=2\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{z=y'} y'=2\sqrt{x+1} \Rightarrow y=2\int\sqrt{x+1}dx \Rightarrow y=\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c \xrightarrow{y(0)=1} 1=\frac{4}{3}+c \Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی فوق}} y=\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\frac{1}{3} \xrightarrow{x=3} y(3)=\frac{4}{3}+4+2-\frac{1}{3}=\frac{31}{3}$$

۹ـ گزینه «۱» مطابق درس آمده در صفحه ۳۱، "معادلات دیفرانسیل کامل" داریم:

$$(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)y'=0 \Rightarrow (2xy^2+2y)dx+(2x^2y+2x)dy=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=4xy+2-(4xy+2)=0 \xrightarrow{\text{حذف جملات شامل } x \text{ در } Q} (2xy^2+2y)dx=0$$

$$\xrightarrow{\int\text{(معادله حاصل)}} \int(2xy^2+2y)dx=0 \Rightarrow x^2y^2+2xy=C$$

مهندسی عمران (نقشه‌برداری)

۱۰ـ گزینه «۲»

$$(2x+3)+(2y-2)y'=0 \Rightarrow (2x+3)dx=-(2y-2)dy$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) }\int\text{: جدا شونده}} x^2+3x=-y^2+2y+c \Rightarrow x^2+3x+y^2-2y=c$$

تذکر: معادله مفروض، به روش معادلات دیفرانسیل کامل نیز قابل حل است.

۱۱ـ گزینه «۴» (دقیقاً مشابه تست ۱۰۹ صفحه ۴۷۸)

$$y''+ty=0 \Rightarrow L[y'']+L[ty]=0 \Rightarrow (s^2Y-sy(0)-y(0))-(Y)'=0 \xrightarrow{y(0)=1\ \&\ y'(0)=0} s^2Y-s=Y'$$

۱۲ـ گزینه «۱» (تست ۱۱۲ صفحه ۳۵۵)

می‌توان بررسی کرد، نقطه $x_0=0$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_0=\frac{1}{2}$ و $q_0=0$ است. و هم‌چنین تفاضل مقادیر $r_1=\frac{1}{2}$ و $r_2=0$، ریشه‌های معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^2+(p_0-1)r+q_0=r^2-\frac{1}{2}r=0$، یک عدد غیرصحیح است، در اینصورت طبق قضیه $\overline{\text{II}}$. حالت اول. هر دو جواب مستقل معادله دیفرانسیل مفروض، دو سری فروبینوسی متناظر با ریشه‌های شاخصی با نمایش‌های زیر هستند:

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad \& \qquad y_2=x^0\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

۱۳ـ گزینه «۱» (تست ۱۱۵ صفحه ۱۹۴)

معادله داده شده فاقد x می‌باشد با جایگزینی $y'=z$ و $y''=z\frac{dz}{dy}$ داریم:

$$z\frac{dz}{dy}=3y^2 \Rightarrow zdz=3y^2dy \Rightarrow \frac{z^2}{2}=y^3+c_1 \Rightarrow \frac{(y')^2}{2}=y^3+c_1$$

با قراردادن $x=0$ در معادله فوق داریم:

$$\frac{(y'(0))^2}{2}=(y(0))^3+c_1 \Rightarrow 8=8+c_1 \Rightarrow c_1=0$$

بنابراین:

$$\frac{(y')^2}{2}=y^3 \Rightarrow y'=\pm\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}$$

معادله حاصل یک معادله مرتبه اول از نوع تفکیک پذیر است داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \int y^{\frac{-3}{2}}dy=\int\pm\sqrt{2}dx$$

$$\frac{-2}{\sqrt{y}}=\pm\sqrt{2}x+c$$

با قراردادن $x=0$ در معادله فوق نیز داریم:

$$\frac{-2}{\sqrt{y(0)}}=c \Rightarrow c=-\sqrt{2} \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{y}}=\pm\sqrt{2}x-\sqrt{2} \xrightarrow{x=-1} y=\frac{1}{2}$$

۱۴ـ گزینه «۲» معادله دیفرانسیل مفروض یک معادله کشی ـ اویلر با $p_0=0$ و $q_0=-2$ است، در اینصورت:

$$x^2y''-2y=0 \xrightarrow{z=Lnx} \frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}-2y=0$$

ریشه‌های مشخصه معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت حاصل عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=-1,2$$

در نتیجه مطابق فرمول (۸ـ۲) جواب عمومی از تساوی زیر بدست می‌آید:

$$y=c_1e^{-z}+c_2e^{2z} \xrightarrow{z=\ln x} y=\frac{c_1}{x}+c_2x^2 \qquad ;(I)$$

$$\xrightarrow{y(1)=1} c_1+c_2=1 \qquad ;(1)$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}(I)} y'=-\frac{c_1}{x^2}+2c_2x \xrightarrow{y'(1)=\gamma} -c_1+2c_2=\gamma \qquad ;(2)$$

از حل دستگاه (۱) و (۲) مقادیر $c_1=\frac{2-\gamma}{3}$ و $c_2=\frac{1+\gamma}{3}$ بدست می‌آید. با جایگذاری در ضابطه جواب عمومی داریم:

$$y=(\frac{2-\gamma}{3})\frac{1}{x}+(\frac{1+\gamma}{3})x^2$$

که تنها در حالت $\gamma=2$، به ازاء $x\to 0^+$، کراندار است.

۱۵ـ گزینه «۱» مطابق فرمول (۲-۳۰) برای تعیین جواب خصوصی y_p معادله مفروض، کافیست مجموع $(y_p)_1$ جواب خصوصی معادله $y'' + 4y = 3\sin 2x$، $(y_p)_2$ جواب خصوصی معادله $y'' + 4x = 2\sinh x = e^x - e^{-x}$ را بدست آوریم:

الف ـ طبق تست ۱۳ صفحه ۱۸۳، جواب خصوصی $(y_p)_1 = -\frac{3}{4}x\sin 2x$ می‌باشد

ب ـ برای محاسبه $(y_p)_2$ طبق روش اپراتور معکوس ـ فرمول (۲-۲۵) داریم:

$$(y_p)_2 = \frac{1}{D^2+4}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{D^2+4}e^x - \frac{1}{D^2+4}e^{-x} = \frac{1}{5}e^x - \frac{1}{5}e^{-x} \Rightarrow (y_p)_2 = \frac{2}{5}\sinh x$$

در نتیجه: $y_p = (y_p)_1 + (y_p)_2 = \frac{3}{4}x\sin 2x + \frac{2}{5}\sinh x$

مهندسی مکانیک

۱۶ـ گزینه «۱» مطابق درس "معادلات دیفرانسیل کامل" در صفحه ۳۱ و مثال‌های متعدد:

$$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3 \Rightarrow \underbrace{(e^x - 3x^2y^2)}_{Q}dy + \underbrace{(ye^x - 2xy^3)}_{P}dx = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = e^x - 6xy^2 - (e^x - 6xy^2) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{کامل ; } Q \text{ حذف جملات شامل } x \text{ در}]{} (ye^x - 2xy^3)dx = 0 \xrightarrow{\int (\text{معادله حاصل})} ye^x - x^2y^3 = C$$

۱۷ـ گزینه «۴» مطابق درس "معادلات قابل تبدیل به معادلات کامل" در صفحه ۳۵ و مثال‌های متعدد:

$$(\sin y - 2ye^{-x}\sin x)dx + (\cos y + 2e^{-x}\cos x)dy = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = Q_x - P_y} \Delta = -2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x - (\cos y - 2e^{-x}\sin x) = -2e^{-x}\cos x - \cos y \neq 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور نوع اول}} \frac{\Delta}{-Q} = \frac{-(2e^{-x}\cos x + \cos y)}{-(\cos y + 2e^{-x}\cos x)} = 1 = a(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int dx} = e^x$$

۱۸ـ گزینه «۱» (دقیقاً مشابه مثال ۵۰ صفحه ۱۷۸)

ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (دوبار تکرار)

مطابق (۲-۱۳) برای ریشه تکراری $\lambda = 1$ جواب عمومی قسمت همگن متناظر از تساوی مقابل بدست می‌آید: $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$

برای محاسبه y_p مطابق روش ضرائب نامعین داریم:

$$r(x) = x\cosh x = \underbrace{\frac{1}{2}xe^x}_{r_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}xe^{-x}}_{r_2(x)}$$

چون $r_1(x) = \frac{1}{2}xe^x$ است، مطابق فرمول (۲-۳۴) داریم: $(y_p)_1 = (Ax + B)e^x$

با بررسی تذکر (۲-۹-۱) چون y_h و y_p حاصل دارای جملات اصلی یکسان می‌باشند، با ضرب $(y_p)_1$ در x^2 سبب می‌شود که جملات اصلی آن با y_h یکسان نباشد. بنابراین: $(y_p)_1 = x^2(Ax + B)e^x$

چون $r_2(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}$ مطابق (۲-۳۴) بدست می‌آوریم: $(y_p)_2 = (Cx + D)e^{-x}$

در نتیجه مطابق (۲-۳۸) بدست می‌آوریم:

$$y_p = (y_p)_1 + (y_p)_2 = x^2(Ax + B)e^x + (Cx + D)e^{-x}$$

۱۹ـ گزینه «۴» (تست ۲۵ صفحه ۳۰۳)

از آنجائیکه $a_2(0) = 0$ و حدود $p_0 = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{-x}{x^2 - x} = 0$ و $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{x^2 - x} = 0$ موجود و متناهی هستند، در اینصورت معادله شاخصی متناظر $f(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r^2 - r = 0$ دارای ریشه‌های $r = 0, 1$ می‌باشد.

۲۰ـ گزینه «۳» با توجه به مثال ۱۱ صفحه ۴۱۴، داریم:

$$L\lfloor x\rfloor = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

در این صورت:

$$L[x - \lfloor x\rfloor] = L[x] - L\lfloor x\rfloor = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})} = \frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} = \frac{e^s}{e^s}\cdot\frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} = \frac{e^{-s} - 1 - s}{s^2(e^s - 1)}$$

مهندسی مکاترونیک

۲۱ـ گزینه «۴» دقیقاً مشابه مثال ۱۹ صفحه ۱۹ و یا تست ۴۱ صفحه ۶۸:

$$\xrightarrow{\text{فرم باز همگن ; } (\frac{y}{x} = u \Rightarrow dy = xdx + udx)} (x^2 + x^2u^2)dx + x^2u(udx + xdu) = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + 2u^2)dx = -xu\,du \Rightarrow \frac{u}{1 + 2u^2}du = -\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{(طرفین) } \int \text{ ; جدا شونده}} \frac{1}{4}\text{Ln}(1 + 2u^2) = -\text{Ln}(cx) \Rightarrow 1 + 2u^2 = \frac{C}{x^4}$$

$$\xrightarrow{u = \frac{y}{x}} 1 + 2\frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}(\frac{C}{x^2} - x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=1 \ \& \ y=1)} y^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{x^2} - x^2) \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{x^2} - x^2}$$

۲۲ـ گزینه «۳» (دقیقاً مشابه تست ۳۲ صفحه ۱۸۵)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \Rightarrow y = \frac{\dot{x} - x}{2}\ ;\ (2) \xrightarrow{\frac{d}{dt}\ (\text{طرفین})} \dot{y} = \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{2}\ ;\ (3) \\ \dot{y} = y + 2x\ ;\ (1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(2) \text{ و } (3) \text{ در تساوی } (1)]{\text{با جایگذاری تساوی‌های}} \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{2} = \frac{\dot{x} - x}{2} + 2x \Rightarrow \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}\ (\text{طرفین})} \dddot{x} - 2\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$$

۲۳ـ گزینه «۴» (مشابه تست ۹ صفحه ۵۴۴، تست ۱۴ صفحه ۵۴۸ و تست ۱۳ صفحه ۵۶۵)

$$F(s) = L[t^{-\frac{1}{2}}] \xrightarrow{t^\alpha \xrightarrow{L} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}} F(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}} F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

۲۴ـ گزینه «۱» ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=0,1$$

در نتیجه مطابق فرمول (۸ـ۲) جواب عمومی معادله همگن متناظر از ضابطه زیر به دست می‌آید:

$$y_h=c_1e^{0x}+c_2e^{x}=c_1+c_2e^{x}$$

از طرف دیگر، با توجه به تساوی $r(x)=2x$ و ضابطه y_h، جواب خصوصی معادله مفروض به صورت $y_p=Ax^2+Bx$ می‌توان نوشت. با جایگذاری y_p در معادله فوق مقدار $A=-1$ و $B=-2$ به دست می‌آید. در نتیجه: $y_p=-x^2-2x=-x(x+2)$

۲۵ـ گزینه «۲» (تست۹۱ صفحه ۶۱)

$$y=xy'+\frac{1}{y'} \xrightarrow{y'=P \text{ ; معادله کلرو}} \boxed{y=xP+\frac{1}{P}} \quad \text{(جواب عمومی)}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dP}\ (\text{جواب عمومی})} 0=x+(-\frac{1}{P^2}) \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{P^2}}$$

در این‌صورت، پوش جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض، با حذف پارامتر P از دستگاه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} y=xP+\frac{1}{P} \\ x=\frac{1}{P^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x^2P^2+\frac{1}{P^2}+2x \\ x=\frac{1}{P^2} \end{cases} \Rightarrow y^2=x^2\times\frac{1}{x}+x+2x \Rightarrow y^2=4x$$

مهندسی معدن

۲۶ـ گزینه «۳» مطابق درس " معادلات دیفرانسیل خطی" صفحه ۴۳ داریم:

$$(x^2+2y)dx-xdy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2y}{x}=\frac{2}{x}y+x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x \xrightarrow{\text{خطی نسبت به } y \text{ برحسب } x} \mu(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2Lnx}=\frac{1}{x^2} \quad \&$$

$$y(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\{\int\frac{1}{x^2}\times x\ dx+c\}=x^2(Lnx+c)$$

$$\xrightarrow{y(1)=0} 0=C \xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} y(x)=x^2Lnx$$

$$\xrightarrow{x=e} y(e)=e^2Lne=e^2$$

۲۷ـ گزینه «۳» مطابق درس "معادلات دیفرانسیل برنولی" صفحه ۴۴ داریم:

$$x^2y^2y'+y^3=x\cos x \xrightarrow{\frac{1}{x}\times(\text{معادله})} y^2y'+\frac{1}{x}y^3=\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{برنولی};(y^3=u\Rightarrow y^2y'=\frac{u'}{3})} \frac{u'}{3}+\frac{1}{x}u=\cos x \Rightarrow u'+\frac{3}{x}u=3\cos x$$

۲۸ـ گزینه «۱» طبق صفحه ۳۱۵ ؛(فرمول رودریگرز) چند جمله‌ای لژاندر $P_v(x)$; $v\in Z^+$ ، مضربی از مشتق مرتبه v ـ ام تابع $(x^2-1)^v$ است. بعبارت دیگر؛

$$P_v(x)=\frac{1}{2^v v!}\cdot\frac{d^v}{dx^v}(x^2-1)^v .$$

بعنوان مثال؛

$$P_0(x)=\frac{1}{2^0(0!)}\cdot\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0=1 \quad ; \quad P_1(x)=\frac{1}{2^1 1!}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)=\frac{1}{2}(2x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\cdot\frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1)=\frac{1}{8}(12x^2-4)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad \& \ \cdots$$

۲۹ـ گزینه «۴» (مطابق تست ۶۷ صفحه ۴۷۴) ، با فرض $\omega=1$ داریم:

$$L^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s^2})]=\frac{2}{u}(1-\cos u) \quad ; \quad (1)$$

از طرف دیگر مطابق فرمول "تبدیل لاپلاس انتگرال ـ ب" صفحه ۴۳۶ به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{L^{-1}[\frac{1}{s}F(s)=\int_0^t L^{-1}[F)s)]dt} f(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}Ln(1+\frac{1}{s^2})]=\int_0^t L^{-1}[Ln(1+\frac{1}{s^2})]du$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی (1)}} f(t)=\int_0^t\frac{2}{u}(1-\cos u)du$$

مهندسی هوا و فضا

۳۰ـ گزینه «۲» $(y=2\cos3x+3\sin3x \Rightarrow y''=-18\cos3x-27\sin3x) \Rightarrow y''+9y=0$

۳۱ـ گزینه «۴» (تست ۳ صفحه ۵۳۵)

معادله دسته سهمی‌های مذکور، با ضابطه $y^2=4c(x+c)$ است. در این‌صورت مطابق درس "تعیین معادله دیفرانسیل متناظر با یک دسته منحنی" صفحه ۴، کافیست ثابت c را به کمک مشتق‌گیری حذف کنیم:

$$y^2=4cx+4c^2 \ ; \ (1) \xrightarrow{\frac{d}{dx}\ (\text{طرفین})} 2yy'=4c \xrightarrow{\text{با جایگذاری در تساوی (1)}} y^2=2yy'x+y^2y'^2 \Rightarrow$$

$$y(\frac{dy}{dx})^2+2x(\frac{dy}{dx})-y=0$$

۳۲ـ گزینه «۴» مطابق درس "فاکتور نوع چهارم" صفحه ۳۷ و با توجه به شکل گزینه‌ها، عامل انتگرالساز را به صورت $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ انتخاب می‌کنیم. در اینصورت:

$$\xrightarrow{x^\alpha y^\beta\times(\text{معادله})} (3x^{\alpha+2}y^{\beta+1}-x^{\alpha+1}y^{\beta+1})\,dx+(3x^{\alpha+3}y^{\beta+2}+x^{\alpha+3}y^{\beta+4})\,dy=0$$

با توجه به تعریف عامل انتگرالساز معادله حاصل، یک معادله دیفرانسیل کامل است:

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y=0} \Delta=3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}+(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+4}-3(\beta+1)x^{\alpha+2}y^{\beta+1}+(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta+1}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+3=0 \\ \beta+1=0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha=-3 \ \& \ \beta=-1) \xrightarrow{\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta} \mu(x,y)=x^{-3}y^{-1}$$

۳۳ـ گزینه «۳» مطابق درس "معادلات دیفرانسیل همگن به فرم باز" و دقیقاً مشابه مثال‌های صفحه ۱۸:

$$(۲x+۳y)\,dx+(y-x)\,dy=۰$$

$$\xrightarrow{\frac{y}{x}=u \Rightarrow dy=adx+xdu;\ \text{فرم باز همگن}} (۲x+۳xu)dx+(au-x)(udx+xdu)=۰ \Rightarrow$$

$$(۲+۲u+u^۲)\,dx=-(u-۱)x\,du \Rightarrow \frac{u-۱}{u^۲+۲u+۲}\,du=-\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\int\ \text{(طرفین)؛ جداشونده}} \frac{۱}{۲}\int\left(\frac{۲u+۲}{u^۲+۲u+۲}-\frac{۲}{(u+۱)^۲+۱}\right)du=Lnx+c \Rightarrow$$

$$Ln\,(u^۲+۲u+۲)-۴Arc\tan(u+۱)=-۲Lnx+c$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} Ln\left(\frac{y^۲+۲xy+۲x^۲}{x^۲}\right)+Ln(x^۲)-Arctan\left(\frac{y+x}{x}\right)=c \Rightarrow$$

$$Ln\left(\frac{y^۲+۲xy+۲x^۲}{x^۲}\times x^۲\right)-۴Arctan\left(\frac{y+x}{x}\right)=c \Rightarrow Ln(y^۲+۲xy+۲x^۲)Arc\tan\left(\frac{y+x}{x}\right)=c$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } (x=۱\ \&\ y=۰)} Ln۲-۴Arc\tan(۱)=c \Rightarrow c=Ln۲-\pi$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در جواب عمومی}} Ln(y^۲+۲xy+۲x^۲)-Arc\tan\left(\frac{y+x}{۲}\right)=Ln۲-\pi$$

۳۴ـ گزینه «۳» مطابق درس "معادلات دیفرانسیل کامل" صفحه ۳۵ داریم:

$$(۲x^۳+۳y)dx+(۳x+y-۱)dy=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta=Q_x-P_y} \Delta=۳-۳=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حذف جملات شامل x در Q؛ کامل}} (۲x^۳+۳y)dx+(y-۱)dy=۰$$

$$\xrightarrow{\int\ \text{(معادله حاصل)}} \frac{x^۴}{۲}+۳yx+\frac{y^۲}{۲}-y=C$$

۳۵ـ گزینه «۲» تنها گزینه (۲) در شرط‌های اولیه مفروض صدق می‌کند.

۳۶ـ گزینه «۱» بسادگی می‌توان بررسی کرد، $x_۰=۰$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله دیفرانسیل مفروض با $p_۰=-\frac{۱}{۲}$ و $q_۰=\frac{۱}{۲}$ است. و هم چنین $r_۱=۱$ و $r_۲=\frac{۱}{۲}$ دو ریشه معادله شاخصی متناظر $f(r)=r^۲-\frac{۳}{۲}r+\frac{۱}{۲}=۰$ است.

پاسخنامه تستهای تکمیلی

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۴»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۲»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۳»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۲»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۳»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۲»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۴»	۳۴ـ گزینه «۴»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۳»	۳۹ـ گزینه «۴»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۱»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۱»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۱»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۲»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۳»	۵۵ـ گزینه «۳»
۵۶ـ گزینه «۲»	۵۷ـ گزینه «۴»	۵۸ـ گزینه «۲»	۵۹ـ گزینه «۳»	۶۰ـ گزینه «۱»
۶۱ـ گزینه «۲»	۶۲ـ گزینه «۱»	۶۳ـ گزینه «۴»	۶۴ـ گزینه «۱»	۶۵ـ گزینه «۳»
۶۶ـ گزینه «۱»	۶۷ـ گزینه «۴»	۶۸ـ گزینه «۲»	۶۹ـ گزینه «۳»	۷۰ـ گزینه «۱»

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۲»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۲»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۲»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۳»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۴»	۲۷ـ گزینه «۳»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۳»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۳»	۳۳ـ گزینه «۲»	۳۴ـ گزینه «۴»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۱»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۴»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۲»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۳»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۲»	۵۳ـ گزینه «۳»	۵۴ـ گزینه «۳»	۵۵ـ گزینه «۳»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۴»	۵۸ـ گزینه «۲»	۵۹ـ گزینه «۳»	۶۰ـ گزینه «۱»
۶۱ـ گزینه «۲»	۶۲ـ گزینه «۱»	۶۳ـ گزینه «۴»	۶۴ـ گزینه «۱»	۶۵ـ گزینه «۳»
۶۶ـ گزینه «۱»	۶۷ـ گزینه «۴»	۶۸ـ گزینه «۲»	۶۹ـ گزینه «۳»	۷۰ـ گزینه «۱»
۷۱ـ گزینه «۲»	۷۲ـ گزینه «۱»	۷۳ـ گزینه «۳»	۷۴ـ گزینه «۲»	۷۵ـ گزینه «۴»
۷۶ـ گزینه «۲»	۷۷ـ گزینه «۳»	۷۸ـ گزینه «۴»	۷۹ـ گزینه «۱»	۸۰ـ گزینه «۴»
۸۱ـ گزینه «۲»	۸۲ـ گزینه «۳»	۸۳ـ گزینه «۱»	۸۴ـ گزینه «۲»	۸۵ـ گزینه «۴»
۸۶ـ گزینه «۳»	۸۷ـ گزینه «۲»	۸۸ـ گزینه «۲»	۸۹ـ گزینه «۳»	۹۰ـ گزینه «۱»

فصل سوم: سریها

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۱»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۱»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۴»	۱۳ـ گزینه «۳»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۴»
۱۶ـ گزینه «۱»	۱۷ـ گزینه «۲»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۱»	۲۰ـ گزینه «۴»
۲۱ـ گزینه «۱»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۳»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۲»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۳»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۲»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۲»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۳»	۳۸ـ گزینه «۲»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۳»	۴۳ـ گزینه «۱»	۴۴ـ گزینه «۱»	۴۵ـ گزینه «۴»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۳»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۳»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۱»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۴»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۱»	۵۸ـ گزینه «۲»	۵۹ـ گزینه «۴»	۶۰ـ گزینه «۱»
۶۱ـ گزینه «۳»	۶۲ـ گزینه «۲»	۶۳ـ گزینه «۴»	۶۴ـ گزینه «۲»	۶۵ـ گزینه «۴»
۶۶ـ گزینه «۲»	۶۷ـ گزینه «۳»	۶۸ـ گزینه «۴»	۶۹ـ گزینه «۱»	۷۰ـ گزینه «۴»
۷۱ـ گزینه «۴»	۷۲ـ گزینه «۴»	۷۳ـ گزینه «۳»	۷۴ـ گزینه «۱»	۷۵ـ گزینه «۳»
۷۶ـ گزینه «۳»	۷۷ـ گزینه «۲»	۷۸ـ گزینه «۲»	۷۹ـ گزینه «۳»	۸۰ـ گزینه «۱»
۸۱ـ گزینه «۲»	۸۲ـ گزینه «۳»	۸۳ـ گزینه «۲»	۸۴ـ گزینه «۳»	۸۵ـ گزینه «۲»
۸۶ـ گزینه «۲»	۸۷ـ گزینه «۲»	۸۸ـ گزینه «۲»	۸۹ـ گزینه «۳»	۹۰ـ گزینه «۱»

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس و حل معادلات

۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۴»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۴»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۲»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۲»
۱۶ـ گزینه «۳»	۱۷ـ گزینه «۴»	۱۸ـ گزینه «۳»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۳»	۲۲ـ گزینه «۴»	۲۳ـ گزینه «۴»	۲۴ـ گزینه «۴»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۱»	۲۹ـ گزینه «۲»	۳۰ـ گزینه «۲»
۳۱ـ گزینه «۴»	۳۲ـ گزینه «۲»	۳۳ـ گزینه «۱»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۳»
۳۶ـ گزینه «۲»	۳۷ـ گزینه «۴»	۳۸ـ گزینه «۱»	۳۹ـ گزینه «۲»	۴۰ـ گزینه «۱»
۴۱ـ گزینه «۳»	۴۲ـ گزینه «۲»	۴۳ـ گزینه «۴»	۴۴ـ گزینه «۳»	۴۵ـ گزینه «۱»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۴»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۲»	۵۰ـ گزینه «۲»
۵۱ـ گزینه «۳»	۵۲ـ گزینه «۴»	۵۳ـ گزینه «۲»	۵۴ـ گزینه «۱»	۵۵ـ گزینه «۲»
۵۶ـ گزینه «۳»	۵۷ـ گزینه «۱»	۵۸ـ گزینه «۴»	۵۹ـ گزینه «۱»	۶۰ـ گزینه «۴»
۶۱ـ گزینه «۲»	۶۲ـ گزینه «۲»	۶۳ـ گزینه «۴»	۶۴ـ گزینه «۴»	۶۵ـ گزینه «۳»
۶۶ـ گزینه «۱»	۶۷ـ گزینه «۳»	۶۸ـ گزینه «۲»	۶۹ـ گزینه «۳»	۷۰ـ گزینه «۳»

«لیست کتاب‌های موجود با قیمت‌های مربوطه»

ردیف	نام کتاب	مقطع	رشته	مبلغ
۱	دروس عمومی (چاپ هفتاد و هشتم)	کاردانی به کارشناسی	کلیه رشته‌ها	۹۸۰۰ تومان
۲	ریاضیات (۱ و ۲) (چاپ پنجاه و یکم)	کاردانی به کارشناسی	کلیه رشته‌ها	۹۸۰۰ تومان
۳	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۷ ـ ۸۰ رشته کامپیوتر با پاسخ تشریحی (چاپ ششم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۸۰۰۰ تومان
۴	سیستم عامل (چاپ دهم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۴۲۰۰ تومان
۵	ساختمان داده‌ها (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۴۵۰۰ تومان
۶	ذخیره و بازیابی اطلاعات (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۵۲۰۰ تومان
۷	برنامه‌نویسی به زبان C و C++ (چاپ هفتم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۷۰۰۰ تومان
۸	برنامه‌نویسی به زبان ویژوال بیسیک (VB6) (چاپ سوم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۶۰۰۰ تومان
۹	برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (چاپ سوم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۴۵۰۰ تومان
۱۰	زبان تخصصی کامپیوتر (چاپ چهارم)	کاردانی به کارشناسی	کامپیوتر	۴۸۰۰ تومان
۱۱	آمار و احتمالات (چاپ نانزدهم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری ، کامپیوتر و آموزش ریاضی	۴۲۰۰ تومان
۱۲	مدار منطقی (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	برق و کامپیوتر	۶۵۰۰ تومان
۱۳	فیزیک (الکتریسیته و مغناطیس) (چاپ بست و دوم)	کاردانی به کارشناسی	برق ، بهداشت و صنایع غذایی	۴۲۰۰ تومان
۱۴	تحلیل مدارهای الکتریکی (چاپ سی‌ام)	کاردانی به کارشناسی	برق	۹۰۰۰ تومان
۱۵	ماشین‌های الکتریکی (چاپ چهاردهم)	کاردانی به کارشناسی	برق	۱۰۰۰۰ تومان
۱۶	الکترونیک (چاپ پانزدهم)	کاردانی به کارشناسی	برق	۹۵۰۰ تومان
۱۷	تکنولوژی کارگاه برق (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	برق	۶۸۰۰ تومان
۱۸	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۷ ـ ۸۰ رشته برق الکترونیک با پاسخ تشریحی (چاپ ششم)	کاردانی به کارشناسی	برق	۹۵۰۰ تومان
۱۹	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۷ ـ ۸۰ رشته برق قدرت با پاسخ تشریحی (چاپ پنجم)	کاردانی به کارشناسی	برق	۸۵۰۰ تومان
۲۰	مکانیک خاک و تکنولوژی بتن (چاپ یازدهم)	کاردانی به کارشناسی	عمران	۴۰۰۰ تومان
۲۱	ماشین‌آلات و محوطه‌سازی (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	عمران	۴۵۰۰ تومان
۲۲	زمین شناسی (چاپ دوم)	کاردانی به کارشناسی	عمران و علوم تجربی	۲۸۰۰ تومان
۲۳	تکنولوژی قالب‌بندی و آرماتور (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	ساختمان	۲۸۰۰ تومان
۲۴	سازه‌های فلزی و بتنی (چاپ چهارم)	کاردانی به کارشناسی	ساختمان	۴۲۰۰ تومان
۲۵	فیزیک (چاپ ششم)	کاردانی به کارشناسی	عمران،صنایع غذایی،بهداشت، معدن و ...	۷۰۰۰ تومان
۲۶	نقشه‌برداری (چاپ هفدهم)	کاردانی به کارشناسی	عمران ، معماری و ساختمان	۳۵۰۰ تومان
۲۷	شناخت مواد و مصالح ساختمانی (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	عمران و معماری	۳۶۰۰ تومان
۲۸	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۶ ـ ۸۰ رشته عمران و ساختمان با پاسخ تشریحی (چاپ سوم)	کاردانی به کارشناسی	عمران و ساختمان	۵۵۰۰ تومان
۲۹	مجموعه دروس تخصصی معماری (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	معماری	۹۰۰۰ تومان
۳۰	متره و برآورد (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	معماری	۳۰۰۰ تومان
۳۱	عناصر و جزئیات ساختمانی (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	معماری	۴۲۰۰ تومان
۳۲	تنظیم شرایط محیطی و تأسیسات ساختمانی(چاپ ششم)	کاردانی به کارشناسی	معماری	۵۲۰۰ تومان
۳۳	تاریخ معماری و مبانی نظری (چاپ چهارم)	کاردانی به کارشناسی	معماری	۶۵۰۰ تومان
۳۴	استاتیک و مقاومت مصالح (ایستایی) (چاپ بست و هشتم)	کاردانی به کارشناسی	معماری ، عمران و مکانیک (کلیه گرایش‌ها)	۶۸۰۰ تومان
۳۵	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری ۱ آزاد ۸۵ ـ ۸۰ رشته تأسیسات حرارتی و برودتی ، مکانیک خودرو و مکانیک سیالات با پاسخ تشریحی (چاپ سوم)	کاردانی به کارشناسی	تأسیسات ، مکانیک سیالات و مکانیک خودرو	۸۹۰۰ تومان
۳۶	انتقال حرارت (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک سیالات و تأسیسات	۴۳۰۰ تومان
۳۷	مکانیک سیالات (چاپ یازدهم)	کاردانی به کارشناسی	تأسیسات ، مکانیک سیالات و مکانیک خودرو	۴۰۰۰ تومان

مدرسان شریف

ردیف	نام کتاب	مقطع	رشته	مبلغ
۳۸	ترمودینامیک (چاپ یازدهم)	کاردانی به کارشناسی	تأسیسات ، مکانیک سیالات و مکانیک خودرو	۴۵۰۰ تومان
۳۹	تهویه مطبوع تابستانی (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	تأسیسات	۳۰۰۰ تومان
۴۰	حرارت مرکزی با آب و هوای گرم (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	تأسیسات	۴۵۰۰ تومان
۴۱	رسم فنی (نقشه‌کشی صنعتی) (چاپ هفتم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک سیالات،مکانیک جامدات،ساخت‌وتولیدو...	۱۰۵۰۰ تومان
۴۲	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۵ ـ ۸۰ گروه مکانیک (ساخت و تولید ـ جامدات) با پاسخ تشریحی(چاپ پنجم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک جامدات و ساخت و تولید	۸۸۰۰ تومان
۴۳	اجزای ماشین (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک جامدات و ساخت و تولید	۵۰۰۰ تومان
۴۴	علم مواد (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک جامدات و ساخت و تولید ۹	۴۰۰۰ تومان
۴۵	ماشین‌های ابزار و روش‌های تولید (چاپ نهم)	کاردانی به کارشناسی	مکانیک جامدات و ساخت و تولید	۹۵۰۰ تومان
۴۶	ماشین‌های کنترل عددی (CNC) (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	ساخت و تولید	۴۰۰۰ تومان
۴۷	طراحی قالبهای پرس (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	ساخت و تولید	۳۰۰۰ تومان
۴۸	طراحی قید و بند (جیگ و فیکسچرها) (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	ساخت و تولید	۳۲۰۰ تومان
۴۹	مجموعه سئوالات دانشگاه‌های سراسری و آزاد ۸۷ ـ ۸۰ رشته حسابداری با پاسخ تشریحی (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۷۵۰۰ تومان
۵۰	حسابداری شرکت‌ها (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۴۲۰۰ تومان
۵۱	حسابداری صنعتی (چاپ دوازدهم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۶۰۰۰ تومان
۵۲	حسابداری مالی (چاپ دهم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۵۵۰۰ تومان
۵۳	حسابرسی (چاپ هفتم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۳۲۰۰ تومان
۵۴	حسابداری دولتی (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۳۵۰۰ تومان
۵۵	سازمان و مدیریت (چاپ هشتم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۳۷۰۰ تومان
۵۶	اقتصاد خرد و کلان (چاپ یازدهم)	کاردانی به کارشناسی	حسابداری	۳۰۰۰ تومان
۵۷	طراحی (طراحی ـ چاپ ـ صفحه‌آرائی) (چاپ دوم)	کاردانی به کارشناسی	ارتباط تصویری	۵۰۰۰ تومان
۵۸	مکاتب هنری ایران و جهان (چاپ دوم)	کاردانی به کارشناسی	ارتباط تصویری	۴۵۰۰ تومان
۵۹	مبانی هنرهای تجسمی (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	مجموعه هنر (ارتباط تصویری ـ هنرهای تجسمی نقاشی ـ معماری ـ سینما)	۳۰۰۰ تومان
۶۰	هندسه نقوش (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	گرافیک	۲۳۰۰ تومان
۶۱	مجموعه سئوالات تخصصی کنکورهای ۸۷ ـ ۸۰ رشته مامایی با پاسخنامه تشریحی (چاپ اول)	کاردانی به کارشناسی	مامایی	۴۰۰۰ تومان
۶۲	مجموعه دروس تخصصی صنایع غذایی (چاپ دوم)	کاردانی به کارشناسی	صنایع غذایی	۴۵۰۰ تومان
۶۳	زبان عمومی (چاپ نهم)	کارشناسی ارشد	کلیه رشته‌ها	۸۵۰۰ تومان
۶۴	ریاضیات عمومی (۱) (چاپ سوم)	کارشناسی ارشد	رشته‌های فنی و مهندسی	۸۹۰۰ تومان
۶۵	ریاضیات عمومی (۲) (چاپ سوم)	کارشناسی ارشد	رشته‌های فنی و مهندسی	۵۸۰۰ تومان
۶۶	معادلات دیفرانسیل (چاپ چهارم)	کارشناسی ارشد	رشته‌های فنی و مهندسی	۱۱۰۰۰ تومان
۶۷	ریاضیات مهندسی (چاپ ششم)	کارشناسی ارشد	رشته‌های فنی و مهندسی	۶۹۰۰ تومان
۶۸	مفاهیم و مبانی سیستم‌های عامل (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی کامپیوتر	۳۰۰۰ تومان
۶۹	نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی کامپیوتر	۳۰۰۰ تومان
۷۰	مدارمنطقی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی کامپیوتر	۴۲۰۰ تومان
۷۱	آمار و احتمالات (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق – مهندسی کامپیوتر	۴۲۰۰ تومان
۷۲	الکترونیک (چاپ چهارم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق	۹۰۰۰ تومان
۷۳	ماشین‌های الکتریکی (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق	۷۵۰۰ تومان
۷۴	الکترومغناطیس (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق – مهندسی هسته ای - فیزیک	۸۰۰۰ تومان
۷۵	تجزیه و تحلیل سیستم (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق - مهندسی پزشکی	۳۴۰۰ تومان
۷۶	سیستم‌های کنترل خطی (چاپ سوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی برق ـ مهندسی هسته‌ای ـ مهندسی مکانیک ـ مهندسی شیمی	۴۸۰۰ تومان

ردیف	نام کتاب	مقطع	رشته	مبلغ
۷۷	مجموعه سئوالات کنکورهای ۸۶-۷۸ رشته مهندسی صنایع - سیستمهای اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهروری با پاسخنامه تشریحی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع گرایش سیستمهای اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری	۶۹۰۰ تومان
۷۸	آمار و احتمالات (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع و مهندسی صنایع - سیستمهای اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری	۷۲۰۰ تومان
۷۹	زبان تخصصی (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع و مهندسی صنایع - سیستمهای اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری	۳۸۰۰ تومان
۸۰	تحقیق در عملیات (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع و مهندسی صنایع - سیستمهای اقتصادی و اجتماعی و مدیریت سیستم و بهره‌وری	۷۲۰۰ تومان
۸۱	مجموعه سئوالات کنکورهای ۸۶-۷۸ رشته مهندسی صنایع - صنایع با پاسخنامه تشریحی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع	۸۵۰۰ تومان
۸۲	طرح‌ریزی واحدهای صنعتی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع	۵۵۰۰ تومان
۸۳	کنترل موجودی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی صنایع - صنایع	۳۵۰۰ تومان
۸۴	طراحی اجزای ماشین (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی مکانیک	۴۰۰۰ تومان
۸۵	تئوری ارتعاشات (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی مکانیک - مهندسی هوا و فضا	۳۲۰۰ تومان
۸۶	ترمودینامیک (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی مکانیک - مهندسی شیمی - مهندسی هوا و فضا	۴۲۰۰ تومان
۸۷	مکانیک سیالات (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی مکانیک - مهندسی عمران - مهندسی شیمی	۶۵۰۰ تومان
۸۸	مقاومت مصالح (چاپ سوم)	کارشناسی ارشد	مهندسی مکانیک - مهندسی عمران - مهندسی هوا و فضا - مهندسی کشاورزی - مهندسی معدن	۸۲۰۰ تومان
۸۹	مکانیک خاک (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی عمران	۴۵۰۰ تومان
۹۰	تحلیل سازه‌ها (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی عمران	۶۸۰۰ تومان
۹۱	مجموعه سئوالات کنکورهای ۸۷-۷۵ رشته مهندسی عمران با پاسخنامه تشریحی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مهندسی عمران	۸۸۰۰ تومان
۹۲	ریاضیات عمومی (چاپ سوم)	کارشناسی ارشد	مدیریت - اقتصاد - حسابداری	۹۲۰۰ تومان
۹۳	آمار و احتمالات (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مدیریت - اقتصاد - حسابداری	۷۸۰۰ تومان
۹۴	حسابداری صنعتی (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	حسابداری	۷۵۰۰ تومان
۹۵	حسابرسی (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	حسابداری	۷۵۰۰ تومان
۹۶	حسابداری مالی (چاپ دوم)	کارشناسی ارشد	حسابداری	۷۸۰۰ تومان
۹۷	تئوری‌های مدیریت (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مجموعه مدیریت - مدیریت اجرایی	۱۲۰۰۰تومان
۹۸	مدیریت مالی (چاپ اول)	کارشناسی ارشد	مجموعه مدیریت	۵۵۰۰ تومان
۹۹	دین و زندگی ۱ و ۲ و ۳ (چاپ اول)	کاردانی پیوسته	کلیه رشته‌ها	۷۲۰۰ تومان
۱۰۰	دروس‌عمومی(ادبیات - عربی - زبان) (چاپ هفتم)	کاردانی پیوسته	کلیه رشته‌ها	۱۰۵۰۰تومان
۱۰۱	دروس پایه (ریاضیات - فیزیک - شیمی) (چاپ پنجم)	کاردانی پیوسته	کلیه رشته‌ها	۸۵۰۰ تومان
۱۰۲	ریاضی «۳» (چاپ دوم)	کاردانی پیوسته	کلیه رشته‌ها	۴۰۰۰ تومان
۱۰۳	تخصصی معماری (چاپ چهارم)	کاردانی پیوسته	معماری	۶۷۰۰ تومان
۱۰۴	تخصصی کامپیوتر (چاپ دوم)	کاردانی پیوسته	کامپیوتر	۵۵۰۰ تومان
۱۰۵	فیزیک «۲» (چاپ دوم)	کاردانی پیوسته	مکانیک ، تأسیسات و ...	۲۷۰۰ تومان
۱۰۶	تخصصی حسابداری (چاپ سوم)	کاردانی پیوسته	حسابداری	۷۲۰۰ تومان
۱۰۷	مجموعه دروس تخصصی الکترونیک (چاپ چهارم)	کاردانی پیوسته	الکترونیک	۹۵۰۰ تومان
۱۰۸	مجموعه دروس تخصصی‌الکتروتکنیک(چاپ چهارم)	کاردانی پیوسته	الکتروتکنیک	۸۲۰۰ تومان
۱۰۹	مکانیک خودرو (چاپ چهارم)	کاردانی پیوسته	مکانیک خودرو	۸۶۰۰ تومان
۱۱۰	ساخت و تولید و نقشه‌کشی عمومی (چاپ دوم)	کاردانی پیوسته	ساخت و تولید و نقشه‌کشی عمومی	۷۰۰۰ تومان
۱۱۱	دین و زندگی ۱ و ۲ پیش‌دانشگاهی (چاپ اول)	پیش‌دانشگاهی	ریاضی - تجربی - انسانی - زبان	۲۸۰۰ تومان
۱۱۲	اندیشه اسلامی ۱ (چاپ اول)	فراگیر پیام نور (کارشناسی)	کلیه رشته‌ها	۲۷۰۰ تومان